T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DUAL JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR

İREM SELİN KARABUDAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DR. ÖĞR. ÜYESİ ZAFER ÜNAL

NİSAN - 2022
KASTAMONU

TEZ ONAYI

İrem Selin KARABUDAK tarafından hazırlanan "**DUAL JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **01.04.2022** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Ahmet EROĞLU Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Enstitü Müdürü	Prof. Dr. İzzet ŞENER	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

İrem Selin KARABUDAK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR

İREM SELİN KARABUDAK
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN:DR. ÖĞR. ÜYESİ ZAFER ÜNAL

Bu tezde dual Jacobsthal kuaterniyonlar ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar tanıtılmış ve bazı özelikleri verilmiştir. Dual Jacobsthal kuaterniyonlar ile dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar arasındaki ilişkiler incelenmiş, bu kuaterniyonların Binet formülleri, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özedeşlikleri verilerek, bunlara dayalı sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kuaterniyonlar, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları

Nisan 2022, 31 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

DUAL JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS QUATERNIONS

İREM SELİN KARABUDAK

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR:ASSIST. PROF. DR. ZAFER ÜNAL

In this thesis, dual Jacobsthal quaternions and dual Jacobsthal-Lucas quaternions are introduced and some of their properties are given. Relationships between dual Jacobsthal quaternions and dual Jacobsthal-Lucas quaternions were examined, Binet formulas, Catalan's, Cassini's and d'Ocagne's identities of these quaternions were given and based on these results were obtained.

KEYWORDS: Quaternions, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers

April 2022, 31 Page

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında büyük katkıları olan, tez çalışması boyunca gösterdiği ve ışık tutucu yollar, yöntemler ve destekleri için değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL'a çok teşekkür ederim. Aynı zamanda, bu araştırmayla ilişkili pek çok pratik bilgiler hakkında yardımcı oldukları için Matematik Anabilim Dalı öğretim üyelerine teşekkürü borç bilirim. Tez çalışmam sürecinde benden hem manevi hem de maddi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme de teşekkürlerimi sunarım.

İrem Selin KARABUDAK

Kastamonu, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI ii
TAAHHÜTNAME iii
ÖZET...iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
TABLOLAR DİZİNİ viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ iix
1. GİRİŞ...1
2. TEMEL KAVRAMLAR..2
3. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR ...7
4. DUAL JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR...14
5. DUAL JACOBSTHAL VE DUAL JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER 26
KAYNAKLAR 30
ÖZGEÇMİŞ..31

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1 Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları... 5

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

IR	: Reel Sayılar
IN	: Doğal Sayılar
H	: Kuaterniyon Kümesi
q	: Kuaterniyon
q^*	: Kuaterniyon Eşleniği
$N(q)$	: Kuaterniyon Normu
D	: Dual Sayı Sistemi
ε	: Dual Birim
L_n	: Lucas Sayıları
P_n	: Pell Sayıları
Q_n	: Pell-Lucas Sayıları
J_n	: Jacobsthal Sayıları
j_n	: Jacobsthal-Lucas Sayıları
$\tilde{J}_n$	: Dual Jacobsthal Sayıları
$\tilde{j}_n$	: Dual Jacobsthal-Lucas Sayıları
JQ_n	: Jacobsthal Kuaterniyon
JLQ_n	: Jacobsthal-Lucas Kuaterniyon
DJQ_n	: Dual Jacobsthal Kuaterniyon
$DJLQ_n$	: Dual Jacobsthal-Lucas Kuaterniyon

1. GİRİŞ

Kuaterniyonlar ilk defa 1843'te Sir William R. Hamilton tarafından tanımlanmış ve bu tarihten altı yıl sonra da J. Cackle, split kuaterniyonlarla ilgili çalışma yapmıştır. Daha sonraki zamanlarda, kuaterniyonlar çok kullanılan split kuaterniyon ve para kuaterniyon şeklinde gruplandırılmıştır. Fibonacci kuaterniyonları yıllarca çalışmıştır. A.F. Horadam (Horadam, 1963) tarafından ilk defa yapılan çalışmalar başka yazarların da ilgilenmesine yol açmıştır. Kuaterniyonlar dört bileşen içerdiğinden (reel ve kompleks olmak üzere) ve iki kompleks sayının kombinasyonundan oluştuğundan, hem reel sayılar hem de kompleks sayıları içeren geniş bir sayı sistemidir.

Kuaterniyon cebiri, birleşmeli fakat değişmeli olmayan dört elemandan oluşur ve bu dört elemandan biri reel kısmı, geriye kalan üç eleman da sanal kısmı oluşturur. Kuaterniyonlar bölüm cebirine sahip olup değişme özelliğini sağlamasa da birçok uygulamada vektörler ve matrislerin yerini almıştır. Üç boyutlu uzayda dönme ve kayma hareketlerinin hesaplanması başlıca kullanım alanlarıdır.

Nurkan ve Güven (Nurkan ve Güven, 2015) de dual Fibonacci kuaterniyonları ve dual Lucas kuaterniyonları tanımlamıştır. Halıcı, (Halici, 2013) de kompleks Fibonacci kuaterniyonlarını araştırmıştır. (Horadam, 1993) da Horadam, Pell kuaterniyonları ve genelleştirilmiş Pell kuaterniyonların kullanılma olasılığından bahsetmiştir. (Çimen ve İpek, 2016) ve (Szynal-Liana ve Wloch, 2016) da yer alan Pell-Lucas kuaterniyonları, Pell kuaterniyonların yakın bir zamanda ilginç bir sonucu olarak elde edilmiştir. Ayrıca (Tokeşer vd., 2017) de split Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları ve bunlarla ilgili birçok özdeşlikler verilmiştir. Tokeşer vd., (Tokeşer vd., 2020) de genelleştirilmiş Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas oktonyonları tanıttıktan sonra, bu oktonyonların bazı özel özdeşliklerini elde etmişlerdir.

Bu tezde, Dual Jacobsthal ve Dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları tanımladıktan sonra, bunların arasında oluşan Binet formülleri, Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşlikleri ile birlikte bazı özel eşitlikler de elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$H = \{g + li + mj + nk : g, l, m, n \in IR\}$ kuaterniyonlar kümesi olmak üzere, bir kuaterniyon $q \in H$ve her$g, l, m, n \in IR$için

$$q = g + li + mj + nk$$

şeklindedir. $q_1, q_2 \in H$ ve her$g_1, l_1, m_1, n_1, g_2, l_2, m_2, n_2 \in IR$ için

$$q_1 = g_1 + l_1 i + m_1 j + n_1 k$$

$$q_2 = g_2 + l_2 i + m_2 j + n_2 k$$

herhangi iki kuaterniyon olmak üzere, kuaterniyonlar üzerindeki eşitlik, toplama, çıkarma ve skaler ile çarpma işlemleri sırasıyla aşağıdaki tanımlarda verilmiştir.

2.1 Tanım

$q_1, q_2 \in H$ ve her$g_1, l_1, m_1, n_1, g_2, l_2, m_2, n_2 \in IR$ için

$$q_1 = g_1 + l_1 i + m_1 j + n_1 k$$

$$q_2 = g_2 + l_2 i + m_2 j + n_2 k$$

şeklinde verilen iki kuaterniyonun birbirine eşit olması için

$$g_1 = g_2, l_1 = l_2, m_1 = m_2, n_1 = n_2$$

şartının sağlanması gerekmektedir.

2.2 Tanım

$q_1, q_2 \in H$ ve her$g_1, l_1, m_1, n_1, g_2, l_2, m_2, n_2 \in IR$ için

$$q_1 = g_1 + l_1 i + m_1 j + n_1 k$$

$$q_2 = g_2 + l_2 i + m_2 j + n_2 k$$

iki kuaterniyonun toplamı

$$q_1 + q_2 = (g_1 + g_2) + (l_1 + l_2)i + (m_1 + m_2)j + (n_1 + n_2)k$$

şeklindedir.

2.3 Tanım

$q_1, q_2 \in H$ ve her$g_1, l_1, m_1, n_1, g_2, l_2, m_2, n_2 \in IR$ için

$$q_1 = g_1 + l_1 i + m_1 j + n_1 k$$

$$q_2 = g_2 + l_2 i + m_2 j + n_2 k$$

iki kuaterniyon arasındaki çıkarma işlemi

$$q_1 - q_2 = (g_1 - g_2) + (l_1 - l_2)i + (m_1 - m_2)j + (n_1 - n_2)k$$

şeklindedir.

2.4 Tanım

$q_1 \in H$ ve her $g_1, l_1, m_1, n_1 \in IR$ için

$$q_1 = g_1 + l_1 i + m_1 j + n_1 k$$

kuaterniyonun $s \in IR$ ile skaler çarpma işlemi

$$sq_1 = sg_1 + sl_1 i + sm_1 j + sn_1 k$$

şeklindedir.

2.5 Tanım

$q \in H$ve her $g, l, m, n \in IR$için

$$q = g + li + mj + nk$$

bir kauterniyonun eşleniği

$$q^* = g - li - mj - nk$$

ve aynı kuaterniyonun normu ise

$$N(q) = (g + li + mj + nk)^2 = g^2 + l^2 + m^2 + n^2$$

şeklinde tanımlanmıştır.

2.6 Tanım

IR reel sayılar kümesi olmak üzere

$$D = IR \times IR$$

kümesi üzerinde eşitlik, toplama, çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış ise *D* kümesine dual sayılar sistemi, $\varepsilon = (0,1)$ dual birim, $k, k^* \in IR$ ve $\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$ olmak üzere $d = (k, k^*) = k + \varepsilon k^*$ elemanına da dual sayı denir.

$K = (k, k^*) = k + \varepsilon k^* \in D$ ve $M = (m, m^*) = m + \varepsilon m^* \in D$ olmak üzere

Eşitlik :
$k = m, k^* = m^*$ ise *K* ile *M* eşittir yani $K = M$ şeklindedir.

Toplama :
$D \times D \to D$ olmak üzere
$K + M = (k, k^*) + (m, m^*) = (k + m, k^* + m^*) = k + m + \varepsilon(k^* + m^*)$
şeklindedir.

Çarpma :
$D \times D \to D$ olmak üzere
$K.M = (k, k^*).(m, m^*) = (km, km^* + k^*m) = km + \varepsilon(km^* + k^*m)$ şeklindedir [12].

2.7 Tanım

Fibonacci tipi sayılar formun 2. mertebeden lineer tekrarlama bağıntısı ile aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2}, \forall b_i \in IN, i = 1,2.$

Özel olarak $b_i, i = 1,2$ Fibonacci sayılarını ve ve benzerlerini tanımlayan tekrarlama denklemi elde edilmiştir. Fibonacci tipi sayılar arasında iyi bilinen özellikler aşağıda listelenmiştir :

a) $n \geq 2$ için $L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ Lucas sayıları,

b) $n \geq 2$ için $P_0 = 0, P_1 = 1$ olmak üzere $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ Pell sayıları,

c) $n \geq 2$ için $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ olmak üzere $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ Pell-Lucas sayıları,

d) $n \geq 2$ için $J_0 = 0, J_1 = 1$ olmak üzere $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$ Jacobsthal sayıları,

e) $n \geq 2$ için $j_1 = 2, j_2 = 1$ olmak üzere $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$ Jacobsthal-Lucas sayıları.

Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 2.1. Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	81	171	341
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025

Bu tezde yapılan hesaplamalarda kullanacağımız Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal-Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler aşağıda verilmiştir (Horadam, 1988) :

$$j_{k+1} + j_k = 3(J_{k+1} + J_k) = 3.2^k \tag{2.1}$$

$$j_{k+1} - j_k = 3(J_{k+1} - J_k) + 4(-1)^{k+1} = 2^k + 2(-1)^{k+1} \tag{2.2}$$

$$j_{k+p} + j_{k-p} = 3(J_{k+p} + J_{k-p}) + 4(-1)^{k-p} = 2^{k-p}(2^{2p} + 1) + 2(-1)^{k-p} \tag{2.3}$$

$$j_{k+p} - j_{k-p} = 3(J_{k+p} - J_{k-p}) = 2^{k-p}(2^{2p} - 1) \tag{2.4}$$

$$J_k + j_k = 2J_{k+1} \tag{2.5}$$

$$3J_k + j_k = 2^{k+1} \tag{2.6}$$

$$j_k J_k = J_{2k} \tag{2.7}$$

$$J_l j_k + J_k j_l = 2J_{l+k} \tag{2.8}$$

$$J_l j_k - J_k j_l = (-1)^k 2^{k+1} J_{l-k} \tag{2.9}$$

$$J_k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) \tag{2.10}$$

$$j_k = 2^k - (-1)^k \tag{2.11}$$

Eşitlik (2.10) ve eşitlik (2.11) sırasıyla Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları içim Binet formülleridir.

3. JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR

Bu bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları tanımlayıp, bazı özellikleri verilecektir.

3.1 Tanım

$\tilde{J}_{\varpi}$ Jacobsthal ve $\tilde{j}_{\varpi}$ Jacobsthal-Lucas sayıları olmak üzere, sırasıyla $\tilde{JQ}_{\varpi}$ Jacobsthal ve $\tilde{JLQ}_{\varpi}$ Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları aşağıdaki tanımlanmıştır :

$$\tilde{JQ}_{\varpi} = \tilde{J}_{\varpi} + i\tilde{J}_{\varpi+1} + j\tilde{J}_{\varpi+2} + k\tilde{J}_{\varpi+3}$$
ve
$$\tilde{JLQ}_{\varpi} = \tilde{j}_{\varpi} + i\tilde{j}_{\varpi+1} + j\tilde{j}_{\varpi+2} + k\tilde{j}_{\varpi+3}.$$

3.1 Teorem

$\varpi \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$$\tilde{JQ}_{\varpi+1} + \tilde{JQ}_{\varpi} = 2^{\varpi}(1 + 2i + 4j + 8k)$$
dır.

İspat.

$$\tilde{JQ}_{\varpi} = \tilde{J}_{\varpi} + i\tilde{J}_{\varpi+1} + j\tilde{J}_{\varpi+2} + k\tilde{J}_{\varpi+3}$$
$$\tilde{JQ}_{\varpi+1} = \tilde{J}_{\varpi+1} + i\tilde{J}_{\varpi+2} + j\tilde{J}_{\varpi+3} + k\tilde{J}_{\varpi+4} \tag{3.1}$$
olmak üzere,
$$\tilde{JQ}_{\varpi} + \tilde{JQ}_{\varpi+1} = \left(\tilde{J}_{\varpi+1} + \tilde{J}_{\varpi}\right) + i\left(\tilde{J}_{\varpi+2} + \tilde{J}_{\varpi+1}\right) + j\left(\tilde{J}_{\varpi+3} + \tilde{J}_{\varpi+2}\right) + k\left(\tilde{J}_{\varpi+4} + \tilde{J}_{\varpi+3}\right)$$

olur. Eşitlik (2.1) de

$$\tilde{J}_{\varpi+1} + \tilde{J}_{\varpi} = 2^{\varpi}$$

olduğundan,

$$\tilde{J}_{\varpi+2} + \tilde{J}_{\varpi+1} = 2^{\varpi+1},$$
$$\tilde{J}_{\varpi+3} + \tilde{J}_{\varpi+2} = 2^{\varpi+2},$$
$$\tilde{J}_{\varpi+4} + \tilde{J}_{\varpi+3} = 2^{\varpi+2}$$

elde edilir. Bu ifadeleri $\widetilde{JQ}_{\varpi+1} + \widetilde{JQ}_{\varpi}$ de yerine yazarsak

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+1} + \widetilde{JQ}_{\varpi} = 2^{\varpi} + i2^{\varpi+1} + j2^{\varpi+2} + k2^{\varpi+3} = 2^{\varpi}(1 + 2i + 4j + 8k)$$

olarak bulunur.

3.2 Teorem

$\varpi \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+1} - \widetilde{JQ}_{\varpi} = \frac{1}{3}[2^{\varpi}(1 + 2i + 4j + 8k) + 2(-1)^{\varpi}(1 - i + j - k)]$$

dır.

İspat.

Eşitlik (3.1) den

$$\tilde{JQ}_{\varpi+1} - \tilde{JQ}_{\varpi} = \left(\tilde{J}_{\varpi+1} - \tilde{J}_{\varpi}\right) + i\left(\tilde{J}_{\varpi+2} - \tilde{J}_{\varpi+1}\right) + j\left(\tilde{J}_{\varpi+3} - \tilde{J}_{\varpi+2}\right) + k\left(\tilde{J}_{\varpi+4} - \tilde{J}_{\varpi+3}\right)$$

elde edilir. Eşitlik (2.2) den de

$$3\left(\tilde{J}_{\varpi+1} - \tilde{J}_{\varpi}\right) + 4(-1)^{\varpi+1} = 2^{\varpi} + 2(-1)^{\varpi+1}$$
$$3\left(\tilde{J}_{\varpi+1} - \tilde{J}_{\varpi}\right) = 2^{\varpi} + 2(-1)^{\varpi+1} - 4(-1)^{\varpi+1}$$
$$\tilde{J}_{\varpi+1} - \tilde{J}_{\varpi} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi} - 2(-1)^{\varpi+1}\right)$$
$$\tilde{J}_{\varpi+1} - \tilde{J}_{\varpi} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi} + 2(-1)^{\varpi}\right)$$

bulunur. Son eşitlikten yararlandığımızda

$$\tilde{J}_{\varpi+2} - \tilde{J}_{\varpi+1} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi+1} + 2(-1)^{\varpi}\right)$$
$$\tilde{J}_{\varpi+3} - \tilde{J}_{\varpi+2} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi+2} + 2(-1)^{\varpi}\right)$$
$$\tilde{J}_{\varpi+4} - \tilde{J}_{\varpi+3} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi+3} + 2(-1)^{\varpi}\right)$$

olup, bu eşitlikler $\tilde{JQ}_{\varpi+1} - \tilde{JQ}_{\varpi}$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{JQ}_{\varpi+1} - \tilde{JQ}_{\varpi} &= \frac{1}{3}[(2^{\varpi} + 2(-1)^{\varpi}) + (2^{\varpi+1} - 2(-1)^{\varpi})i + (2^{\varpi+2} + 2(-1)^{\varpi})j \\ &\quad + (2^{\varpi+3} - 2(-1)^{\varpi})k] \\ &= \tfrac{1}{3}[2^{\varpi}(1 + 2i + 4j + 8k) + 2(-1)^{\varpi}(1 - i + j - k)]\end{aligned}$$

elde edilip, ispat tamamlanmış olur.

3.3 Teorem

$\varpi, \hbar \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} + \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} = \frac{1}{3}[2^{\varpi-\hbar}(2^{2\hbar}+1)(1+2i+4j+8k) - 2(-1)^{\varpi-\hbar}(1-i+j-k)]$$

dır.

İspat.

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} = \widetilde{J}_{\varpi+\hbar} + i\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+1} + j\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+2} + k\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+3}$$
$$\widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} = \widetilde{J}_{\varpi-\hbar} + i\widetilde{J}_{\varpi-\hbar+1} + j\widetilde{J}_{\varpi-\hbar+2} + k\widetilde{J}_{\varpi-\hbar+3}$$
(3.2)

olmak üzere,

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} + \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} = \left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar}\right) + i\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+1} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+1}\right) + j\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+2} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+2}\right) + k\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+3} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+3}\right)$$

olur. Eşitlik (2.3) den

$$3\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar}\right) + 4(-1)^{\varpi-\hbar} = 2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar}+1\right) + 2(-1)^{\varpi-\hbar}$$
$$\Rightarrow 3\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar}\right) = 2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar}+1\right) + 2(-1)^{\varpi-\hbar} - 4(-1)^{\varpi-\hbar}$$
$$\Rightarrow \widetilde{J}_{\varpi+\hbar} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar}+1\right) - 2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)$$
$$\Rightarrow \widetilde{J}_{\varpi+\hbar+1} + \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+1} = \frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar+1}\left(2^{2\hbar}+1\right) + 2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)$$

bulunur. Son eşitlikten yararlandığımızda

$$\tilde{J}_{\varpi+\hbar+2}+\tilde{J}_{\varpi-\hbar+2}=\frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar+2}\left(2^{2\hbar}+1\right)-2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)$$

$$\tilde{J}_{\varpi+\hbar+3}+\tilde{J}_{\varpi-\hbar+3}=\frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar+3}\left(2^{2\hbar}+1\right)+2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)$$

olup, bu eşitlikler $\tilde{JQ}_{\varpi+\hbar}+\tilde{JQ}_{\varpi-\hbar}$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{JQ}_{\varpi+\hbar}+\tilde{JQ}_{\varpi-\hbar}&=\frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar}+1\right)-2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)+\frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar+1}\left(2^{2\hbar}+1\right)+2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)i\\&+\frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar+2}\left(2^{2\hbar}+1\right)-2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)j+\frac{1}{3}\left(2^{\varpi-\hbar+3}\left(2^{2\hbar}+1\right)+2(-1)^{\varpi-\hbar}\right)k\end{aligned}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\tilde{JQ}_{\varpi+\hbar}+\tilde{JQ}_{\varpi-\hbar}=\frac{1}{3}[2^{\varpi-\hbar}(2^{2\hbar}+1)(1+2i+4j+8k)-2(-1)^{\varpi-\hbar}(1-i+j-k)]$$

elde edilip, böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4 Teorem

$\varpi, \hbar \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} = \frac{1}{3} 2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar} - 1\right)(1 + 2i + 4j + 8k)$$

dır.

İspat.

Eşitlik (3.2) den

$$\begin{aligned}\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} &= \left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar}\right) + i\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+1} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+1}\right) + j\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+2} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+2}\right) \\ &\quad + k\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+3} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+3}\right)\end{aligned}$$

olur. Eşitlik (2.4) den

$$3\left(\widetilde{J}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar}\right) = 2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \widetilde{J}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar} = \frac{1}{3} 2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \widetilde{J}_{\varpi+\hbar+1} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+1} = \frac{1}{3} 2^{\varpi-\hbar+1}\left(2^{2\hbar} - 1\right)$$

bulunur. Son eşitlikten yararlandığımızda

$$\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+2} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+2} = \frac{1}{3} 2^{\varpi-\hbar+2}\left(2^{2\hbar} - 1\right)$$

$$\widetilde{J}_{\varpi+\hbar+3} - \widetilde{J}_{\varpi-\hbar+3} = \frac{1}{3} 2^{\varpi-\hbar+3}\left(2^{2\hbar} - 1\right)$$

olup, bu eşitlikler $\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar}$ de yerine yazılırsa

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} = \frac{1}{3}2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar}-1\right) + \frac{1}{3}2^{\varpi-\hbar+1}\left(2^{2\hbar}-1\right)i + \frac{1}{3}2^{\varpi-\hbar+2}\left(2^{2\hbar}-1\right)j + \frac{1}{3}2^{\varpi-\hbar+3}\left(2^{2\hbar}-1\right)k$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\widetilde{JQ}_{\varpi+\hbar} - \widetilde{JQ}_{\varpi-\hbar} = \frac{1}{3}2^{\varpi-\hbar}\left(2^{2\hbar}-1\right)(1+2i+4j+8k)$$

elde edilip, böylece ispat tamamlanmış olur.

4. DUAL JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, dual Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları tanımlayıp, dual Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için iyi bilinen Catalon, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri elde edildi. Bu özdeşliklerin ispatları dual Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonların Binet formülleri kullanarak yapıldı.

4.1 Tanım

Dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar, $n \geq 0$ için $\{1, i, j, k\}$standart baz olmak üzere, sırasıyla

$$\begin{aligned} DJQ_n &= JQ_n + \varepsilon JQ_{n+1} \\ &= J_n + J_{n+1}i + J_{n+2}j + J_{n+3}k + \varepsilon(J_{n+1} + J_{n+2}i + J_{n+3}j + J_{n+4}k) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} DJLQ_n &= JLQ_n + \varepsilon JLQ_{n+1} \\ &= JL_n + JL_{n+1}i + JL_{n+2}j + JL_{n+3}k + \varepsilon(JL_{n+1} + JL_{n+2}i + JL_{n+3}j + JL_{n+4}k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar için Binet formüllerini aşağıdaki teoremle birlikte verelim.

4.2 Teorem

$n \geq 0$ için $\mu = 2, v = -1, \mu' = (1 + \varepsilon\mu)\mu^*$ ve $v' = (1 + \varepsilon v)v^*$ olmak üzere dual Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonların Binet formülleri sırasıyla,

$$DJQ_n = \frac{\mu'\mu^n - v'v^n}{\mu - v}$$

ve

$$DJLQ_n = \mu'\mu^n + v'v^n$$

şeklindedir. Burada $\mu^* = 1 + \mu i + \mu^2 j + \mu^3 k$ ve $v^* = 1 + vi + v^2 j + v^3 k$ dır.

İspat.

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonların Binet formülleri

$$JQ_n = \frac{\mu^*\mu^n - v^*v^n}{\mu - v}$$

ve

$$JLQ_n = \mu^*\mu^n + v^*v^n$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
DJQ_n &= JQ_n + \varepsilon JQ_{n+1} \\
&= \frac{\mu^* \mu^n - v^* v^n}{\mu - v} + \varepsilon \frac{\mu^* \mu^{n+1} - v^* v^{n+1}}{\mu - v} \\
&= \frac{\mu^* \mu^n}{\mu - v}(1 + \varepsilon\mu) - \frac{v^* v^n}{\mu - v}(1 + \varepsilon v) \\
&= \frac{\mu^n}{\mu - v}(1 + \varepsilon\mu)\mu^* - \frac{v^n}{\mu - v}(1 + \varepsilon v)v^* \\
&= \frac{\mu' \mu^n - v' v^n}{\mu - v}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
DJLQ_n &= JLQ_n + \varepsilon JLQ_{n+1} \\
&= \mu^* \mu^n + v^* v^n + \varepsilon\left(\mu^* \mu^{n+1} + v^* v^{n+1}\right) \\
&= \mu^* \mu^n (1 + \varepsilon\mu) + v^* v^n (1 + \varepsilon v) \\
&= \mu' \mu^n + v' v^n
\end{aligned}$$

elde edilip, ispat tamamlanmış olur.

İlerideki hesaplamalarımızda önemli rol oynayacak olan bazı özdeşlikleri aşağıdaki lemma ile verelim.

4.3 Lemma

$\mu = 2, v = -1, \mu^* = 1 + \mu i + \mu^2 j + \mu^3 k$, $v^* = 1 + v i + v^2 j + v^3 k$ ve $\xi = -2i - j + k$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left(\mu'\right)^2 &= (JLQ_0 + 3JQ_0 - 85)(1 + 4\varepsilon) \\
\left(v'\right)^2 &= (JLQ_0 - 3JQ_0 - 4)(1 - 2\varepsilon) \\
\mu' v' &= (JLQ_0 + 5 + 6\xi)(1 + \varepsilon) \\
v' \mu' &= (JLQ_0 + 5 - 6\xi)(1 + \varepsilon)
\end{aligned}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
(\mu')^2 &= \left((1+\varepsilon\mu)\mu^*\right)\left((1+\varepsilon\mu)\mu^*\right)\\
&= (1+2\varepsilon)^2(\mu^*)^2\\
&= (1+4\varepsilon)(\mu^*)^2\\
&= (1+\mu i+\mu^2 j+\mu^3 k)(1+\mu i+\mu^2 j+\mu^3 k)(1+4\varepsilon)\\
&= (1+2i+4j+8k)(1+2i+4j+8k)(1+4\varepsilon)\\
&= \begin{pmatrix} 1+2i+4j+8k+2i+4i^2+8ij+16ik+4j+8ji \\ +16j^2+32jk+8k+16ki+32kj+64k^2 \end{pmatrix}(1+4\varepsilon)\\
&= (1+4i+8j+16k-4-16-64)(1+4\varepsilon)\\
&= (4(i+2j+4k)-83)(1+4\varepsilon)\\
&= (JLQ_0+3JQ_0-85)(1+4\varepsilon).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v')^2 &= \left((1+\varepsilon v)v^*\right)\left((1+\varepsilon v)v^*\right)\\
&= (1-\varepsilon)^2(v^*)^2\\
&= (1-2\varepsilon)(v^*)^2\\
&= (1+vi+v^2 j+v^3 k)(1+vi+v^2 j+v^3 k)(1-2\varepsilon)\\
&= (1-i+j-k)(1-i+j-k)(1-2\varepsilon)\\
&= \begin{pmatrix} 1-i+j-k-i+i^2-ij+ik+j-ji+j^2-jk \\ -k+ki-kj+k^2 \end{pmatrix}(1-2\varepsilon)\\
&= (1-2i+2j-2k-3)(1-2\varepsilon)\\
&= 2(-1-i+j-k)(1-2\varepsilon)\\
&= (JLQ_0-3JQ_0-4)(1-2\varepsilon).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mu' v' &= \Big((1+\varepsilon\mu)\mu^*\Big)\Big((1+\varepsilon v)v^*\Big)\\
&= (1+2\varepsilon)(1-\varepsilon)\mu^* v^*\\
&= \mu^* v^*(1+\varepsilon)\\
&= (1+\mu i+\mu^2 j+\mu^3 k)(1+vi+v^2 j+v^3 k)(1+\varepsilon)\\
&= (1+2i+4j+8k)(1-i+j-k)(1+\varepsilon)\\
&= \begin{pmatrix} 1-i+j-k+2i-2i^2+2ij-2ik+4j-4ji+4j^2-4jk \\ +8k-8ki+8kj-8k^2 \end{pmatrix}(1+\varepsilon)\\
&= (1+i+5j+7k+6+6k-6j-12i)(1+\varepsilon)\\
&= \big(2+i+5j+7k+5+6(-2i-j+k)\big)(1+\varepsilon)\\
&= (JLQ_0+5+6\xi)(1+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v' \mu' &= \Big((1+\varepsilon v)v^*\Big)\Big((1+\varepsilon\mu)\mu^*\Big)\\
&= (1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)v^*\mu^*\\
&= v^*\mu^*(1+\varepsilon)\\
&= (1+vi+v^2 j+v^3 k)(1+\mu i+\mu^2 j+\mu^3 k)(1+\varepsilon)\\
&= (1-i+j-k)(1+2i+4j+8k)(1+\varepsilon)\\
&= \begin{pmatrix} 1+2i+4j+8k-i-2i^2-4ij-8ik+j+2ji+4j^2+8jk \\ -k-2ki-4kj-8k^2 \end{pmatrix}(1+\varepsilon)\\
&= (1+i+5j+7k+6-6k+12i+6j)(1+\varepsilon)\\
&= \big(2+i+5j+7k+5-6(-2i-j+k)\big)(1+\varepsilon)\\
&= (JLQ_0+5-6\xi)(1+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Yukarıda verdiğimiz önemli özdeşliklerden ve dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonların Binet formüllerinden yararlanarak, sırasıyla, bu kuaterniyonlar için sırasıyla Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini verebiliriz.

4.4 Teorem (Catalan Özdeşlikleri)

$\forall n, r \in \mathbb{Z}$ için, $\xi = -2i - j + k$ olmak üzere

$$DJQ_{n+r}DJQ_{n-r} - DJQ_n{}^2 = \left[(-2)^{n-r}\left(\frac{1}{9}(JLQ_0 + 5)((-2)^r - JL_{2r}) - 2\xi J_{2r}\right)\right](1 + \varepsilon)$$

ve

$$DJLQ_{n+r}DJLQ_{n-r} - DJLQ_n{}^2 = -9\left[DJQ_{n+r}DJQ_{n-r} - DJQ_n{}^2\right]$$

dır.

İspat.

Dual Jacobsthal kuaterniyonlar için Binet formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned}
&DJQ_{n+r}DJQ_{n-r} - DJQ_n{}^2 \\
&= \left(\frac{\mu'\mu^{n+r} - v'v^{n+r}}{3}\right)\left(\frac{\mu'\mu^{n-r} - v'v^{n-r}}{3}\right) - \left(\frac{\mu'\mu^{n} - v'v^{n}}{3}\right)\left(\frac{\mu'\mu^{n} - v'v^{n}}{3}\right) \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (\mu')^2\mu^{2n} - \mu'v'\mu^{n+r}v^{n-r} - v'\mu'v^{n+r}\mu^{n-r} + (v')^2v^{2n} \\ -(\mu')^2\mu^{2n} + \mu'v'\mu^n v^n + v'\mu'\mu^n v^n - (v')^2 v^{2n} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\left[(-1)\mu^{n-r}v^{n-r}\left(\mu^{2r}\mu'v' + v^{2r}v'\mu'\right) + \mu^n v^n\left(\mu'v' + v'\mu'\right)\right] \\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (-1)(-2)^{n-r}\left(\mu^{2r}(JLQ_0 + 5 + 6\xi) + v^{2r}(JLQ_0 + 5 - 6\xi)\right) \\ +2(-2)^n(JLQ_0 + 5) \end{bmatrix}(1 + \varepsilon)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (-1)(-2)^{n-r}\left((JLQ_0 + 5)(\mu^{2r} + v^{2r}) + 6\xi(\mu^{2r} - v^{2r})\right) \\ +2(-2)^n(JLQ_0 + 5) \end{bmatrix}(1 + \varepsilon)$$

$$= \frac{1}{9}\left[(-1)(-2)^{n-r}\left((JLQ_0 + 5)JL_{2r} + 18\xi J_{2r}\right) + 2(-2)^n(JLQ_0 + 5)\right](1 + \varepsilon)$$

$$= \left[\frac{1}{9}(-2)^n(JLQ_0 + 5)(2 - (-2)^{-r}JL_{2r} - 2\xi J_{2r})\right](1 + \varepsilon)$$

$$= \left[(-2)^{n-r}\left(\frac{1}{9}(JLQ_0 + 5)(2(-2)^r - JL_{2r}) - 2\xi J_{2r}\right)\right](1 + \varepsilon)$$

olur.

Benzer şekilde, dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar için olan Binet formülünden yararlanırsak

$$DJLQ_{n+r}DJLQ_{n-r} - DJLQ_n^2$$
$$= \left(\mu'\mu^{n+r} + v'v^{n+r}\right)\left(\mu'\mu^{n-r} + v'v^{n-r}\right) - \left(\mu'\mu^n + v'v^n\right)\left(\mu'\mu^n + v'v^n\right)$$
$$= \left(\mu'\right)^2\mu^{2n} + \mu'v'\mu^{n+r}v^{n-r} + v'\mu'v^{n+r}\mu^{n-r} + \left(v'\right)^2v^{2n} - \left(\mu'\right)^2\mu^{2n} - \mu'v'\mu^n v^{2n}$$
$$-v'\mu'v^n\mu^n - \left(v'\right)^2v^{2n}$$
$$= \mu^{n-r}v^{n-r}\left(\mu^{2r}\mu'v' + v^{2r}v'\mu'\right) - \mu^n v^n\left(\mu'v' + v'\mu'\right)$$
$$= \begin{bmatrix} (-2)^{n-r}\left(\mu^{2r}(JLQ_0 + 5 + 6\xi) + v^{2r}(JLQ_0 + 5 - 6\xi)\right) \\ -2(-2)^n(JLQ_0 + 5) \end{bmatrix}(1 + \varepsilon)$$
$$= \begin{bmatrix} (-2)^{n-r}\left((JLQ_0 + 5)(\mu^{2r} + v^{2r}) + 6\xi(\mu^{2r} - v^{2r})\right) \\ -2(-2)^n(JLQ_0 + 5) \end{bmatrix}(1 + \varepsilon)$$
$$= \left[(-2)^{n-r}\left((JLQ_0 + 5)JL_{2r} + 18\xi J_{2r}\right) - 2(-2)^n(JLQ_0 + 5)\right](1 + \varepsilon)$$
$$= [(-2)^n(JLQ_0 + 5)((-2)^{-r}JL_{2r} - 2) + (-2)^{n-r}18\xi J_{2r}](1 + \varepsilon)$$
$$= \left[(-2)^{n-r}\left((JLQ_0 + 5)(JL_{2r} - 2(-2)^r) + 18\xi J_{2r}\right)\right](1 + \varepsilon)$$

olup

$$DJLQ_{n+r}DJLQ_{n-r} - DJLQ_n^2 = -9[DJQ_{n+r}DJQ_{n-r} - DJQ_n^2]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Catalan özdeşliğinin $r = 1$ hali Cassini özdeşliği olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.5 Sonuç (Cassini Özdeşlikleri)

$\forall n \in \mathbb{Z}$ ve $\xi = -2i - j + k$ olmak üzere, dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar için Cassini özdeşlikleri sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$$DJQ_{n+1}DJQ_{n-1} - DJQ_n^2 = [(-2)^{n-1}(-(JLQ_0 + 5) - 2\xi)](1 + \varepsilon)$$

ve

$$DJLQ_{n+1}DJLQ_{n-1} - DJLQ_n^2 = [(-2)^{n-1}(9(JLQ_0 + 5) + 18\xi)](1 + \varepsilon)$$

dir.

4.6 Teorem (d'Ocagne Özdeşlikleri)

$\forall n, m \in \mathbb{Z}$ ve $\xi = -2i - j + k$ için

$$DJQ_{m+1}DJQ_n - DJQ_mDJQ_{n+1} = (-2)^m\big((JLQ_0 + 5)J_{n-m} - 2\xi JL_{n-m}\big)(1 + \varepsilon)$$

ve

$$DJLQ_{m+1}DJLQ_n - DJLQ_mDJLQ_{n+1} = (-2)^m[-9(JLQ_0 + 5)J_{n-m} + 18\xi JL_{n-m}](1+\varepsilon)$$

dir.

İspat.

Dual Jacobsthal kuaterniyonların Binet formülünü kullandığımızda

$$\begin{aligned}
&DJQ_{m+1}DJQ_n - DJQ_mDJQ_{n+1}\\
&= \left(\frac{\mu'\mu^{m+1} - v'v^{m+1}}{3}\right)\left(\frac{\mu'\mu^{n} - v'v^{n}}{3}\right) - \left(\frac{\mu'\mu^{m} - v'v^{m}}{3}\right)\left(\frac{\mu'\mu^{n+1} - v'v^{n+1}}{3}\right)\\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (\mu')^2\mu^{m+n+1} - \mu'v'\mu^{m+1}v^n - v'\mu'v^{m+1}\mu^n + (v')^2v^{m+n+1} \\ -(\mu')^2\mu^{m+n+1} + \mu'v'\mu^m v^{n+1} + v'\mu'v^m\mu^{n+1} - (v')^2v^{m+n+1} \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{9}\left[\mu'v'\mu^m v^m(-v^{n-m}\mu + v^{n-m}v) + v'\mu'\mu^m v^m(-v\mu^{n-m} + \mu\mu^{n-m})\right]\\
&= \frac{1}{9}(-2)^m\left[-\mu'v'3v^{n-m} + v'\mu'3\mu^{n-m}\right]\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\left(-\mu'v'v^{n-m} + v'\mu'\mu^{n-m}\right)\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\left((JLQ_0 + 5 - 6\xi)\mu^{n-m} - (JLQ_0 + 5 + 6\xi)v^{n-m}\right)(1+\varepsilon)\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\left((JLQ_0 + 5)(\mu^{n-m} - v^{n-m}) - 6\xi(\mu^{n-m} + v^{n-m})\right)(1+\varepsilon)\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m(3(JLQ_0 + 5)J_{n-m} - 6\xi JL_{n-m})(1+\varepsilon)\\
&= (-2)^m\left((JLQ_0 + 5)J_{n-m} - 2\xi JL_{n-m}\right)(1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremin ikinci kısmının ispatı için dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonun Binet formülünü ele alırsak,

$$DJLQ_{m+1}DJLQ_n - DJLQ_mDJLQ_{n+1}$$
$$= (\mu'\mu^{m+1} + v'v^{m+1})(\mu'\mu^n + v'v^n) - (\mu'\mu^m + v'v^m)(\mu'\mu^{n+1} + v'v^{n+1})$$
$$= (\mu')^2\mu^{m+n+1} + \mu'v'\mu^{m+1}v^n + v'\mu'v^{m+1}\mu + (v')^2v^{m+n+1}$$
$$-(\mu')^2\mu^{m+n+1} - \mu'v'\mu^m v^{n+1} - v'\mu'v^m\mu^{n+1} - (v')^2v^{m+n+1}$$
$$= \mu'v'\mu^m v^m(\mu v^{n-m} - vv^{n-m}) + v'\mu'\mu^m v^m(v\mu^{n-m} - \mu\mu^{n-m})$$
$$= (-2)^m(3\mu'v'v^{n-m} - 3v'\mu'\mu^{n-m})$$
$$= 3(-2)^m(-(JLQ_0 + 5 - 6\xi)\mu^{n-m} + (JLQ_0 + 5 + 6\xi)v^{n-m})(1 + \varepsilon)$$
$$= 3(-2)^m\big(-(JLQ_0 + 5)(\mu^{n-m} - v^{n-m}) + 6\xi(\mu^{n-m} + v^{n-m})\big)(1 + \varepsilon)$$
$$= 3(-2)^m(-3(JLQ_0 + 5)J_{n-m} + 6\xi JL_{n-m})(1 + \varepsilon)$$
$$= (-2)^m(-9(JLQ_0 + 5)J_{n-m} + 18\xi JL_{n-m})(1 + \varepsilon)$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

Dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar için Binet formüllerini, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini verdikten sonra bu kuaterniyonlar için Vajda teoremini verebiliriz.

4.7 Teorem

$\forall n, r, s \in \mathbb{Z}$ ve $\xi = -2i - j + k$ olmak üzere

$$DJQ_{n+r}DJQ_{n+s} - DJQ_nDJQ_{n+r+s} = (-2)^n J_r[(JLQ_0 + 5)J_s - 2\xi JL_s](1 + \varepsilon)$$

ve

$$DJLQ_{n+r}DJLQ_{n+s} - DJLQ_nDJLQ_{n+r+s} = -9(-2)^nJ_r[(JLQ_0+5)J_s - 2\xi JL_s](1+\varepsilon)$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
&DJQ_{n+r}DJQ_{n+s} - DJQ_nDJQ_{n+r+s}\\
&= \frac{1}{9}\left(\left(\mu'\mu^{n+r} - v'v^{n+r}\right)\left(\mu'\mu^{n+s} - v'v^{n+s}\right) - \left(\mu'\mu^n - v'v^n\right)\left(\mu'\mu^{n+r+s} - v'v^{n+r+s}\right)\right)\\
&= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} \left(\mu'\right)^2\mu^{2n+r+s} - \mu'v'\mu^{n+r}v^{n+s} - v'\mu'v^{n+r}\mu^{n+s} + \left(v'\right)^2v^{2n+r+s}\\ -\left(\mu'\right)^2\mu^{2n+r+s} + \mu'v'\mu^nv^{n+r+s} + v'\mu'v^n\mu^{n+r+s} - \left(v'\right)^2v^{2n+r+s}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{9}\left[\mu'v'\mu^nv^n(v^{r+s} - \mu^rv^s) + v'\mu'\mu^nv^n(\mu^{r+s} - v^r\mu^s)\right]\\
&= \frac{(-2)^n}{9}\left[\mu'v'v^s(v^r - \mu^r) + v'\mu'\mu^s(\mu^r - v^r)\right]\\
&= \frac{(-2)^n}{9}\left[(\mu^r - v^r)\left(-\mu'v'v^s + v'\mu'\mu^r\right)\right]\\
&= \frac{(-2)^n}{3}J_r[-(JLQ_0+5+6\xi)v^s + (JLQ_0+5-6\xi)\mu^s](1+\varepsilon)\\
&= \frac{(-2)^n}{3}J_r[(JLQ_0+5)(\mu^s - v^s) - 6\xi(\mu^s + v^s)](1+\varepsilon)\\
&= (-2)^nJ_r[(JLQ_0+5)J_s - 2\xi JL_s](1+\varepsilon)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi benzer işlemleri dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlar için uygulayalım.

$$\begin{aligned}
&DJLQ_{n+r}DJLQ_{n+s} - DJLQ_nDJLQ_{n+r+s}\\
&= \left(\mu'\mu^{n+r} + v'v^{n+r}\right)\left(\mu'\mu^{n+s} + v'v^{n+s}\right) - \left(\mu'\mu^n - v'v^n\right)\left(\mu'\mu^{n+r+s} + v'v^{n+r+s}\right)
\end{aligned}$$

$$= (\mu')^2 \mu^{2n+r+s} + \mu' v' \mu^{n+r} v^{n+s} + v' \mu' v^{n+r} \mu^{n+s} + (v')^2 v^{2n+r+s}$$
$$-(\mu')^2 \mu^{2n+r+s} - \mu' v' \mu^n v^{n+r+s} - v' \mu' v^n \mu^{n+r+s} - (v')^2 v^{2n+r+s}$$
$$= \mu' v' \mu^n v^n (\mu^r v^s - v^{r+s}) + v' \mu' \mu^n v^n (v^r \mu^s - \mu^{r+s})$$
$$= (-2)^n \left[\mu' v' v^s (\mu^r - v^r) + v' \mu' \mu^s (v^r - \mu^s)\right]$$
$$= 3(-2)^n J_r[(JLQ_0 + 5 + 6\xi) v^s - (JLQ_0 + 5 - 6\xi)\mu^s](1 + \varepsilon)$$
$$= -3(-2)^n J_r[(JLQ_0 + 5)(\mu^s - v^s) - 6\xi(\mu^s + v^s)](1 + \varepsilon)$$
$$= -3(-2)^n J_r[3(JLQ_0 + 5) J_s - 6\xi JL_s](1 + \varepsilon)$$
$$= -9(-2)^n J_r[(JLQ_0 + 5) J_s - 2\xi JL_s](1 + \varepsilon)$$

olarak elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

5. DUAL JACOBSTHAL VE DUAL JACOBSTHAL-LUCAS KUATERNİYONLAR İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarla ilgili bazı özdeşlikleri ispatları ile birlikte verelim. Bu özdeşliklerin ispatlarında, dual Jacobsthal ve dual Jacobsthal-Lucas kuaterniyonların Binet formüllerinden ve Lemma 4.3 deki özdeşliklerden yararlanacağız.

1)$DJQ_{n+r}DJLQ_{n+s} - DJQ_{n+s}DJLQ_{n+r} = (-2)^{n+r+1}\big((JLQ_0 + 5)J_{s-r}\big)(1 + \varepsilon).$

İspat.

$$\begin{aligned}
&DJQ_{n+r}DJLQ_{n+s} - DJQ_{n+s}DJLQ_{n+r} \\
&= \frac{1}{3}\left(\mu'\mu^{n+r} - v'v^{n+r}\right)\left(\mu'\mu^{n+s} + v'v^{n+s}\right) - \frac{1}{3}\left(\mu'\mu^{n+s} - v'v^{n+s}\right)\left(\mu'\mu^{n+r} + v'v^{n+r}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(\mu'\right)^2\mu^{2n+r+s} + \mu'v'\mu^{n+r}v^{n+s} - v'\mu'v^{n+r}\mu^{n+s} - \left(v'\right)^2 v^{2n+r+s}\right) \\
&- \frac{1}{3}\left(\left(\mu'\right)^2\mu^{2n+r+s} + \mu'v'\mu^{n+s}v^{n+r} - v'\mu'v^{n+s}\mu^{n+r} - \left(v'\right)^2 v^{2n+r+s}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\mu'v'(\mu^{n+r}v^{n+s} - \mu^{n+s}v^{n+r}) - v'\mu'(\mu^{n+s}v^{n+r} - v^{n+s}\mu^{n+r})\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\mu'v'\mu^{n+r}v^{n+r}(v^{s-r} - \mu^{s-r}) - v'\mu'\mu^{n+r}v^{n+r}(\mu^{s-r} - v^{s-r})\right) \\
&= \frac{1}{3}(-2)^{n+r}\left(-(\mu^{s-r} - v^{s-r})\left(\mu'v' + v'\mu'\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}(-2)^{n+r}\left(-2(JLQ_0 + 5)(\mu^{s-r} - v^{s-r})\right)(1 + \varepsilon) \\
&= (-2)^{n+r+1}\left((JLQ_0 + 5)J_{s-r}\right)(1 + \varepsilon).
\end{aligned}$$

2)$DJLQ_mDJQ_n - DJLQ_nDJQ_m = 2(-2)^m\big((JLQ_0+5)J_{n-m}\big)(1+\varepsilon).$

İspat.

$$
\begin{aligned}
&DJLQ_mDJQ_n - DJLQ_nDJQ_m\\
&= \frac{1}{3}\Big(\big(\mu^{'}\mu^m + v^{'}v^m\big)\big(\mu^{'}\mu^n - v^{'}v^n\big) - \big(\mu^{'}\mu^n + v^{'}v^n\big)\big(\mu^{'}\mu^m - v^{'}v^m\big)\Big)\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \big(\mu^{'}\big)^2\mu^{m+n} - \mu^{'}v^{'}\mu^m v^n + v^{'}\mu^{'}\mu^n v^m - \big(v^{'}\big)^2 v^{m+n}\\ -\big(\mu^{'}\big)^2\mu^{m+n} + \mu^{'}v^{'}\mu^n v^m - v^{'}\mu^{'}\mu^m v^n + \big(v^{'}\big)^2 v^{m+n}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\big(v^{'}\mu^{'}\mu^{n-m} - \mu^{'}v^{'}v^{n-m} + \mu^{'}v^{'}\mu^{n-m} - v^{'}\mu^{'}v^{n-m}\big)\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\Big(\mu^{'}v^{'}(\mu^{n-m} - v^{n-m}) + v^{'}\mu^{'}(\mu^{n-m} - v^{n-m})\Big)\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\Big((\mu^{n-m} - v^{n-m})\big(\mu^{'}v^{'} + v^{'}\mu^{'}\big)\Big)\\
&= \frac{1}{3}(-2)^m\big(3J_{n-m}2(JLQ_0+5)\big)(1+\varepsilon)\\
&= 2(-2)^m\big((JLQ_0+5)J_{n-m}\big)(1+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

3)$DJLQ_mDJQ_n - DJQ_mDJLQ_n = (-2)^{m+1}(-(JLQ_0+5)J_{n-m} + 2\xi JL_{n-m})(1+\varepsilon).$

İspat.

$$
\begin{aligned}
&DJLQ_mDJQ_n - DJQ_mDJLQ_n\\
&= \frac{1}{3}\Big(\big(\mu^{'}\mu^m + v^{'}v^m\big)\big(\mu^{'}\mu^n - v^{'}v^n\big) - \big(\mu^{'}\mu^m - v^{'}v^m\big)\big(\mu^{'}\mu^n + v^{'}v^n\big)\Big)\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \big(\mu^{'}\big)^2\mu^{m+n} - \mu^{'}v^{'}\mu^m v^n + v^{'}\mu^{'}\mu^n v^m - \big(v^{'}\big)^2 v^{m+n}\\ -\big(\mu^{'}\big)^2\mu^{m+n} - \mu^{'}v^{'}\mu^m v^n + v^{'}\mu^{'}\mu^n v^m + \big(v^{'}\big)^2 v^{m+n}\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}(-2)\Big(\mu^{'}v^{'}(\mu^m v^n) - v^{'}\mu^{'}(\mu^n v^m)\Big)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{3}(-2)(-2)^m\left(\mu^{'}v^{'}(v^{n-m}) - v^{'}\mu^{'}(\mu^{n-m})\right)$$
$$= \frac{1}{3}(-2)^{m+1}\left((JLQ_0 + 5 + 6\xi)v^{n-m} - (JLQ_0 + 5 - 6\xi)\mu^{n-m}\right)(1+\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{3}(-2)^{m+1}\left((JLQ_0 + 5)(v^{n-m} - \mu^{n-m}) + 6\xi(\mu^{n-m} + v^{n-m})\right)(1+\varepsilon)$$
$$= (-2)^{m+1}(-(JLQ_0 + 5)J_{n-m} + 2\xi JL_{n-m})(1+\varepsilon).$$

4) $DJQ_nDJQ_m - DJQ_mDJQ_n = (-2)^{m+1}(2\xi J_{n-m})(1+\varepsilon)$.

İspat.

$$DJQ_nDJQ_m - DJQ_mDJQ_n$$
$$= \frac{1}{9}\left((\mu^{'}\mu^n - v^{'}v^n)(\mu^{'}\mu^m - v^{'}v^m) - (\mu^{'}\mu^m - v^{'}v^m)(\mu^{'}\mu^n - v^{'}v^n)\right)$$
$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (\mu^{'})^2\mu^{m+n} - \mu^{'}v^{'}\mu^n v^m - v^{'}\mu^{'}\mu^m v^n + (v^{'})^2 v^{m+n} \\ -(\mu^{'})^2\mu^{m+n} + \mu^{'}v^{'}\mu^m v^n + v^{'}\mu^{'}\mu^n v^m - (v^{'})^2 v^{m+n} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\mu^{'}v^{'}\mu^m v^m(\mu^{n-m} - v^{n-m}) + v^{'}\mu^{'}\mu^m v^m(\mu^{n-m} - v^{n-m})\right)$$
$$= \frac{(-2)^m}{9}\left((\mu^{n-m} - v^{n-m})(v^{'}\mu^{'} - \mu^{'}v^{'})\right)$$
$$= \frac{(-2)^m}{9}\left(3J_{n-m}(JLQ_0 + 5 - 6\xi - JLQ_0 - 5 - 6\xi)\right)(1+\varepsilon)$$
$$= \frac{(-2)^m}{3}(-2.6\xi J_{n-m})(1+\varepsilon)$$
$$= (-2)^{m+1}(2\xi J_{n-m})(1+\varepsilon).$$

5) $DJLQ_n DJLQ_m - DJLQ_m DJLQ_n = 36(-2)^m \xi J_{n-m}(1+\varepsilon)$.

İspat.

$DJLQ_n DJLQ_m - DJLQ_m DJLQ_n$

$= (\mu^{'}\mu^n + v^{'}v^n)(\mu^{'}\mu^m + v^{'}v^m) - (\mu^{'}\mu^m + v^{'}v^m)(\mu^{'}\mu^n + v^{'}v^n)$

$= (\mu^{'})^2\mu^{m+n} + \mu^{'}v^{'}\mu^n v^m + v^{'}\mu^{'}\mu^m v^n + (v^{'})^2 v^{m+n} - (\mu^{'})^2\mu^{m+n} - \mu^{'}v^{'}\mu^m v^n$

$-v^{'}\mu^{'}\mu^n v^m - (v^{'})^2 v^{m+n}$

$= \mu^{'}v^{'}\mu^m v^m(\mu^{n-m} - v^{n-m}) + v^{'}\mu^{'}\mu^m v^m(v^{n-m} - \mu^{n-m})$

$= (-2)^m(\mu^{n-m} - v^{n-m})(\mu^{'}v^{'} - v^{'}\mu^{'})$

$= (-2)^m 3J_{n-m}(JLQ_0 + 5 + 6\xi - JLQ_0 - 5 + 6\xi)(1+\varepsilon)$

$= (-2)^m 3J_{n-m}12\xi(1+\varepsilon)$

$= 36(-2)^m \xi J_{n-m}(1+\varepsilon)$.

KAYNAKLAR

Çimen, C.B., & İpek, A. (2016). On Pell Quaternions and Pell-Lucas Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26, 39-51.

Halici, S. (2013). On Complex Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 23, 105-112.

Halici, S. (2012). On Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22, 321-327.

Horadam, A.F. (1963). Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions. *Am. Math. Month.*, 70, 289-291.

Horadam, A.F. (1988). Jacobsthal Representation Numbers. *Fibonacci Quarterly*, 34, 40-54.

Horadam, A.F. (1993). Quaternion Recurrence Relations. *Ulam Quarterly*, 2, 23-33.

Iyer, M.R. (1969). A Note On Fibonacci Quaternions. *Fibonacci Quarterly*, 3, 225-229.

Nurkan, S.K., & Güven, İ.A. (2015). Dual Fibonacci Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25(2), 403-414.

Szynal-Liana, A., & Wloch, I. (2016). The Pell Quaternions and The Pell Octonions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26, 435-440.

Ward, J.P. (1977). Quaternions and Cayley Numbers : Algebra and Applications. *Kluwer Academic Publishers*, London, 136-157.

Szynal-Liana, A., & Wloch, I. (2016). A Note On Jacobsthal Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 26, 441-447.

Hacısalihoğlu, H.H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. *Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları*, Ankara, 2-8.

Tokeşer, Ü., Ünal, Z., & Bilgici, G. (2017). Split Pell and Pell-Lucas Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 27, 1881-1893.

Tokeşer, Ü., Mert, T., Ünal, Z., & Bilgici, G. (2020). Some Special Identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Generalized Octonions. *Caspian Journal of Mathematics Sciences*, Accepted.