T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

ÜMİT GEYİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DR. ÖĞR. ÜYESİ SİBEL DEMİRALP

HAZİRAN - 2022
KASTAMONU

TEZ ONAYI

Ümit GEYİK tarafından hazırlanan "**NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR ÜZERİNE**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **28.06.2022** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Sibel DEMİRALP Kastamonu Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Erdal GÜNER Ankara Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Enstitü Müdürü V.	Prof. Dr. İzzet ŞENER	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Ümit GEYİK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR ÜZERİNE

ÜMİT GEYİK

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN:DR. ÖĞR. ÜYESİ SİBEL DEMİRALP

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm girişe ayrılmıştır. İkinci bölümde, klasik mantıkta metrik uzaylar ve genelleştirilmiş metrik uzaylar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde neutrosophic üçlü kümeler çalışılmış ve örneklerle detaylı analiz yapılmıştır. Son bölümde ise neutrosophic üçlü metrik, neutrosophic üçlü b-metrik, neutrosophic üçlü kısmi metrik, neutrosophic üçlü kısmi b-metrik, neutrosophic üçlü G-metrik, neutrosophic üçlü kısmi G-metrik ve neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaylar ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş, örneklerle analiz edilmiştir

ANAHTAR KELİMELER: Neutrosophic üçlü küme, neutrosophic üçlü metrik, neutrosophic üçlü b-metrik, neutrosophic üçlü kısmi metrik, neutrosophic üçlü kısmi b-metrik, neutrosophic üçlü G-metrik, neutrosophic üçlü kısmi G-metrik, neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik

Haziran 2022, 63 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

ON NEUTROSOPHIC TRIPLET GENERALIZED METRIC SPACES

ÜMİT GEYİK

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR:ASSIST PROF. DR. SİBEL DEMİRALP

This thesis consists of four parts. The first section is reserved for introduction. In the second chapter, basic definitions and theorems about metric and generalized metric spaces in classical logic are given. In the third chapter, neutrosophic triplet are studied and detailed analysis is made with examples. In the last section, definitions and theorems related to neutrosophic triplet metric, neutrosophic triplet b-metric, neutrosophic triplet partial metric, neutrosophic triplet partial b-metric, neutrosophic triplet G-metric, neutrosophic triplet partial G-metric and neutrosophic triplet v-generalized metric spaces are given and analyzed with examples.

KEYWORDS: Neutrosophic triplet set, neutrosophic triplet metric, neutrosophic triplet b-metric, neutrophic triplet partial metric, neutrosophic triplet partial b-metric, neutrosophic triplet G-metric, neutrosophic triplet partial G-metric, and neutrosophic triplet v-generalized metric.

June 2022, 63 Page

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Kastamonu Üniversitesi öğretim üyesi, danışman hocam, Dr. Öğr. Üyesi Sibel DEMİRALP'e minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni destekleyen ve güvenen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ÜMİT GEYİK

Kastamonu, 2022

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$\times$	: Kartezyen çarpım
$\cup$	: Birleşim işlemi
$\cap$	: Kesişim işlemi
d(x,y)	: x ve y arasındaki öklidyen uzaklık
$\mathbf{p_b}$	: b-metrik
$\mathbf{d_p}$	: Kısmi metrik
$\mathbf{d_{pb}}$	: Kısmi b-metrik
$(\mathbf{X}, \mathbf{d_p})$	: Kısmi metrik uzay
(X,*)	: Neutrosophic üçlü küme
etkisiz(x)	: x in birim elemanı
ters(x)	: x in ters elemanı
$((\mathcal{N},*),d)$	: Neutrosophic üçlü metrik uzay
$((\mathcal{N},*), \mathbf{d_{pb}})$	: Neutrosophic üçlü kısmi b-metrik
((X,*),G)	: Neutrosophic üçlü G-metrik uzay
$\mathbf{p_{\mathcal{N}G}}$	: Neutrosophic üçlü kısmi G-metrik
$((\mathbf{X},*), \mathbf{p_{\mathcal{N}G}})$	: Neutrosophic üçlü kısmi G-metrik uzay
$((\mathcal{F},\cup), d_v)$	: V-genelleştirilmiş üçlü metrik uzay

1. GİRİŞ

Günlük hayatımızda birçok belirsizlik vardır. Klasik yöntemlerin açıklamakta yetersiz kaldığı bu belirsizlikleri gidermek için bazı yöntemler üzerinde çalışılmıştır. Söz konusu yöntemlerden biri, 1965 yılında Zadeh tarafından tanımlanan bulanık küme teorisidir (Zadeh, 1965). Bulanık küme teorisi, klasik küme teorisinin bir genelleştirilmiş halidir. Klasik küme teorisinde, bir eleman kümeye ait ya da değilken, bulanık küme teorisinde, bir eleman kümenin belli bir derecede (biraz, çok, oldukça gibi) elemanıdır veya değildir. Bulanık kümeler kesinlik içermeyen ifadeleri, algıları, değerlendirmeleri ve ölçümleri matematiksel ifadelere dönüştürmeye yarayan bir yaklaşımdır. Bulanık küme teorisi, belirlilik adına yapılan varsayımlarla fazlaca basitleştirilen ve sanal bir ortamda yaşatılan modellerin geliştirilmesi ve gerçek dünyanın karmaşık sistemlerinin çözümlenmesi için ortaya atılmıştır.

Gerçek hayatta bazı kelimerin anlamı; karmaşıklık, sübjektiflik veya belirsizlik gösterebildiği için dilsel bir değişkenin bulanık kümelere dayanarak tanımlanması gerekir. Sözel değişkenler, net olarak ifade edilemeyen kavramların yaklaşık olarak nitelenebilmesini sağlar. Böylece sözel değişkenler, sözel ifadeleri matemetiksel olarak ifade edebilmek için bulanık kümelerin kullanımını gerektiren bir araç haline gelir (Özkan, M.M., 2003). Zadeh, bulanık küme kavramını, bir küme içerisinde şekil vererek reel bir doğru üzerinde aralıklar olarak tanımlamıştır. Bulanık kümeler, üyelik için yeteri kadar kriterlerin olmadığı, yetersiz tanımlanmış nesneler kümesidir. Bulanık kümeler, matematiğin sınırlı belirli dünyasından derecelendirme mekanizması ile belirsizlik dünyasına doğru bir genişlemedir.

Belirsizliklerin belirlenmesinde, bulanık küme teorisi kullanılmasına rağmen, birçok uygulamanın, sadece belirsizlik işlevine sahip olduğu belirlenmiş ancak bu belirsizlikler açıklanamamıştır. Daha sonraları bu belirsizliklerin üstesinden gelmek için Atanassov tarafından ‘Sezgisel Bulanık Kümeler’ teorisi tanımlanmıştır (Atanassov, 1986). Bu teoride, doğruluk ve yanlışlık durumları incelenmiştir. Son olarak neutrosophic küme teorisi Smarandache tarafından tanıtılmıştır (Smarandache, 1998). Bu teoride ise doğruluk, yanlışlık ve belirsizlik durumları, birbirinden bağımsız incelenmiştir. Kandasamy ve Smarandache bazı neutrosophic cebirsel yapıları tanıtmıştır (Kandasamy, 2004). Smarandache ve Ali madde plazma, madde olmayan plazma ve antimadde plazmasının uzantısı olarak neutrosophic üçlü yapıları tanıtmıştır (Smarandache ve Ali, 2016). Smarandache ve Ali ikili bir işlemle ilgili olarak belirli aksiyomları karşılayan üç öğenin bir koleksiyonu olan neutrosophic üçlü kavramını ilk kez tanıtmıştır (Smarandache ve Ali, 2014). Smarandache ve Ali neutrosophic üçlü kümeler ve neutrosophic üçlü grupları elde etmiştir (Smarandache ve Ali, 2018).

Bu tezde metrik, b-metrik, kısmi metrik, kısmi b-metrik, G-metrik, v-genelleştirilmiş metrik uzayları ile ilgili tanımlara ve örneklere yer verilmiştir. Daha sonra neutrosophic üçlü küme ile ilgili bazı temel tanımlar ve örnekler üzerinde çalışılmıştır. Son bölümde ise neutrosophic üçlü metrik, neutrosophic üçlü b-metrik, neutrosophic üçlü kısmi metrik, neutrosophic üçlü kısmi b-metrik, neutrosophic üçlü G-metrik, neutrosophic üçlü kısmi G-metrik ve neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik ve uzayları ile ilgili tanımlar ve örnekler incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde klasik küme teorisindeki metrik ve genelleştirilmiş metrik kavramları incelenmiş, bazı temel özellikleri verilmiştir.

2.1 Metrik Uzaylar

Bu bölümde metrik ve metrik uzaylar ile ilgili temel bilgiler ve örnekler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ küme olmak üzere $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlanan

$$\mathrm{p}: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, p ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir metrik denir:

Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{F}$ için

m1) $\mathrm{p}(\zeta, \mathcal{E}) \geq 0$

m2) $\mathrm{p}(\zeta, \mathcal{E}) = 0 \Leftrightarrow \zeta = \mathcal{E}$

m3) $\mathrm{p}(\zeta, \mathcal{E}) = \mathrm{p}(\mathcal{E}, \zeta)$

m4) $\mathrm{p}(\zeta, \sigma) \leq \mathrm{p}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{p}(\mathcal{E}, \sigma)$

Eğer p fonksiyonu $\mathcal{F}$ üzerinde bir metrik ise $(\mathcal{F}, \mathrm{p})$ çiftine bir metrik uzay denir (Soykan, 2012).

Örnek 2.1.2 Her $\mathrm{u}, \mathrm{w} \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{p}(\mathrm{u}, \mathrm{w}) = \frac{2|\mathrm{u} - \mathrm{w}|}{\sqrt{1 + \mathrm{u}^2}\sqrt{1 + \mathrm{w}^2}}$$

şeklinde tanımlı $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. p nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim. m_1, m_2 ve m_3 açıktır (Soykan, 2012).

m_4) Her $s, t \in \mathbb{R}$ için $2st \leq s^2 + t^2$ dir. Böylece

$$(1 + st)^2 = 1 + s^2t^2 + 2st \leq 1 + s^2t^2 + s^2 + t^2 = (1 + s^2)(1 + t^2) \tag{2.1}$$

olur. Ayrıca her $u, w, z \in \mathbb{R}$

$$(u - w)(1 + z^2) = (u - z)(1 + zw) + (z - w)(1 + zu) \tag{2.2}$$

sağlanır. Dolayısıyla (2.1) ve (2.2) den

$$\begin{aligned} |u - w|(1 + z^2) &\leq |u - z||1 + zw| + |z - w||1 + zu| \\ &\leq |u - z|\sqrt{1 + z^2}\sqrt{1 + w^2} + |z - w|\sqrt{1 + z^2}\sqrt{1 + u^2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir.

(2.3) in her iki yanını $\frac{2}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+w^2}\sqrt{1+z^2}}$ ile çarparsak

$$\frac{2|u - w|}{\sqrt{1 + u^2}\sqrt{1 + w^2}} \leq \frac{2|u - z|}{\sqrt{1 + u^2}\sqrt{1 + z^2}} + \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + z^2}\sqrt{1 + w^2}}$$

olup

$$p(u, w) \leq p(u, z) + p(z, w)$$

sağlanır.

Örnek 2.1.3 $(\mathcal{F}, p)$ bir metrik uzay olmak üzere, her $u, w \in \mathcal{F}$ için

$$e(u, w) = \frac{p(u, w)}{1 + p(u, w)}$$

şeklinde tanımlanan $e:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. e nin m_1, m_2 ve m_3 şartlarını sağladığı açıktır.

m_4) Her $u,w,z\in\mathcal{F}$ için

$$e(u,w)=\frac{p(u,w)}{1+p(u,w)}$$

$$=1-\frac{1}{1+p(u,w)}$$

$$\leq 1-\frac{1}{1+p(u,z)+p(z,w)}$$

$$=\frac{p(u,z)+p(z,w)}{1+p(u,z)+p(z,w)}$$

$$=\frac{p(u,z)}{1+p(u,z)+p(z,w)}+\frac{p(z,w)}{1+p(u,z)+p(z,w)}$$

$$\leq\frac{p(u,z)}{1+p(u,z)}+\frac{p(z,w)}{1+p(z,w)}$$

$$=e(u,z)+e(z,w)$$

olur. Böylece e fonksiyonu bir metriktir.

Örnek 2.1.4 Her $u,v\in\mathbb{R}$ için

$$e(u,v)=|u^2-v^2|$$

şeklinde tanımlı $e:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ fonksiyonu verilsin. e nin m_1, m_2 ve m_3 şartlarını sağladığı açıktır.

m_4) Her $u,v,z\in\mathbb{N}$ için

$$e(u,v) = |u^2 - v^2| = |u^2 - z^2 + z^2 - v^2|$$

$$\leq |u^2 - z^2| + |z^2 - v^2| = e(u,z) + e(z,v)$$

olur. Böylece e fonksiyonu bir metriktir (Soykan, 2012).

Tanım 2.1.5 $(\mathcal{F}, p)$ metrik uzayında bir $\{u_n\}$ dizisi ve $u \in \mathcal{F}$ verilsin. $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > N$ için $p(u_n, u) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $\{u_n\}$ dizisine limiti u olan yakınsak dizi denir ve $\lim_{n\to\infty} p(u_n, u) = 0$ yazılır (Soykan, 2012).

Teorem 2.1.6 $\{u_n\}$, bir $(\mathcal{F}, p)$ metrik uzayında yakınsak dizi olsun. Bu durumda

i) $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ tektir.

ii) $\{u_n\}$ nin herhangi bir alt dizisi de u ya yakınsar.

iii) $\{u_n\}$ sınırlıdır.

Tanım 2.1.7 $(\mathcal{F}, p)$ bir metrik uzay olmak üzere $\{u_k\}$, $\mathcal{F}$ uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $p(u_n, u_m) < \epsilon$ olacak şekilde n_0 doğal sayısı mevcutsa $\{u_k\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise uzaya tam uzay denir.

2.2 b-Metrik Uzay

Tanım 2.2.1 $\mathcal{F} \neq \phi$ olmak üzere $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlanan

$$p_b : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa, p_b ye bir b - metrik denir:

Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{F}$ için,

bm1) $p_b(\zeta, \mathcal{E}) \geq 0$

bm2) $p_b(\zeta, \mathcal{E}) = 0 \Leftrightarrow \zeta = \mathcal{E}$

bm3) $p_b(\zeta, \mathcal{E}) = p_b(\mathcal{E}, \zeta)$

bm4) $p_b(\zeta, \mathcal{E}) \leq k[p_b(\zeta, \sigma) + p_b(\sigma, \mathcal{E})]$ olacak biçimde bir $k \geq 1$ reel sayısı vardır.

Eğer p_b, $\mathcal{F}$ üzerinde bir b-metrik ise $(\mathcal{F}, p_b)$ ye bir b-metrik uzay denir (Czerwik, 1993).

Örnek 2.2.2 $\mathcal{F} = \{\zeta, \mathcal{E}, \sigma\}$ kümesi üzerinde $p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$p(\zeta, \mathcal{E}) = p(\mathcal{E}, \zeta) = 1$$

$$p(\zeta, \sigma) = p(\sigma, \mathcal{E}) = 19$$

$$p(\mathcal{E}, \sigma) = p(\sigma, \mathcal{E}) = 40$$

$$p(\zeta, \zeta) = p(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = p(\sigma, \sigma) = 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda bm_1, bm_2 ve bm_3 açıktır. bm_4 şartını inceleyelim:

$$p(\mathcal{E}, \sigma) \geq p(\mathcal{E}, \zeta) + p(\zeta, \sigma)$$

$$p(\sigma, \mathcal{E}) \geq p(\sigma, \zeta) + p(\zeta, \mathcal{E})$$

olur. $k \geq 2$ alırsak, bm_4 şartı her eleman için sağlanır. Böylece p fonksiyonu k katsayısı ile bir b-metriktir.

Örnek 2.2.3 $\mathcal{F} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5\}$ kümesi üzerinde $p(\zeta_1, \zeta_2) = k \geq 2$,

$$p(\zeta_1, \zeta_3) = p(\zeta_1, \zeta_4) = p(\zeta_1, \zeta_5) = p(\zeta_2, \zeta_3) = p(\zeta_2, \zeta_4)$$

$$= p(\zeta_2, \zeta_5) = p(\zeta_3, \zeta_4),\ p(\zeta_3, \zeta_5) = p(\zeta_4, \zeta_5) = 1$$

ve $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere

$p(\zeta_i, \zeta_j) = p(\zeta_j, \zeta_i)$

$p(\zeta_i, \zeta_i) = 0$ şeklinde tanımlı $p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda

$i, j, n = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$p(\zeta_i, \zeta_j) \leq \frac{k}{2}[\, d(\zeta_i, \zeta_n) + d(\zeta_n, \zeta_j)\,]$$

eşitliği sağlanır. Böylece $(\mathcal{F}, p)$ bir b-metriktir (Czerwik, 1993).

Her metrik bir b-metriktir ancak her b-metrik bir metrik değildir. Örnek 2.2.2 te

$k > 2$ seçilirse, klasik metrik için üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı görülür.

Örnek 2.2.4 $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ olmak üzere $p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $u, v \in \mathcal{F}$ için

$$p(u, v) = (u - v)^2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda p klasik anlamda bir metrik olmamasına rağmen bir b-metriktir.

Örnek 2.2.5 $\ell_p (0 < p < 1)$ olmak üzere $\ell_p = \{(u_n) \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p < \infty\}$ uzayı verilsin. $u = (u_n)$ ve $w = (w_n)$, ℓ_p uzayında iki dizi olmak üzere

$d: \ell_p \times \ell_p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(u, w) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$d(u, z) \leq 2^{\frac{1}{p}}[d(u, w) + d(w, z)]$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla d fonksiyonu ℓ_p üzerinde bir b-metriktir (Boriceanu, 2009).

Tanım 2.2.6 $(\mathcal{F}, p)$ bir b-metrik uzay ve $\{u_n\}_{n\in N}$, $\mathcal{F}$ de bir dizi olsun.

i) Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $p(u_n, u) < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ varsa $\{u_n\}_{n\in N}$ dizisi $u \in \mathcal{F}$ noktasına b-yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} p(u_n, u) = 0$ veya $p(u_n, u) \to 0$ ile gösterilir**.**

ii) Her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m \geq n_0$ için $p(u_n, u_m) < \epsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in N$ varsa $\{u_n\}$ dizisine $\mathcal{F}$ de bir Cauchy dizisi denir.

iii) $(\mathcal{F}, p)$ uzayında her b-Cauchy dizisi b- yakınsak ise bu uzaya bir tam b-metrik uzay denir (Boriceanu, 2010).

Teorem 2.2.7 $(\mathcal{F}, p)$ bir b-metrik uzay olsun. Bu durumda

i) Yakınsak bir dizinin limiti tektir.

ii) Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

2.3 Kısmi Metrik Uzay

Tanım 2.3.1 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlanan

$$p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, p ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir kısmi metrik denir.

Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{F}$ olmak üzere,

i) $p(\zeta, \mathcal{E}) \geq 0$

ii) $p(\zeta, \mathcal{E}) = p(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = p(\zeta, \zeta) \Leftrightarrow \zeta = \mathcal{E}$

iii) $p(\zeta, \mathcal{E}) = p(\mathcal{E}, \zeta)$

iv) $p(\zeta, \mathcal{E}) \leq p(\zeta, \sigma) + p(\sigma, \mathcal{E}) - p(\sigma, \sigma)$.

(Matthews (1992).

Örnek 2.3.2 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$ için $p(u, v) = e^{\text{maks}\{u,v\}}$ şeklinde tanımlı $p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir kısmi metriktir (Chandoky vd. 2015).

Örnek 2.3.3 $I = \{[a, b]: a, b\ \in \mathbb{R}, a \leq b\ \}$ olmak üzere her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için

$p: I \times I \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$p([a, b], [c, d]) = \text{maks}\ \{b, d\} - \min\ \{a, c\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda p fonksiyonu I üzerinde bir kısmi metriktir (Chandoky vd. 2015).

Tanım 2.3.4 $(\mathcal{F}, p)$ bir kısmi metrik uzay ve $\{u_n\}$, $\mathcal{F}$ de bir dizi olsun. Bu durumda

i) $u \in \mathcal{F}$ olmak üzere eğer $p(u, u) = \lim_{n\to+\infty} p(u, u_n)$ ise $\{u_n\}$ dizisi u ya kısmi yakınsaktır denir ve $u_n \to u$ şeklinde gösterilir.

ii) Eğer $\lim_{n,m\to+\infty} p(u_n, u_m)$ mevcut ve sonlu ise $\{u_n\}$ dizisine kısmi Cauchy dizisi denir.

iii) Her $\{u_n\}$ kısmi Cauchy dizisi kısmi yakınsak ise $(\mathcal{F}, p)$ uzayına kısmi tam uzay denir.

(Matthews, 1992).

2.4 Kısmi b-Metrik Uzay

Tanım 2.4.1 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olmak üzere $\mathcal{F}$ üzerinde tanımlanan

$$b : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa b ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir kısmi b-metrik denir.

Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{F}$ için,

$(\mathbf{kb_1})$ $\quad \zeta = \mathcal{E} \Leftrightarrow b(\zeta, \zeta) = b(\zeta, \mathcal{E}) = b(\mathcal{E}, \mathcal{E})$

$(\mathbf{kb_2})$ $\quad b(\zeta,\zeta) \leq b(\zeta,\mathcal{E})$

$(\mathbf{kb_3})$ $\quad b(\zeta,\mathcal{E}) = b(\mathcal{E},\zeta)$

$(\mathbf{kb_4})$ En az bir $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 1$ için

$$b(\zeta,\mathcal{E}) \leq s(b(\zeta,\sigma) + b(\sigma,\mathcal{E})) - b(\sigma,\sigma)$$

şartları sağlanıyorsa b ye $\mathcal{F}$ üzerinde bir kısmi b-metrik denir (Shukla, 2014).

Uyarı 2.4.2 $(\mathcal{F}, b)$ bir kısmi b-metrik uzay olsun. $u, v \in \mathcal{F}$ için $b(u,v) = 0$ ise

$u = v$ dir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Shukla, 2014).

Uyarı 2.4.3 Her b- metrik bir kısmi b-metriktir. Fakat tersi doğru değildir (Shukla, 2014).

Örnek 2.4.4 $\mathcal{F} = \mathbb{R}^+$ ve $p > 1$ olmak üzere $s = 2^p > 1$ olsun. Her $u, v \in \mathcal{F}$ için $b: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$b(u,v) = [\text{maks}\,\{u,v\}]^p + |u-v|^p$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda b fonksiyonu $\mathcal{F}$ üzerinde bir kısmi b- metriktir.

$(\mathbf{kb_1})$ Tanımdan açıktır.

$(\mathbf{kb_2})$ Her $u, v \in \mathcal{F}$ için

$$[\text{maks}\,\{u,v\}]^p + |u-v|^p = b(u,v)$$

dir.

$(\mathbf{kb_3})$ Her $u, v \in \mathcal{F}$ için

$$b(u,v) = [\text{maks}\,\{u,v\}]^p + |u-v|^p = [\text{maks}\,\{v,u\}]^p + |v-u|^p = b(v,u)$$

dir.

(kb_4) Her $u, v \in \mathcal{F}$ için

$$(\text{maks}\,\{u, v\})^p \leq (\text{maks}\,\{u, z\})^p + (\text{maks}\,\{z, v\})^p$$

ve

$$|u - v|^p \leq 2^p(|u - z|^p + |z - v|^p)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} b(u, v) &= (\text{maks}\,\{u, v\})^p + |u - v|^p \\ &\leq (\text{maks}\,\{u, z\})^p + (\text{maks}\,\{z, v\})^p + 2^p(|u - z|^p + |z - v|^p) \\ &\leq 2^p((\text{maks}\,\{u, z\})^p + (\text{maks}\,\{z, v\})^p + |u - z|^p + |z - v|^p) - z^p \\ &= b(u, z) + b(z, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(\mathcal{F}, b)$ bir kısmi b-metrik uzaydır. Fakat $b(u, u) = u^p \neq 0$ olduğundan bir b-metrik uzay değildir (Shukla, 2014).

Örnek 2.4.5 $\mathcal{F} = \mathbb{R}^+$ ve $k > 1$ için $p_b: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$u \vee v = \text{maks}\{u, v\}$$

olmak üzere

$$p_b(u, v) = \left\{(u \vee v)^k + |u - v|^k\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $b = 2^k$ ise p_b bir kısmi b-metriktir.

$u = v$ için , $p_b(u, u) = u^k \neq 0$ olduğundan p_b bir b- metrik değildir.

Ayrıca $u > z > v$ olmak üzere $u, v, z \in \mathcal{F}$ için $p_b(u, v) = u^k + (u - v)^k$ ve

$p_b(u, z) + p_b(z - v) - p_b\,(z, z) = u^k + (u - z)^k + (z - v)^k$

olup

$$p_b(u, v) > p_b(u, z) + p_b(z, v) - p_b(z, z)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece p_b bir kısmi metrik değildir (Ma vd. 2018).

Sonuç 2.4.6 Her kısmi metrik bir kısmi b-metriktir. Ayrıca her b-metrik kısmi b-metriktir. Ancak tersi doğru olmak zorunda değildir.

Tablo 2.1 Genelleştirilmiş metrik uzaylar arasındaki ilişki

$$\begin{tikzcd} \textbf{Metrik uzay} \arrow[r] \arrow[d] & \textbf{b-metrik uzay} \arrow[d] \\ \textbf{Kısmi metrik uzay} \arrow[r] & \textbf{kısmi b-metrik uzay} \end{tikzcd}$$

Örnek 2.4.7 $\mathcal{F} = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere $p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

her $u, v \in \mathcal{F}$ için

$$p(u, v) = \begin{cases} |u - v|^2 + \mathrm{maxs}\{u, v\}, & u \neq v \\ u \quad , & u = v \neq 1 \\ 0 \quad , & u = v = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer b katsayısını 4 seçersek $(\mathcal{F}, p)$ bir kısmi b-metrik uzay olur (Shukla, 2014).

Tanım 2.4.8 $(\mathcal{F}, p_b)$ bir kısmi b-metrik uzay ve $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \mathcal{F}$ uzayında bir dizi olsun. Bu durumda

i) $u \in \mathcal{F}$ olmak üzere eğer $\lim_{n\to\infty} p_b(u_n, u) = p_b(u, u)$ ise $\{u_n\}$ dizisi u ya kısmi b -yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ yazılır.

ii) $u \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\lim_{n,m\to\infty} p_b(u_n, u_m)$ mevcut ve sonlu ise $\{u_n\}$ dizisine kısmi b-Cauchy dizisi denir.

iii) $\mathcal{F}$ deki her kısmi b-Cauchy dizisi kısmi b-yakınsak ise $(\mathcal{F}, p_b)$ ye tam kısmi b-metrik uzay denir (Shukla, 2014).

2.5 G-Metrik Uzay

Tanım 2.5.1 X boş olmayan bir küme ve $G: X \times X \times X \to [0, +\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i) $G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

ii) $x, y \in X$ olmak üzere eğer $x \neq y$ ise $G(x, y, z) > 0$

iii) $x, y, z \in X$ olmak üzere eğer $y \neq z$ ise $G(x, x, z) \leq G(x, y, z)$

iv) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$

v) $x, y, z, a \in X$ olmak üzere $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

şartları sağlanıyorsa, G ye X üzerinde bir G-metrik ve (X, G) ikilisine G-metrik uzay denir. Eğer $G(x, y, y) = G(y, x, x)$ ise (X, G) G-metrik uzayına simetriktir denir (Mustafa ve Sims, 2006).

Örnek 2.5.2 (X, p) bir metrik uzay ve $G: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$G(x, y, z) = \frac{p(x, y) + p(y, z) + p(x, z)}{3}$$

şeklinde tanımlanan G fonksiyonu bir G-metriktir (Mustafa ve Sims, 2006).

Tanım 2.5.3 (X, G) bir G-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Bu durumda

i) Her $\epsilon > 0$ ve $\forall\, n, m, l > N$ için $G(x_n, x_m, x_l) < \epsilon$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ elemanı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir G-Cauchy dizisi denir.

ii) Her $\epsilon > 0$ ve $\forall\, n, m > \epsilon$ için $G(x_n, x_m, x_l) < \epsilon$ olacak biçimde bir $\mathbb{N}$ eleman varsa $\{x_n\}$ dizisine G-yakınsak dizi denir.

iii) Her G-Cauchy dizisi G-yakınsak ise (X, G) ye bir tam G-metrik uzay denir.

(Mustafa ve Sims, 2006).

Uyarı 2.5.4 (X, G) bir G-metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) $\{x_n\}$ dizisi x e G-yakınsaktır.

ii) $n \to +\infty$ için $G(x_n, x_n, x) \to 0$ dır.

iii) $n \to +\infty$ için $G(x_n, x, x) \to 0$ dır.

iv) $n, m \to +\infty$ için $G(x_n, x_m, x) \to 0$ dır.

(Mustafa ve Sims, 2006).

Önerme 2.5.5 (X, G) bir G-metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer

$n, m \to \infty$ için $G(x_n, x_m, x_m) \to 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine bir G-Cauchy dizisi denir (Mustafa ve Sims, 2006).

Önerme 2.5.6 Bir (X, G) G-metrik uzayı, her $x, y \in X$ için

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x)$$

şeklinde tanımlı X üzerinde bir d_G metriği tanımlar. Ayrıca (X, G) nin G-tam olması için gerek ve yeter koşul (X, d_G) nin tam olmasıdır (Mustafa ve Sims, 2006).

2.6 v-Genelleştirilmiş Metrik Uzay

Tanım 2.6.1 X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Birbirinden farklı $a, b, c_1, c_2, \ldots c_v \in X$ elemanları için,

i) $d(a, b) \geq 0$

ii) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

iii) $d(a,b) = d(b,a)$

iv) $d(a,b) \leq d(a,c_1) + d(c_1,c_2) + d(c_2,c_3) + \cdots d(c_{v-1},c_v) + d(c_v,b)$

koşulları sağlanırsa d bir v-genelleştirilmiş metriktir denir (Branciari, 2000).

Tanım 2.6.2 (X,d) ikilisi bir v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$, X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda

i) $x \in X$ olmak üzere eğer $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x e v-yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ yazılır.

ii) $x \in X$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} d(x,x_n) = 0$ mevcut ve $y \in X \setminus \{x_n\}$ dizisinde mevcut olmazsa $\lim_{n\to\infty} d(y,x_n) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi sadece x e v-yakınsaktır denir.

iii) X deki her v-Cauchy dizisi v-yakınsak ise (X,d) ye tam v- genelleştirilmiş metrik uzay denir.

(Branciari, 2000).

3. NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ KÜMELER

Neutrosophic üçlü küme, klasik grup kavramının bir genelleştirmesidir. Klasik grupta her bir elemanın, grup işlemine göre bir tek tersi vardır. Ancak neutrosophic üçlü kümelerde bir elemanın birden fazla tersi bulunabilir. Ayrıca klasik gruplarda, grup işleminin tek bir etkisiz elemanı varken, neutrosophic üçlü kümelerde her bir elemanın farklı etkisiz elemanı olabilir.

3.1 Neutrosophic Üçlü Kümeler

Bu bölümde neutrosophic üçlü kümeler ile ilgili temel bilgiler ve örnekler verilmiştir.

Tanım 3.1.1 $\mathcal{N}$ herhangi bir küme ve $*: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(\mathcal{N},*)$ kümesine bir neutrosophic üçlü küme denir.

1) Her $a \in \mathcal{N}$ için,

$$a * \mathrm{etkisiz}(a) = \mathrm{etkisiz}(a) * a = a$$

olacak şekilde bir etkisiz(a) elemanı vardır.

2) Her $a \in \mathcal{N}$ için,

$$a * \mathrm{ters}(a) = \mathrm{ters}(a) * a = \mathrm{etkisiz}(a)$$

olacak şekilde bir ters(a) elemanı vardır.

$(\mathcal{N},*)$ neutrosophic üçlü kümesinde bir $a \in \mathcal{N}$ neutrosophic üçlüsü $(a, \mathrm{etkisiz}(a), \mathrm{ters}(a))$ şeklinde gösterilir (Smarandache ve Ali, 2016).

Örnek 3.1.2 $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ kümesini mod4 çarpma işlemi ile göz önüne alalım. Şimdi $\forall\, x \in Z_4$ için

$x.\mathrm{etkisiz}(x) \equiv x \pmod 4$ ve $x.\mathrm{ters}(x) \equiv \mathrm{etkisiz}(x) (\mathrm{mod} 4)$

şartlarını sağlayan etkisiz(x) ve ters(x) elemanlarını belirleyelim.

a) $0 \in Z_4$ için

$$0.\mathrm{etkisiz}(0) \equiv 0 \pmod 4$$

olacak biçimde $\mathrm{etkisiz}(0)$ elemanı 0,1,2 ve 3 olabilir.

$\mathrm{etkisiz}(0) = 0$ ise

$$0.\mathrm{ters}(0) \equiv 0(\mathrm{mod}4)$$

şartını sağlayan $\mathrm{ters}(0)$ elemanı 0,1,2 ve 3 tür.

$\mathrm{etkisiz}(0) = 1$ ise 0.$\mathrm{ters}(0) \equiv 1(\mathrm{mod}4)$

şartını sağlayan bir $\mathrm{ters}(0)$ elemanı yoktur. Benzer şekilde $\mathrm{etkisiz}(0) = 2$ ve $\mathrm{etkisiz}(0) = 3$ için de $\mathrm{ters}(0)$ elemanı yoktur. Dolayısıyla $0 \in Z_4$ ile elde edilen neutrosophic üçlüler

$$(0,0,0), (0,0,1), (0,0,2), (0,0,3)$$

olur.

b) $1 \in Z_4$ için

$$1.\mathrm{etkisiz}(1) \equiv 1 \pmod 4$$

şartını sağlayan $\mathrm{etkisiz}(1)$ elemanı sadece 1 dir. Bu durumda $\mathrm{ters}(1)$ sadece 1 olabilir. Böylece $1 \in Z_4$ ile oluşan tek neutrosophic üçlü $(1,1,1)$ dir.

c) $2 \in Z_4$ için

$$2.\mathrm{etkisiz}(2) \equiv 2 \pmod 4$$

şartını sağlayan $\mathrm{etkisiz}(2)$ elemanı 1 ve 3 olabilir.

$\mathrm{etkisiz}(2) = 1$ ise

$$2.\mathrm{ters}(2) \equiv 2(\mathrm{mod}4)$$

şartını sağlayan bir $\mathrm{ters}(2)$ elemanı yoktur. Benzer şekilde $\mathrm{etkisiz}(2) = 3$ için de

$$2.\mathrm{ters}(2) \equiv 3(\mathrm{mod}4)$$

şartını sağlayan bir $\mathrm{ters}(2)$ elemanı yoktur. Böylece $2 \in \mathrm{Z}_4$ ile elde edilen bir neutrosophic üçlü yoktur.

d) $3 \in \mathrm{Z}_4$ için

$$3.\mathrm{etkisiz}(3) \equiv 3 \pmod{4}$$

şartını sağlayan $\mathrm{etkisiz}(3)$ elemanı sadece 1 dir.

$\mathrm{etkisiz}(3) = 1$ ise

$$3.\mathrm{ters}(3) \equiv 1(\mathrm{mod}4)$$

şartını sağlayan $\mathrm{ters}(3)$ elemanı sadece 3 olur. Böylece $3 \in \mathrm{Z}_4$ ile oluşan tek neutrosophic üçlü, $(3,1,3)$ olur.

Tablo 3.1 Z_4 işlem tablosu

$(\mathbf{mod4})$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Örnek 3.1.3 $\mathrm{Z}_{20} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$ kümesini mod20 çarpma işlemi ile göz önüne alalım.

0 a göre neutrosophic üçlüler:

$(0,0,0), (0,0,1), (0,0,1), (0,0,2), (0,0,3), (0,0,4), (0,0,5), (0,0,6), (0,0,7), (0,0,8),$

$(0,0,9), (0,0,10), (0,0,11), (0,0,12), (0,0,13), (0,0,14), (0,0,15), (0,0,16), (0,0,17),$

$(0,0,18), (0,0,19)$

1 e göre neutrosophic üçlüler: $(1,1,1)$

2 ye göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

3 e göre neutrosophic üçlüler: $(3,1,7)$

4 e göre neutrosophic üçlüler: $(4,16,9), (4,16,19)$

5 e göre neutrosophic üçlüler: $(5,5,1), (5,5,5), (5,5,13), (5,5,17)$

6 ya göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

7 ye göre neutrosophic üçlüler: (7,1,3)

8 e göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

9 a göre neutrosophic üçlüler: $(9,14,6), (9,14,16)$

10 a göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

11 e göre neutrosophic üçlüler: $(11,10,11)$

12 ye göre neutrosophic üçlüler: (12,16,3), (12,16,8), (12,16,13), (12,16,18)

13 e göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

14 e göre neutrosophic üçlüler: (14,6,9),(14,6,19)

15 e göre neutrosophic üçlüler: (15,5,3),(15,5,7) (15,5,11),(15,5,15) ,(15,5,19)

16 ya göre neutrosophic üçlüler: (16,16,1), (16,16,6) (16,16,11) (16,16,16)

17 ye göre neutrosophic üçlüler: (17,1,13)

18 e göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

19 a göre neutrosophic üçlü oluşmaz.

Tablo 3.2 Z_{20} işlem tablosu

.	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	1	4	7	10	13	16	19	2	5	8	11	14	17
4	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16	0	4	8	12	16
5	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15	0	5	10	15
6	0	6	12	18	4	10	16	2	8	14	0	6	12	18	4	10	16	2	8	14
7	0	7	14	1	8	15	2	9	16	3	10	17	4	11	18	5	12	19	6	13
8	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12	0	8	16	4	12
9	0	9	18	7	16	5	14	3	12	1	10	19	8	17	6	25	4	13	2	11
10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10	0	10
11	0	11	2	13	4	15	6	17	8	19	10	1	12	3	14	5	16	7	18	9
12	0	12	4	16	8	0	6	4	16	8	10	12	4	16	14	0	12	4	16	8
13	0	13	6	19	12	5	18	11	4	17	10	3	16	9	2	15	8	1	14	7
14	0	14	8	8	2	16	4	18	12	6	0	14	8	2	16	10	4	18	12	6
15	0	15	10	5	0	15	10	5	0	15	10	5	0	15	10	5	0	15	10	5
16	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4	0	16	12	8	4
17	0	17	14	17	8	5	2	19	16	13	10	7	4	1	18	15	12	9	6	3
18	0	18	16	4	2	10	8	6	4	2	0	18	16	4	2	10	8	6	4	2
19	0	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

4. NEUTROSOPHIC ÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR

Bu bölümde neutrosophic üçlü metrik uzay, neutrosophic üçlü kısmi metrik uzay, neutrosophic üçlü b-metrik uzay, neutrosophic üçlü kısmi b-metrik uzay, neutrosophic üçlü g-metrik uzay, neutrosophic üçlü kısmi G-metrik uzay ve neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay kavramları ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

4.1 Neutrosophic Üçlü Metrik Uzaylar

Tanım 4.1.1 $\mathcal{F}$ boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$\mathrm{d}: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ dönüşümüne $\mathcal{F}$ üzerinde bir neutrosophic üçlü metrik denir.

$\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathcal{F}$ için

i) $\mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \geq 0$

ii) Eğer $\mathrm{u}=\mathrm{v}$ ise $\mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{v})=0$

iii) $\mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{v})=\mathrm{d}(\mathrm{v}, \mathrm{u})$

iv) Eğer $\mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \leq \mathrm{d}((\mathrm{u}, \mathrm{v} * \mathrm{etkisiz}(\mathrm{z}))$ olacak biçimde bir $\mathrm{z} \in \mathcal{F}$ varsa

$$\mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{v} * \mathrm{etkisiz}(\mathrm{z})) \leq \mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{z})+\mathrm{d}(\mathrm{z}, \mathrm{v})$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda $((\mathcal{F}, *), \mathrm{d})$ ye neutrosophic üçlü metrik uzay denir (Şahin ve Kargın, 2017).

Örnek 4.1.2 $\mathcal{F}$ bir küme olmak üzere $\mathrm{P}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ kümesinin kuvvet kümesi olsun.

Her $\mathrm{A} \in \mathrm{P}(\mathcal{F})$ için $\mathrm{A} \cup \mathrm{A}=\mathrm{A}$ olduğundan $(\mathrm{A}, \mathrm{A}, \mathrm{A})$ neutrosophic üçlüleri ile $(\mathrm{P}(\mathcal{F}), \cup)$ bir neutrosophic üçlü kümedir.

$\mathrm{d}: \mathrm{P}(\mathcal{F}) \times \mathrm{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup\{0\}$ fonksiyonu $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})=|\mathrm{s}(\mathrm{A})-\mathrm{s}(\mathrm{B})|$ şeklinde tanımlansın.

Neutrosophic üçlü metriğin i, ii, iii şartlarının sağlandığı açıktır.

iv) Her $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{P}(\mathcal{F})$ için

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B} \cup \emptyset) = \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |\mathrm{s}(\mathrm{A}) - \mathrm{s}(\mathrm{B})|$$

eşitliği sağlanır. Üçgen eşitsizliğinden

$$|\mathrm{s}(\mathrm{A}) - \mathrm{s}(\mathrm{B})| \leq |\mathrm{s}(\mathrm{A}) - \mathrm{s}(\mathrm{C})| + |\mathrm{s}(\mathrm{C}) - \mathrm{s}(\mathrm{B})|$$

olduğu görülür. Böylelikle

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B} \cup \emptyset) \leq \mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + \mathrm{d}(\mathrm{C}, \mathrm{B})$$

dir. Sonuç olarak $((\mathrm{P}(\mathcal{F}),\cup), \mathrm{d})$ bir neutrosophic üçlü metrik uzaydır (Şahin ve Kargın, 2017).

Tanım 4.1.2 $((\mathcal{F}\ ,*), \mathrm{d})$ neutrosophic üçlü metrik uzay ve $\{\mathrm{u_n}\}$ bu uzayda bir dizi olsun.

i) $\mathrm{u} \in \mathcal{F}$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ ve her $\mathrm{n} \geq \mathrm{M}$ için $\mathrm{d}\big(\mathrm{u_{n,}}\ \mathrm{u}\big) < \epsilon$ olacak biçimde $\mathrm{M} \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{\mathrm{u_n}\}$ dizisi u noktasına yakınsar denir ve $\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\mathrm{u_n} = \mathrm{u}$ şeklinde gösterilir.

ii) Eğer $\{\mathrm{u_n}\}$ dizisi yakınsak ve $\mathrm{u} \in \mathcal{F}$ için $\mathrm{d}(\mathrm{u_n}, \mathrm{u_m}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{u_n}, \mathrm{u_m}{}^{*}\mathrm{etkisiz}(\mathrm{u}))$ ise $\{\mathrm{u_n}\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

iii) Her Cauchy dizisi yakınsak ise $((\mathcal{F}\ ,*), \mathrm{d})$ uzayına tam neutrosophic üçlü metrik uzay denir.

4.2 Neutrosophic Üçlü Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar

Bu bölümde neutrosophic neutrosophic üçlü b-metrik, neutrosophic üçlü kısmi metrik, neutrosophic üçlü kısmi b-metrik, neutrosophic üçlü G-metrik, neutrosophic üçlü kısmi G-metrik ve neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzaylar ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş, örneklerle analiz edilmiştir

Tanım 4.2.1 $(\mathcal{N},*)$ bir neutrosophic üçlü küme olsun. Eğer $d_b: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d_b bir neutrosophic üçlü b – metriktir denir.

Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{N}$ için

a) $\zeta * \mathcal{E} \in \mathcal{N}$

b) $d_b(\zeta, \mathcal{E}) \geq 0$

c) $\zeta = \mathcal{E}$ ise $d_b(\zeta, \mathcal{E}) = 0$

d) $d_b(\zeta, \mathcal{E}) = d_b(\mathcal{E}, \zeta)$

e) Eğer her bir $\zeta, \mathcal{E} \in \mathcal{N}$ eleman çifti için

$$d_b(\zeta, \mathcal{E}) \leq d_b(\zeta, \mathcal{E} * \text{etkisiz}(\sigma))$$

olacak şekilde en az bir $\sigma \in \mathcal{N}$ elemanı varsa,

$$d_b(\zeta, \mathcal{E} * \text{etkisiz}(\sigma)) \leq b[\, d_b(\zeta, \sigma) + d_b(\sigma, \mathcal{E})]$$

olacak biçimde $b \in \mathbb{R}^+$, $b \geq 1$ vardır.

Bu durumda $((\mathcal{N},*), d_b)$ ye neutrosophic üçlü b - metrik uzay denir (Şahin ve Kargın, 2017).

Örnek 4.2.2 $\mathcal{F} = \{0,2,3,4\}$ olsun. $\mathcal{F}$ kümesi Z_6 çarpma işlemine göre neutrosophic üçlü uzaydır. Neutrosophic üçlüler $(0,0,0), (2,4,2), (3,3,3)$ ve $(4,4,4)$ dir.

Her $m, n \in \mathcal{F}$ için $p: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$p(m, n) = (m - n)^2$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda neutrosophic üçlü b-metrik şartlarından a, b, c ve d nin sağlandığı açıktır.

e) $m = 0$ ve $n = 2$ alalım.

$p(0,2) \leq p(0,2.\,\text{etkisiz}(2))$ ve $p(0,2.\,\text{etkisiz}(2)) \leq p(0,2) + p(2,2)$ dir.

$p(0,2) \leq p(0,2.\,\text{etkisiz}(4))$ ve $p(0,2.\,\text{etkisiz}(4)) \leq p(0,4) + p(4,2)$ dir.

$m = 0$ ve $b = 3$ alalım.

$p(0,3) \leq p(0,3.\,\text{etkisiz}(3))$ ve $p(0,3.\,\text{etkisiz}(3)) \leq p(0,3) + p(3,3)$ dir.

$m = 0$ ve $n = 4$ alalım.

$p(0,4) \leq p(0,4.\,\text{etkisiz}(2))$ ve $p(0,4.\,\text{etkisiz}(2)) \leq 2[p(0,2) + p(2,4)]$ dir.

$p(0,4) \leq p(0,4.\,\text{etkisiz}(4))$ ve $p(0,4.\,\text{etkisiz}(4)) \leq p(0,4) + p(4,4)$ dir.

$m = 2$ ve $n = 3$ alalım.

$p(2,3) \leq p(2,3.\,\text{etkisiz}(0))$ ve $p(2,3.\,\text{etkisiz}(0)) \leq p(2,0) + p(0,3)$ dir.

$p(2,3) \leq p(2,3.\,\text{etkisiz}(2))$ ve $p(2,3.\,\text{etkisiz}(2)) \leq 4[p(2,2) + p(2,3)]$ dir.

$p(2,3) \leq p(2,3.\,\text{etkisiz}(4))$ ve $p(2,3.\,\text{etkisiz}(4)) \leq 2[p(2,4) + p(4,3)]$ dir.

$m = 2$ ve $n = 4$ alalım.

$p(2,4) \leq p(2,4.\,\text{etkisiz}(0))$ ve $p(2,4.\,\text{etkisiz}(0)) \leq p(2,0) + p(0,4)$ dir.

$p(2,4) \leq p(2,4.\,\text{etkisiz}(2))$ ve $p(2,4.\,\text{etkisiz}(2)) \leq p(2,2) + p(2,4)$ dir.

$p(2,4) \leq p(2,4.\,\text{etkisiz}(3))$ ve $p(2,4.\,\text{etkisiz}(3)) \leq 2[p(2,3) + p(3,4)]$ dir.

$p(2,4) \leq p(2,4.\,\text{etkisiz}(4))$ ve $p(2,4.\,\text{etkisiz}(4)) \leq p(2,4) + p(4,4)$ dir.

$m = 3$ ve , $n = 4$ alalım.

$p(3,4) \leq p(3,4.\,\text{etkisiz}(0))$ ve $p(3,4.\,\text{etkisiz}(0)) \leq p(3,0) + p(0,4)$ dir.

$p(3,4) \leq p(3,4.\text{etkisiz}(3))$ ve $p(3,4.\text{etkisiz}(3)) \leq p(3,3) + p(3,4)$ dir.

Sonuç olarak p neutrosophic üçlü metrik değildir. Eğer $b \geq 4$ seçilirse, p fonksiyonu bir neutrosophic üçlü b-metrik olur (Demiralp, 2021).

Teorem 4.2.3 $((\mathcal{N}, \#), d_b)$ bir neutrosophic üçlü b-metrik uzay olsun. Bu durumda

$$d(a, b) = \frac{d_b(a, b)}{d_b(a, b) + 1}$$

şeklinde tanımlı $d: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir neutrosophic üçlü b-metriktir.

İspat

i) $a\#b \in \mathcal{N}$ olduğu açıktır.

ii) Çünkü $\big((\mathcal{N}, \#), d_b\big)$ ikilisi neutrosophic üçlü b-metrik uzay olduğundan $a = b$ ise $d_b\,(a, b) = 0$ dır. Böylelikle $a = b$ ise

$$d(a, b) = \frac{d_b(a, b)}{d_b(a, b) + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

olur. Aynı zaman da

$$d(a, b) = \frac{d_b(a, b)}{d_b(a, b) + 1} \geq 0$$

olduğu görülür.

iii) $((\mathcal{N}, \#), d_b)$ ikilisi neutrosophic üçlü b-metrik uzay olduğundan

$$d(a, b) = \frac{d_b(a, b)}{d_b(a, b) + 1} = \frac{d_b(b, a)}{d_b(b, a) + 1} = d(b, a)$$

olur.

iv) Herbir $\mathrm{a,b} \in \mathcal{N}$ için

$$\mathrm{d_b(a,b) \leq d_b\ (a, b * etkisiz(c))}$$

olacak biçimde en az bir tane $\mathrm{c} \in \mathcal{N}$ varsa $\mathrm{k} \geq 1$ ve $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathrm{d_b(a, b * etkisiz(c)) \leq k.[d_b(a,c) + d_b\ (c,b)]}$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Böylece her $\mathrm{a,b} \in \mathcal{N}$ için

$$\mathrm{d_b(a,b) \leq d_b(a, b * etkisiz(c))}$$

olacak biçimde en az bir tane $\mathrm{c} \in \mathcal{N}$ varsa $\mathrm{k} \geq 1, \mathrm{k} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathrm{d(a,b) = \frac{d_b(a,b)}{d_b(a,b)+1}}$$

$$\mathrm{\leq \frac{k.[d_b(a,c) + d_b(c,b)]}{k.[d_b(a,c) + d_b(c,b)]+1}}$$

$$\mathrm{= \frac{k.d_b(a,c)}{k.[d_b(a,c) + d_b(c,b)]+1} + \frac{k.d_b(c,b)}{k.[d_b(a,c) + d_b(c,b)]+1}}$$

$$\mathrm{\leq \frac{k.d_b(a,c)}{d_b(a,c)+1} + \frac{k.d_b(c,b)}{d_b(c,b)+1}}$$

$$\mathrm{= k.[d(a,c) + d(c,b)]}$$

eşitliği sağlanmış olur. Böylece

$$\mathrm{d(a,b) = \frac{d_b(a,b)}{d_b(a,b)+1}}$$

fonksiyonu bir neutrosophic kısmi b-metrik uzaydır.

Örnek 4.2.4 $K \neq \emptyset$ doğal sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesi olmak üzere $(P(K), \cup)$ neutrosophic üçlü kümeyi göz önüne alalım.

$\wp: P(K) \times P(K) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

Eğer $\zeta = \mathcal{E}$ ise $d(\zeta, \mathcal{E}) = 0$, eğer $\zeta \neq \mathcal{E}$ ise, $m(\zeta)$ ve $m(\mathcal{E})$, ζ ve $\mathcal{E}$ kümelerinin eleman sayılarını belirtmek üzere

$$\wp(\zeta, \mathcal{E}) = \begin{cases} \left|2^{m(\zeta)} - 2^{m(\mathcal{E})}\right|, & \text{eğer } m(\zeta) \text{ ve } m(\mathcal{E}) \text{ tek ise} \\ 3 & , \text{ eğer } m(\zeta) \text{ ve } m(\mathcal{E}) \text{ çift ise} \\ 1 & , \text{ eğer } m(\zeta) \text{ve } m(\mathcal{E}) \text{ nin} \\ & \quad \text{biri tek, diğeri çift ise} \end{cases}$$

$\wp$ neutrosophic üçlü metrik olmadığı halde neutrosophic üçlü b – metriktir.

Örnek olarak $\sigma \subset \mathcal{E}$ olmak üzere $m(K) = 10$, $m(\zeta) = 8$, $m(\mathcal{E}) = 6$, $m(\sigma) = 3$ olsun. Bu durumda

$$\wp(\zeta, \mathcal{E}) \leq \wp(\zeta, \mathcal{E} \cup n_{\sigma}) = \wp(\zeta, \mathcal{E} \cup \sigma) = \wp(\zeta, \mathcal{E})$$

dir. Ancak $\wp(\zeta, \mathcal{E}) = 192$, $\wp(\zeta, \sigma) = 1$ ve $\wp(\sigma, \mathcal{E}) = 1$ olduğundan

$$\wp(\zeta, \mathcal{E}) \geq \wp(\zeta, \sigma) + \wp(\sigma, \mathcal{E})$$

dir. Bundan dolayı $\wp$ neutrosophic üçlü metrik değildir. Fakat $b \geq 1023$ ise $\wp$ fonksiyonu bir neutrosophic üçlü b-metrik olur.

Eğer $\zeta = K$ ve $\mathcal{E} = \sigma = \emptyset$ ise b en az $|2^{10} - 2^{0}|$ olmalıdır.

Genel olarak eğer

$$b \geq \left|2^{m(K)} - 2\right|$$

seçilirse $\wp$ neutrosophic üçlü b- metrik olur (Demiralp, 2021).

Örnek 4.2.5 $K = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ olsun. Bu durumda $(P(K),\cap)$kümesi (K, K, K) nötrososofik üçlüleri ile bir neutrosophic üçlü kümedir.

$\wp: P(K) \times P(K) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\wp(\zeta, \mathcal{E}) = \begin{cases} 1\,, & \text{eğer } \zeta \cap \mathcal{E} = \emptyset \\ \dfrac{1}{m(\zeta \cap \mathcal{E})}, & \text{eğer } \zeta \cap \mathcal{E} \neq \emptyset \;\; , \zeta \neq \mathcal{E} \\ 0, & \text{eğer } \zeta = \mathcal{E} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\zeta = \{1,2,3\}, \mathcal{E} = \{4,5,6,7\}$ ve $\sigma = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ alırsak

$$\wp(\zeta, \mathcal{E}) = 1 \leq \wp(\zeta, \mathcal{E} \cap n_{\sigma}) = \wp(\zeta, \mathcal{E})$$

olur.

Ancak

$$\wp(\zeta, \mathcal{E} \cap n_{\sigma}) \geq \wp(\zeta, \sigma) + \wp(\sigma, \mathcal{E}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

dir. Sonuç olarak $\wp$ neutrosophic üçlü metrik değildir. Fakat katsayıyı $b \geq \frac{9}{2}$ seçersek $((P(K),\cap), \wp)$ neutrosophic üçlü b-metriktir. Genel olarak

$$b \geq \frac{m(K) - 1}{2}$$

alınırsa $\wp_b$ neutrosophic üçlü b-metriktir (Demiralp, 2021).

Tanım 4.2.6 $\big((\mathcal{N}, \#), d_b\big)$ bir neutrosophic b-metrik uzay ve $\{x_n\}$, $\mathcal{N}$ de bir dizi olsun.

i) Her $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, n \geq k$ için $d_b(m, \{x_n\}) < \varepsilon$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisi m noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ veya $x_n \to m$ şeklinde gösterilir.

ii) Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq m \geq k$ için $d_b(\{x_m\},\{x_n\}) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

iii) Her Cauchy dizisi yakınsak ise $\left((\mathcal{N}, \#), d_b\right)$ uzayına tam neutrosophic üçlü b-metrik uzay denir.

(Şahin ve Kargin, 2019).

Tanım 4.2.7 $(\mathcal{N},*)$ bir neutrosophic üçlü küme olsun. Eğer

$$d_p : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d_p fonksiyonu bir neutrosophic üçlü kısmi metriktir denir.

Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{N}$ olmak üzere,

a) $\zeta * \mathcal{E} \in \mathcal{N}$

b) $d_p(\zeta, \mathcal{E}) \geq d_p(\zeta, \zeta) \geq 0$

c) Eğer $d_p(\zeta, \mathcal{E}) = d_p(\zeta, \zeta) = d_p(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ ise $d_p(\zeta, \mathcal{E}) = 0$

d) $d_p(\zeta, \mathcal{E}) = d_p(\mathcal{E}, \zeta)$

e) Eğer herbir $\zeta, \mathcal{E} \in \mathcal{N}$ eleman çifti için

$$d_p(\zeta, \mathcal{E}) \leq d_p(\zeta, \mathcal{E} * \text{etkisiz}(\sigma))$$

olacak şekilde en az bir $\sigma \in \mathcal{N}$ elemanı varsa,

$$d_p(\zeta,* \text{ etkisiz}(\sigma)) \leq d_p(\zeta, \sigma) + d_p(\sigma, \mathcal{E}) + d_p(\sigma, \sigma)$$

dir.

$((\mathcal{N},*), d_p)$ ikilisine bir neutrosophic üçlü kısmi metrik uzay denir (Şahin ve Kargın, 2018).

Örnek 4.2.8 A boştan farklı bir küme olsun. $(\mathrm{P(A)},\cup)$ neutrosophic üçlü kümeyi göz önüne alalım. $p_N: P(A) \times P(A) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

$$p_N(X,Y) = \text{maks}\{m(X), m\{Y\}\}$$

şeklinde tanımlansın. p_N fonksiyonunun neutrosophic üçlü kısmi metrik şartlarından i, ii, iii şartlarını sağladığı açıktır.

iv) $p_N(X,Y) = p_N(X, Y \cup \emptyset)$ olup

$$p_N(X,Y) = p_N(X, Y \cup \emptyset) = p_N(X,Y) = \text{maks}\{m(X), m\{Y\}\}$$

olduğundan

$$\text{maks}\{m(X), m\{Y\}\} \leq \text{maks}\{m(X), m\{Z\}\} + \text{maks}\{m(Z), m\{Y\}\}$$

$$-\text{maks}\{m(\emptyset), m\{\emptyset\}\}$$

dir. Sonuç olarak

$$p_N(X, Y \cup \emptyset) \leq p_N(X, \emptyset) + p_N(\emptyset, Y) - p_N(\emptyset, \emptyset)$$

olduğundan $((\mathrm{P(A)},\cup), p_N)$ bir neutrosophic üçlü kısmi metriktir (Şahin ve Kargın, 2018).

Tanım 4.2.9 $\left((\mathcal{N}, \#), d_p\right)$ bir neutrosophic üçlü kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, $\mathcal{N}$ de bir dizi olsun.

i) Her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq k$ için $d_b(m, \{x_n\}) < \varepsilon + d_p(m,m)$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisi m ye yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ veya $x_n \to m$ şeklinde gösterilir.

ii) Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq m \geq k$ için $d_p(\{x_m\}, \{x_n\}) < \varepsilon + d_p(m,m)$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

iii) Her Cauchy dizisi yakınsak ise $\left((\mathcal{N}, \#), \mathrm{d_p}\right)$ uzayına bir tam neutrosophic üçlü kısmi metrik uzay denir.

(Şahin ve Kargın, 2018).

Tanım 4.2.10 $(\mathcal{N},*)$ bir neutrosophic üçlü küme olsun. Eğer

$$\mathrm{d_{pb}}: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathrm{d_{pb}}$ fonksiyonu bir neutrosophic üçlü kısmi b-metrik denir. Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in \mathcal{N}$ için

a) $\zeta * \mathcal{E} \in \mathcal{N}$

b) $\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \mathcal{E}) \geq \mathrm{d_{pb}}(\zeta, \zeta) \geq 0$

c) $\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \mathcal{E}) = \mathrm{d_{pb}}(\zeta, \zeta) = \mathrm{d_{pb}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$ ise $\zeta = \mathcal{E}$ dir.

d) $\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \mathcal{E}) = \mathrm{d_{pb}}(\mathcal{E}, \zeta)$

e) Eğer her $\zeta, \sigma \in \mathcal{N}$ çifti için

$$\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \sigma) \geq \mathrm{d_{pb}}(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E}))$$

olacak biçimde bir $\mathcal{E} \in \mathcal{N}$ varsa, en az bir $\mathrm{b} \geq 1$ reel sayısı için

$$\mathrm{d_{pb}}\left(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E})\right) \leq \mathrm{b}.\left[\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{d_{pb}}(\mathcal{E}, \sigma) + \mathrm{d_{pb}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})\right]$$

olur.

$((\mathcal{N},*), \mathrm{d_{pb}})$ bir neutrosophic üçlü kısmi – b metrik uzay denir (Şahin ve Kargın, 2018).

Örnek 4.2.11 $\mathcal{N} = \{0, 2, 3, 4\}$ olsun. $\mathcal{N}$ kümesi $\mathrm{mod}6$ çarpma işlemine göre $\mathbb{Z}_6$ bir neutrosophic üçlü kümedir. Neutrosophic üçlüler ise

$(0,0,0),(2,4,2),(3,3,3),(4,4,4)$ olur. Ayrıca, $d_{pb} : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$d_{pb}(x,y) = \text{maks}\{2^{x} - 1, 2^{y} - 1\}$$

fonksiyonu $b = 2$ katsayısı ile bir neutrosophic üçlü kısmi b-metriktir. Böylelikle $((\mathcal{N},.), d_{pb})$ bir neutrosophic üçlü kısmi b - metrik uzaydır (Şahin ve Kargın, 2019).

Teorem 4.1.12 $(\mathcal{N},*)$ bir neutrosophic üçlü küme ve $d_b: \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ fonksiyonu bir neutrosophic üçlü b-metrik olsun. Bu durumda $k \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$d_{pb}(\zeta,\mathcal{E}) = d_b(\zeta,\mathcal{E}) + k$$

fonksiyonu bir neutrosophic üçlü kısmi b-metriktir.

İspat

a) d_b bir neutrosophic üçlü b-metrik olduğundan bu şart sağlanır.

b) $d_b(\zeta,\zeta) = 0$ olduğundan

$$d_{pb}(\zeta,\mathcal{E}) = d_b(\zeta,\mathcal{E}) + k \geq d_{pb}(\zeta,\zeta)$$

$$= d_b(\zeta,\zeta) + k$$

$$= d_{pb}(\mathcal{E},\mathcal{E}) + k = 0$$

dır.

c) $k \in \mathbb{R}^{+}$ olduğundan

$$d_{pb}(\zeta,\mathcal{E}) = d_b(\zeta,\mathcal{E}) + k = d_{pb}(\zeta,\zeta)$$

$$= d_b(\zeta,\zeta) + k = d_{pb}(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

$$= d_b(\mathcal{E},\mathcal{E}) + k$$

$= 0$

olacak şekilde $\zeta, \mathcal{E} \in \mathcal{N}$ çifti yoktur.

d) $\mathrm{d_b}$ bir neutrosophic üçlü b-metrik olduğundan

$$\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \mathcal{E}) = \mathrm{d_b}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{k} = \mathrm{d_b}(\mathcal{E}, \zeta) + \mathrm{k} = \mathrm{d_{pb}}(\mathcal{E}, \zeta)$$

dir.

e) $\mathrm{d_b}$ bir neutrosophic üçlü b-metrik olduğundan her bir $\zeta, \sigma \in \mathcal{N}$ çifti için

$\mathrm{d_b}(\zeta, \sigma) \leq \mathrm{d_b}(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E}))$ olacak şekilde en az bir $\mathcal{E} \in \mathcal{N}$ varsa,

$$\mathrm{d_b}\big(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E})\big) \leq \mathrm{b}.\,[\mathrm{d_b}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{d_b}(\mathcal{E}, \sigma)]$$

dir. Bu durumda

$$\mathrm{d_b}\,(\zeta, \sigma) + \mathrm{k} \leq \mathrm{d_b}\big(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E})\big) + \mathrm{k}$$

olacak şekilde en az bir $\mathcal{E} \in \mathcal{N}$ varsa

$$\mathrm{d_b}\big(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E})\big) + \mathrm{k} \leq \mathrm{b}.\,[\mathrm{d_b}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{d_b}(\mathcal{E}, \sigma)] + \mathrm{k}$$

yazabiliriz. Yani $\mathrm{d_{pb}}(\zeta, \sigma) \leq \mathrm{d_{pb}}(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E}))$ olacak şekilde en az bir $\mathcal{E} \in \mathcal{N}$ elemanı varsa

$$\mathrm{d_{pb}}\big(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E})\big) \leq \mathrm{b}.\,[\mathrm{d_b}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{d_b}(\mathcal{E}, \sigma)] + \mathrm{k}$$

olur. Burada

$$\mathrm{d_{pb}}\big(\zeta, \sigma * \mathrm{etkisiz}(\mathcal{E})\big) \leq \mathrm{b}.\,[\mathrm{d_b}(\zeta, \mathcal{E}) + \mathrm{k} + \mathrm{d_b}(\mathcal{E}, \sigma) + \mathrm{k}] + \mathrm{k}$$

alabiliriz. Böylece, $\mathrm{d_{pb}}\,(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathrm{d_b}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) + \mathrm{k}$ olduğundan

$$d_{pb}\big(\zeta, \sigma * \text{etkisiz}(\mathcal{E})\big) \leq b.\left[d_{pb}(\zeta, \mathcal{E}) + d_{pb}(\mathcal{E}, \sigma)\right] + d_{pb}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$$

elde ederiz.

Tanım 4.2.13 $\big((\mathcal{N}, \#), d_{pb}\big)$ bir neutrosophic kısmi b-metrik uzay ve $\{x_n\}$, $\mathcal{N}$ de bir dizi olsun.

i) Her $\varepsilon > 0$ ve $\forall\, n \geq k$ için $d_{pb}(m, \{x_n\}) < \varepsilon$ olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisi m noktasına kısmi b-yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = m$ veya $x_n \to m$ şeklinde gösterilir.

ii) Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq m \geq k$ için $d_{pb}(\{x_m\}, \{x_n\}) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisine kısmi b-Cauchy dizisi denir.

iii) Her kısmi b-Cauchy dizisi kısmi b-yakınsak ise $\big((\mathcal{N}, \#), d_{pb}\big)$ uzayına tam neutrosophic üçlü kısmi b- metrik uzay denir.

Tanım 4.2.14 $(X,*)$ bir neutrosophic üçlü küme ve $G: X \times X \times X \to [0, +\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x, y, z, a \in X$ için

i) $G(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

ii) $x \neq y$ ise $G(x, y, z) > 0$

iii) $y \neq z$ ise $G(x, x, z) \leq G(x, y, z)$

iv) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = G(y, x, z) = G(z, x, y) = G(z, y, x)$

v) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$

vi) herbir $x, y, z \in X$ için

$$G(x, y, z) \leq G(x * \text{etkisiz}(a), y * \text{etkisiz}(a), z * \text{etkisiz}(a))$$

olacak biçimde bir $a \in X$ varsa

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &\leq G\big(x * \text{etkisiz}(a), y * \text{etkisiz}(a), z * \text{etkisiz}(a)\big) \\ &\leq G(x, a, a) + G(a, y, z) \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa $((X,*), G)$ ikilisi bir neutrosophic üçlü G metrik uzaydır (Şahin ve Kargın, 2019).

Teorem 4.2.15 $((X,*), d)$ bir neutrosophic üçlü metrik uzay olsun. Bu durumda

$$G_A(x,y,z) = \frac{1}{3}[d(x,y) + d(y,z) + d(x,z)]$$

şeklinde tanımlı G_A fonksiyonu X üzerinde bir neutrosophic üçlü G metriktir (Şahin ve Kargın, 2019).

Teorem 4.2.16 $((X,*), d)$ bir neutrosophic üçlü metrik uzay olsun. Bu durumda

$$G_B(x,y,z) = \text{maks}\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$$

şeklinde tanımlı G_B fonksiyonu X üzerinde bir neutrosophic üçlü G metriktir (Şahin ve Kargın, 2019).

Örnek 4.2.17 $X \subset \mathbb{R}$ ve $(X,*)$ bir neutrosophic üçlü küme olsun. d fonksiyonu X üzerinde

$$d(x,y) = |2^x - 2^y|$$

şeklinde tanımlı bir neutrosophic üçlü metrik olsun.

$$G_A(x,y,z) = \frac{1}{3}[|2^x - 2^y| + |2^x - 2^z| + |2^y - 2^z|]$$

$$G_B(x,y,z) = \text{maks}\{|2^x - 2^y|, |2^x - 2^z|, |2^y - 2^z|\}$$

olduğundan Teorem 4.2.15 ve Teorem 4.2.16 dan dolayı G_A ve G_B fonksiyonları birer neutrosophic üçlü G metriktir.

Tanım 4.2.8 $((X,*), G)$ ikilisi bir neutrosophic üçlü G metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

i) $x \in X$ olmak üzere eğer $\lim_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x e G-yakınsaktır denir.

ii) Eğer $\lim_{n,m,l\to\infty} G(x_n, x_m, x_l) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine G-Cauchy dizisi denir.

iii) Her G-Cauchy dizisi G-yakınsak ise $\big((X,*), G\big)$ uzayına tam G-metrik uzay denir

Tanım 4.2.19 $(A,*)$ bir neutrosophic üçlü küme olsun. A üzerinde tanımlı

$$p_{NG}: A \times A \times A \to R^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa p_{NG} ye neutrosophic üçlü kısmi G metrik uzay denir. Her $\zeta, \mathcal{E}, \sigma \in A$ için

i) $\zeta * \mathcal{E} \in A$

ii) $0 \leq p_{NG}(\zeta,\zeta,\zeta) \leq p_{NG}(\zeta,\mathcal{E},\sigma)$

iii) Eğer

$$p_{NG}(\zeta,\zeta,\zeta) = p_{NG}(\mathcal{E},\mathcal{E},\mathcal{E}) = p_{NG}(\sigma,\sigma,\sigma) = p_{NG}(\zeta,\mathcal{E},\sigma) = 0$$

ise $\zeta = \mathcal{E} = \sigma$ dir.

iv) Eğer $\sigma \neq \mathcal{E}$ ise $p_{NG}(\zeta,\zeta,\mathcal{E}) \leq p_{NG}(\zeta,\mathcal{E},\sigma)$

v) $p_{NG}(\zeta,\mathcal{E},\sigma) = p_{NG}(\zeta,\sigma,\mathcal{E}) = p_{NG}(\mathcal{E},\sigma,\zeta) = p_{NG}(\mathcal{E},\zeta,\sigma)$

$$= p_{NG}(\sigma,\zeta,\mathcal{E}) = p_{NG}(\sigma,\mathcal{E},\zeta)$$

vi) $p_{NG}(\zeta,\mathcal{E},\sigma) \leq p_{NG}\big(\zeta * \text{etkisiz}(a), \mathcal{E} * \text{etkisiz}(a), \sigma * \text{etkisiz}(a)\big)$

$$\leq p_{NG}(\zeta,a,a) + p_{NG}(a,\mathcal{E},\sigma) - p_{NG}(a,a,a)$$

olur.

$((A,*),\ p_{NG})$ ikilisine bir neutrosophic üçlü kısmi G metrik uzay denir (Şahin ve Kargın, 2020).

Örnek 4.2.20 $X = \{0,3,4,6,9\}$ kümesini $\mathrm{mod}\,12$ çarpma işlemi altında incelediğimizde

$\mathrm{etkisiz}(0) = 0, \mathrm{ters}(0) = 0$

$\mathrm{etkisiz}(3) = 9, \mathrm{ters}(3) = 6$

$\mathrm{etkisiz}(4) = 4,\ \mathrm{ters}(4) = 4$

$\mathrm{etkisiz}(6) = 6, \mathrm{ters}(6) = 6$

$\mathrm{etkisiz}(9) = 9, \mathrm{ters}(9) = 9$

olup, X kümesi $(0,0,0), (3,6,9), (4,4,4), (6,6,6), (9,9,9)$ neutrosophic üçlüleri ile bir neutrosophic üçlü kümedir.

$p_{NG}: X \times X \times X \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$p_{NG}(x, y, z) = 1 + |4^x - 4^y| + |4^x - 4^z| + |4^y - 4^z|$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlansın.

p_{NG} nin neutrosophic üçlü kısmi G metrik şartlarından i, ii ve iii yi sağladığı açıktır.

iv) Eğer $y \neq z$ ise

$$\begin{aligned} p_{NG}(x, x, z) &= 1 + |4^x - 4^x| + |4^x - 4^z| + |4^y - 4^z| \\ &\leq 1 + |4^x - 4^y| + |4^x - 4^z| + |4^y - 4^z| \\ &= p_{NG}(x, y, z) \end{aligned}$$

v) $\forall\, x, y, z \in X$ için

$p_{NG}\,(x, y, z) = p_{NG}\,(x, z, y) = p_{NG}\,(y, z, x)$

$= p_{NG}\,(y, x, z) = p_{NG}\,(z, x, y) = p_{NG}\,(z, y, x)$

olur.

vi) $x = 0, y = 6\,, z = 3, a = 3, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}\,(0,6,3) \leq p_{NG}\,(0 * 6,6 * 6,3 * 6) = p_{NG}\,(0,6,6)$ olup

$p_{NG}\,(0,6,6) \leq p_{NG}\,(0,3,3) + p_{NG}\,(3,6,6) - p_{NG}\,(3,3,3)$ sağlanır.

$x = 0, y = 3\,, z = 9, a = 3, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}\,(0,3,9) \leq p_{NG}\,(0 * 6,3 * 6,9 * 6) = p_{NG}\,(0,6,6)$ olup

$p_{NG}\,(0,6,6) \leq p_{NG}\,(0,3,3) + p_{NG}\,(3,6,6) - p_{NG}\,(3,3,3)$ sağlanır.

$x = 0, y = 9\,, z = 3, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}\,(0,9,3) \leq p_{NG}\,(0 * 6,9 * 6,3 * 6) = p_{NG}\,(0,6,6)$ olup

$p_{NG}\,(0,6,6) \leq p_{NG}\,(0,6,6) + p_{NG}\,(6,6,6) - p_{NG}\,(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 0, y = 6\,, z = 9, a = 3, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}\,(0,6,9) \leq p_{NG}\,(0 * 6,6 * 6,9 * 6) = p_{NG}\,(0,6,6)$ olup

$p_{NG}\,(0,6,6) \leq p_{NG}\,(0,3,3) + p_{NG}\,(3,6,6) - p_{NG}\,(3,3,3)$ sağlanır.

$x = 0, y = 9\,, z = 6, a = 3, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}\,(0,9,6) \leq p_{NG}\,(0 * 6,9 * 6,6 * 6) = p_{NG}\,(0,6,6)$ olup

$p_{NG}(0,6,6) \leq p_{NG}(0,3,3) + p_{NG}(3,9,6) - p_{NG}(3,3,3)$ sağlanır.

$x = 3, y = 6, z = 9, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,6,9) \leq p_{NG}(3 * 9, 6 * 9, 9 * 9) = p_{NG}(3,6,9)$ olup

$p_{NG}(9,6,9) \leq p_{NG}(3,6,9) + p_{NG}(9,6,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 9, z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,9,6) \leq p_{NG}(3 * 9, 9 * 9, 6 * 9) = p_{NG}(3,9,6)$ olup

$p_{NG}(3,9,6) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,9,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 0, z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,0,6) \leq p_{NG}(3 * 9, 0 * 9, 6 * 9) = p_{NG}(3,0,6)$ olup

$p_{NG}(3,0,6) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,0,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 6, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,6,0) \leq p_{NG}(3 * 9, 6 * 9, 0 * 9) = p_{NG}(3,6,0)$ olup

$p_{NG}(3,6,0) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 9, z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,9,0) \leq p_{NG}(3 * 9, 9 * 9, 0 * 9) = p_{NG}(3,9,0)$ olup

$p_{NG}(3,9,0) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,9,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 0, z = 9, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,0,9) \leq p_{NG}(3 * 9, 0 * 9, 9 * 9) = p_{NG}(3,0,9)$ olup

$p_{NG}(3,0,9) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,0,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 0 , z = 3, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,0,3) \leq p_{NG}(6 * 9,0 * 9,3 * 9) = p_{NG}(6,0,3)$ olup

$p_{NG}(6,0,3) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 3 , z = 0, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,3,0) \leq p_{NG}(6 * 9,3 * 9,0 * 9) = p_{NG}(6,3,0)$ olup

$p_{NG}(6,3,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,3,0) - p_{NG}(3,3,3)$ sağlanır.

$x = 6, y = 3 , z = 9, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,3,9) \leq p_{NG}(6 * 9,3 * 9,9 * 9) = p_{NG}(6,3,9)$ olup

$p_{NG}(6,3,9) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,3,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 9 , z = 3, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,9,3) \leq p_{NG}(6 * 9,9 * 9,3 * 9) = p_{NG}(6,9,3)$ olup

$p_{NG}(6,9,3) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,9,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 0 , z = 9, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,0,9) \leq p_{NG}(6 * 9,0 * 9,9 * 9) = p_{NG}(6,0,9)$ olup

$p_{NG}(6,0,9) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 9 , z = 0, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,9,0) \leq p_{NG}(6 * 9,9 * 9,0 * 9) = p_{NG}(6,9,0)$ olup

$p_{NG}(6,9,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,9,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 0 , z = 3, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,0,3) \leq p_{NG}(9 * 9,0 * 9,3 * 9) = p_{NG}(9,0,3)$ olup

$p_{NG}(9,0,3) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,0,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 3 , z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,3,0) \leq p_{NG}(9 * 9,3 * 9,0 * 9) = p_{NG}(9,3,0)$ olup

$p_{NG}(9,3,0) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,3,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 3 , z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,3,6) \leq p_{NG}(9 * 9,3 * 9,6 * 9) = p_{NG}(9,3,6)$ olup

$p_{NG}(9,3,6) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,3,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 6 , z = 3, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,6,3) \leq p_{NG}(9 * 9,6 * 9,3 * 9) = p_{NG}(9,6,3)$ olup

$p_{NG}(9,6,3) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,6,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 6 , z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,6,0) \leq p_{NG}(9 * 9,6 * 9,0 * 9) = p_{NG}(9,6,0)$ olup

$p_{NG}(9,6,0) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 0, y = 0 , z = 3, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(0,0,3) \leq p_{NG}(0 * 6,0 * 6,3 * 6) = p_{NG}(0,0,6)$ olup

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,0,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 0, y = 3, z = 0, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(0,3,0) \leq p_{NG}(0 * 6, 3 * 6, 0 * 6) = p_{NG}(0,6,0)$ olup

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 0, z = 0, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,3,0) \leq p_{NG}(3 * 6, 0 * 6, 0 * 6) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,6,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 0, y = 0, z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0 * 9, 0 * 9, 6 * 6) = p_{NG}(0,0,6)$ olup

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 0, y = 6, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0 * 9, 6 * 9, 0 * 9) = p_{NG}(0,6,0)$ olup

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 0, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6 * 9, 0 * 9, 0 * 9) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 0, y = 0, z = 9, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(0,0,9) \leq p_{NG}(0 * 9, 0 * 9, 9 * 9) = p_{NG}(0,0,9)$ olup

$p_{NG}(0,0,9) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 0, y = 9, z = 9, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(0,9,0) \leq p_{NG}(0 * 9, 9 * 9, 0 * 9) = p_{NG}(0,9,0)$ olup

$p_{NG}(0,9,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 0, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,0,0) \leq p_{NG}(9 * 9, 0 * 9, 0 * 9) = p_{NG}(9,0,0)$ olup

$p_{NG}(9,0,0) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 3, z = 0, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,0,0) \leq p_{NG}(3 * 6, 3 * 6, 0 * 6) = p_{NG}(6,6,0)$ olup

$p_{NG}(6,6,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,6,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 0, z = 3, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,0,3) \leq p_{NG}(3 * 6, 0 * 6, 3 * 6) = p_{NG}(6,0,6)$ olup

$p_{NG}(6,0,6) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 0, y = 3, z = 3, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(0,3,3) \leq p_{NG}(0 * 6, 3 * 6, 3 * 6) = p_{NG}(0,0,6)$ olup

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 3, z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,3,6) \leq p_{NG}(3 * 9, 3 * 9, 6 * 6) = p_{NG}(3,3,6)$ olup

$p_{NG}(3,3,6) \leq\ p_{NG}(3,9,9) +\ p_{NG}(9,3,6) -\ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 6\ , z = 3, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,6,3) \leq\ p_{NG}(3 * 9,6 * 9,3 * 9) =\ p_{NG}(3,6,3)$ olup

$p_{NG}(3,6,3) \leq\ p_{NG}(3,9,9) +\ p_{NG}(9,6,3) -\ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 3\ , z = 3, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,3,3) \leq\ p_{NG}(6 * 9,3 * 9,3 * 9) =\ p_{NG}(6,3,3)$ olup

$p_{NG}(6,3,3) \leq\ p_{NG}(6,9,9) +\ p_{NG}(9,3,3) -\ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 3\ , z = 9, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,3,9) \leq\ p_{NG}(3 * 9,3 * 9,9 * 9) =\ p_{NG}(3,3,9)$ olup

$p_{NG}(3,3,9) \leq\ p_{NG}(3,9,9) +\ p_{NG}(9,3,9) -\ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 9\ , z = 3, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,9,3) \leq\ p_{NG}(3 * 9,9 * 9,3 * 9) =\ p_{NG}(3,9,3)$ olup

$p_{NG}(3,9,3) \leq\ p_{NG}(3,9,9) +\ p_{NG}(9,9,3) -\ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 3\ , z = 3, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,3,3) \leq\ p_{NG}(9 * 9,3 * 9,3 * 6) =\ p_{NG}(9,3,3)$ olup

$p_{NG}(9,3,3) \leq\ p_{NG}(9,9,9) +\ p_{NG}(9,3,3) -\ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 6\ , z = 0, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,6,0) \leq\ p_{NG}(6 * 9,6 * 9,0 * 9) =\ p_{NG}(6,6,0)$ olup

$p_{NG}(6,6,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 0, z = 6, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,0,6) \leq p_{NG}(6 * 9, 0 * 9, 6 * 9) = p_{NG}(6,0,6)$ olup

$p_{NG}(6,0,6) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 0, y = 6, z = 6, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(0,6,6) \leq p_{NG}(0 * 9, 6 * 9, 6 * 9) = p_{NG}(0,6,6)$ olup

$p_{NG}(0,6,6) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,6,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 6, z = 3, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,6,3) \leq p_{NG}(6 * 9, 6 * 9, 3 * 9) = p_{NG}(6,6,3)$ olup

$p_{NG}(6,6,3) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,6,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 3, z = 6, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,3,6) \leq p_{NG}(6 * 9, 3 * 9, 6 * 9) = p_{NG}(6,3,6)$ olup

$p_{NG}(6,3,6) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,3,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 6, z = 6, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,6,6) \leq p_{NG}(3 * 9, 6 * 9, 6 * 9) = p_{NG}(3,6,6)$ olup

$p_{NG}(3,6,6) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,6,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 6, z = 3, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,6,3) \leq p_{NG}(6 * 9, 6 * 9, 3 * 9) = p_{NG}(6,6,3)$ olup

$p_{NG}(6{,}6{,}3) \leq p_{NG}(6{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}6{,}3) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 6, z = 9, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6{,}6{,}9) \leq p_{NG}(6 * 9{,}6 * 9{,}9 * 9) = p_{NG}(6{,}6{,}9)$ olup

$p_{NG}(6{,}6{,}9) \leq p_{NG}(6{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}6{,}9) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 9, z = 6, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6{,}9{,}6) \leq p_{NG}(6 * 9{,}9 * 9{,}6 * 9) = p_{NG}(6{,}9{,}6)$ olup

$p_{NG}(6{,}9{,}6) \leq p_{NG}(6{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}9{,}6) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 6, z = 6, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(3{,}6{,}6) \leq p_{NG}(3 * 9{,}6 * 9{,}6 * 9) = p_{NG}(3{,}6{,}6)$ olup

$p_{NG}(3{,}6{,}6) \leq p_{NG}(3{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}6{,}6) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 9, z = 0, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9{,}9{,}0) \leq p_{NG}(9 * 9{,}9 * 9{,}0 * 9) = p_{NG}(9{,}9{,}0)$ olup

$p_{NG}(9{,}9{,}0) \leq p_{NG}(9{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}9{,}0) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 0, z = 9, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9{,}0{,}9) \leq p_{NG}(9 * 9{,}0 * 9{,}9 * 9) = p_{NG}(9{,}0{,}9)$ olup

$p_{NG}(9{,}0{,}9) \leq p_{NG}(9{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}0{,}9) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 0, y = 9, z = 9, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(0{,}9{,}9) \leq p_{NG}(0 * 9{,}9 * 9{,}9 * 9) = p_{NG}(0{,}9{,}9)$ olup

$p_{NG}(0,9,9) \leq \ p_{NG}(0,9,9) + \ p_{NG}(9,9,9) - \ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 9\ , z = 3, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,9,3) \leq \ p_{NG}(9 * 9,9 * 9,3 * 9) = \ p_{NG}(9,9,3)$ olup

$p_{NG}(9,9,3) \leq \ p_{NG}(9,9,9) + \ p_{NG}(9,9,3) - \ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 3\ , z = 9, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,3,9) \leq \ p_{NG}(9 * 9,3 * 9,9 * 9) = \ p_{NG}(9,3,9)$ olup

$p_{NG}(9,3,9) \leq \ p_{NG}(9,9,9) + \ p_{NG}(9,3,9) - \ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 9\ , z = 6, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,9,6) \leq \ p_{NG}(9 * 9,9 * 9,6 * 9) = \ p_{NG}(9,9,6)$ olup

$p_{NG}(9,9,6) \leq \ p_{NG}(9,9,9) + \ p_{NG}(9,9,6) - \ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 6\ , z = 9, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,6,9) \leq \ p_{NG}(9 * 9,6 * 9,9 * 9) = \ p_{NG}(9,6,9)$ olup

$p_{NG}(9,6,9) \leq \ p_{NG}(9,9,9) + \ p_{NG}(9,6,9) - \ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 9\ , z = 9, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,9,9) \leq \ p_{NG}(6 * 9,9 * 9,9 * 9) = \ p_{NG}(6,9,9)$ olup

$p_{NG}(6,9,9) \leq \ p_{NG}(6,9,9) + \ p_{NG}(9,9,9) - \ p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 0, y = 0\ , z = 0, a = 9,$ etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(0,0,0) \leq \ p_{NG}(0 * 9,0 * 9,0 * 9) = \ p_{NG}(0,0,0)$ olup

$p_{NG}\,(0,0,0) \leq\; p_{NG}\,(0,9,9) +\; p_{NG}\,(9,0,0) -\; p_{NG}\,(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 3\,, z = 3, a = 6$, etkisiz(a) $= 6$ için

$p_{NG}\,(3,3,3) \leq\; p_{NG}\,(3 * 6,3 * 6,3 * 6) =\; p_{NG}\,(6,6,6)$ olup

$p_{NG}\,(6,6,6) \leq\; p_{NG}\,(6,6,6) +\; p_{NG}\,(6,6,6) -\; p_{NG}\,(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 6, y = 6\,, z = 6, a = 9$, etkisiz(a) $= 9$ için

$p_{NG}\,(6,6,6) \leq\; p_{NG}\,(6 * 9,6 * 9,6 * 9) =\; p_{NG}\,(6,6,6)$ olup

$p_{NG}\,(6,6,6) \leq\; p_{NG}\,(6,9,9) +\; p_{NG}\,(9,6,6) -\; p_{NG}\,(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 9\,, z = 9, a = 9$, etkisiz(a) $= 9$ için

$p_{NG}\,(9,9,9) \leq\; p_{NG}\,(9 * 9,9 * 9,9 * 9) =\; p_{NG}\,(9,9,9)$ olup

$p_{NG}\,(9,9,9) \leq\; p_{NG}\,(9,,6)9 +\; p_{NG}\,(9,9,9) -\; p_{NG}\,(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 0\,, z = 0, a = 4$, etkisiz(a) $= 4$ için

$p_{NG}\,(4,0,0) \leq\; p_{NG}\,(4 * 4,0 * 4,0 * 4) =\; p_{NG}\,(40,0)$ olup

$p_{NG}\,(4,0,0) \leq\; p_{NG}\,(4,4,4) +\; p_{NG}\,(4,0,0) -\; p_{NG}\,(4,4,4)$ sağlanır.

$x = 4, y = 0\,, z = 3, a = 6$, etkisiz(a) $= 6$ için

$p_{NG}\,(4,0,3) \leq\; p_{NG}\,(4 * 6,0 * 6,3 * 6) =\; p_{NG}\,(0,0,6)$ olup

$p_{NG}\,(4,0,3) \leq\; p_{NG}\,(4,6,6) +\; p_{NG}\,(6,0,3) -\; p_{NG}\,(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 3\,, z = 0, a = 6$, etkisiz(a) $= 6$ için

$p_{NG}\,(4,3,0) \leq\; p_{NG}\,(4 * 6,3 * 6,0 * 6) =\; p_{NG}\,(0,6,0)$ olup

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 0 , z = 4, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,0,4) \leq p_{NG}(3 * 6,0 * 6,4 * 6) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 4 , z = 0, a = 6, \text{etkisiz}(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,4,0) \leq p_{NG}(3 * 6,4 * 6,0 * 6) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 0 , z = 4, a = 4, \text{etkisiz}(a) = 4$ için

$p_{NG}(4,0,4) \leq p_{NG}(4 * 4,0 * 4,4 * 4) = p_{NG}(4,0,4)$ olup

$p_{NG}(4,0,4) \leq p_{NG}(4,4,4) + p_{NG}(4,0,4) - p_{NG}(4,4,4)$ sağlanır.

$x = 4, y = 4 , z = 0, a = 4, \text{etkisiz}(a) = 4$ için

$p_{NG}(4,4,0) \leq p_{NG}(4 * 4,4 * 4,0 * 4) = p_{NG}(4,4,0)$ olup

$p_{NG}(4,4,0) \leq p_{NG}(4,4,4) + p_{NG}(4,4,0) - p_{NG}(4,4,4)$ sağlanır.

$x = 0, y = 4 , z = 4, a = 4, \text{etkisiz}(a) = 4$ için

$p_{NG}(0,4,4) \leq p_{NG}(0 * 4,4 * 4,4 * 4) = p_{NG}(0,4,4)$ olup

$p_{NG}(0,4,4) \leq p_{NG}(0,4,4) + p_{NG}(4,4,4) - p_{NG}(4,4,4)$ sağlanır.

$x = 4, y = 0 , z = 6, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,0,6) \leq p_{NG}(4 * 9,0 * 9,6 * 9) = p_{NG}(0,0,6)$ olup

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,6) - p_{NG}(4,4,4)$ sağlanır.

$x = 4, y = 6, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,6,0) \leq p_{NG}(4 * 9,6 * 9,0 * 9) = p_{NG}(0,6,0)$ olup

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 4, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,4,0) \leq p_{NG}(6 * 9,4 * 9,0 * 9) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 0, z = 4, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,0,4) \leq p_{NG}(6 * 9,0 * 9,4 * 9) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 0, z = 9, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,0,9) \leq p_{NG}(4 * 9,0 * 9,9 * 9) = p_{NG}(0,0,9)$ olup

$p_{NG}(0,0,9) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 9, z = 0, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,9,0) \leq p_{NG}(4 * 9,9 * 9,0 * 9) = p_{NG}(0,9,0)$ olup

$p_{NG}(0,9,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,9,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 0, z = 4, a = 9, \text{etkisiz}(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,0,4) \leq p_{NG}(9 * 9,0 * 9,4 * 9) = p_{NG}(9,0,0)$ olup

$p_{NG}(9,0,0) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 4 , z = 0, a = 9$, etkisiz(a) = 9 için

$p_{NG}(9,4,0) \leq p_{NG}(9 * 9,4 * 9,0 * 9) = p_{NG}(9,0,0)$ olup

$p_{NG}(9,0,0) \leq p_{NG}(9,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 3 , z = 3, a = 3$, etkisiz(a) = 3 için

$p_{NG}(4,3,3) \leq p_{NG}(4 * 6,3 * 6,3 * 6) = p_{NG}(0,6,6)$ olup

$p_{NG}(0,6,6) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 3 , z =, a = 3$, etkisiz(a) = 6 için

$p_{NG}(4,3,4) \leq p_{NG}(4 * 6,3 * 6,4 * 6) = p_{NG}(0,6,0)$ olup

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 4 , z = 3, a = 3$, etkisiz(a) = 3 için

$p_{NG}(4,4,3) \leq p_{NG}(4 * 6,4 * 6,3 * 6) = p_{NG}(0,0,6)$ olup

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,0,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 4 , z = 4, a = 3$, etkisiz(a) = 3 için

$p_{NG}(3,4,4) \leq p_{NG}(3 * 6,4 * 6,4 * 6) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 3 , z = 6, a = 9$, etkisiz(a) = 9 için

$p_{NG}(4,3,6) \leq p_{NG}(4 * 9,3 * 9,6 * 9) = p_{NG}(0,3,6)$ olup

$p_{NG}(0,3,6) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,3,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 6, z = 3, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,6,3) \leq p_{NG}(4 * 9,6 * 9,3 * 9) = p_{NG}(0,6,3)$ olup

$p_{NG}(0,6,3) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,6,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 4, z = 3, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,4,3) \leq p_{NG}(6 * 9,4 * 9,3 * 9) = p_{NG}(6,0,3)$ olup

$p_{NG}(6,0,3) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,3) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 3, z = 4, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,3,4) \leq p_{NG}(6 * 9,3 * 9,4 * 9) = p_{NG}(6,3,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,3) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,3,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 6, z = 4, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,6,4) \leq p_{NG}(3 * 9,6 * 9,4 * 9) = p_{NG}(3,6,0)$ olup

$p_{NG}(3,6,0) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 3, y = 4, z = 6, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(3,4,6) \leq p_{NG}(3 * 9,4 * 9,6 * 9) = p_{NG}(3,0,6)$ olup

$p_{NG}(3,0,6) \leq p_{NG}(3,9,9) + p_{NG}(9,0,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 3, z = 9, a = 6$, etkisiz$(a) = 6$ için

$p_{NG}(4,3,9) \leq p_{NG}(4 * 6,3 * 6,9 * 6) = p_{NG}(0,6,6)$ olup

$p_{NG}(0,6,6) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 9, z = 3, a = 6, etkisiz(a) = 6$ için

$p_{NG}(4,9,3) \leq p_{NG}(4 * 6, 9 * 6, 3 * 6) = p_{NG}(0,6,6)$ olup

$p_{NG}(0,6,6) \leq p_{NG}(0,6,6) + p_{NG}(6,6,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 9, y = 4, z = 3, a = 6, etkisiz(a) = 6$ için

$p_{NG}(9,4,3) \leq p_{NG}(9 * 6, 4 * 6, 3 * 6) = p_{NG}(6,0,6)$ olup

$p_{NG}(6,0,6) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 9, y = 3, z = 4, a = 6, etkisiz(a) = 6$ için

$p_{NG}(9,3,4) \leq p_{NG}(9 * 6, 3 * 6, 4 * 6) = p_{NG}(6,6,0)$ olup

$p_{NG}(6,6,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,6,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 9, z = 4, a = 6, etkisiz(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,9,4) \leq p_{NG}(3 * 6, 9 * 6, 4 * 6) = p_{NG}(6,6,0)$ olup

$p_{NG}(6,6,0) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,6,0) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 3, y = 4, z = 9, a = 6, etkisiz(a) = 6$ için

$p_{NG}(3,4,9) \leq p_{NG}(3 * 6, 4 * 6, 9 * 6) = p_{NG}(6,0,6)$ olup

$p_{NG}(6,0,6) \leq p_{NG}(6,6,6) + p_{NG}(6,0,6) - p_{NG}(6,6,6)$ sağlanır.

$x = 4, y = 4, z = 4, a = 4, etkisiz(a) = 4$ için

$p_{NG}(4,4,4) \leq p_{NG}(4 * 4, 4 * 4, 4 * 4) = p_{NG}(4,4,4)$ olup

$p_{NG}(4,4,4) \leq p_{NG}(4,4,4) + p_{NG}(4,4,4) - p_{NG}(4,4,4)$ sağlanır.

$x = 4, y = 4 , z = 6, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,4,6) \leq p_{NG}(4 * 9,4 * 9,6 * 4) = p_{NG}(0,0,6)$ olup

$p_{NG}(0,0,6) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,6) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 6 , z = 4, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,6,4) \leq p_{NG}(4 * 9,6 * 9,4 * 4) = p_{NG}(0,6,0)$ olup

$p_{NG}(0,6,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,6,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 4 , z = 4, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,4,4) \leq p_{NG}(6 * 9,4 * 9,4 * 4) = p_{NG}(6,0,0)$ olup

$p_{NG}(6,0,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 4 , z = 4, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,4,9) \leq p_{NG}(4 * 9,4 * 9,9 * 4) = p_{NG}(0,0,9)$ olup

$p_{NG}(0,0,9) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,0,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 9 , z = 4, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(4,9,4) \leq p_{NG}(4 * 9,9 * 9,4 * 4) = p_{NG}(0,9,0)$ olup

$p_{NG}(0,9,0) \leq p_{NG}(0,9,9) + p_{NG}(9,9,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 9, y = 4 , z = 4, a = 9, etkisiz(a) = 9$ için

$p_{NG}(9,4,4) \leq p_{NG}(9 * 9,9 * 9,4 * 9) = p_{NG}(9,0,0)$ olup

$p_{NG}(9{,}0{,}0) \leq p_{NG}(9{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}0{,}0) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 6$, $z = 6, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(4{,}6{,}6) \leq p_{NG}(4 * 9{,}6 * 9{,}6 * 9) = p_{NG}(0{,}6{,}6)$ olup

$p_{NG}(0{,}6{,}6) \leq p_{NG}(0{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}6{,}6) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 4$, $z = 6, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6{,}4{,}6) \leq p_{NG}(6 * 9{,}4 * 9{,}6 * 9) = p_{NG}(6{,}0{,}6)$ olup

$p_{NG}(6{,}0{,}6) \leq p_{NG}(6{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}0{,}6) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 6$, $z = 4, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6{,}6{,}4) \leq p_{NG}(6 * 9{,}6 * 9{,}4 * 9) = p_{NG}(6{,}6{,}0)$ olup

$p_{NG}(6{,}6{,}0) \leq p_{NG}(6{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}6{,}0) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 6$, $z = 9, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(4{,}6{,}9) \leq p_{NG}(4 * 9{,}6 * 9{,}9 * 9) = p_{NG}(0{,}6{,}9)$ olup

$p_{NG}(0{,}6{,}9) \leq p_{NG}(0{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}6{,}9) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 4, y = 9$, $z = 6, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(4{,}9{,}6) \leq p_{NG}(4 * 9{,}9 * 9{,}6 * 9) = p_{NG}(0{,}9{,}0)$ olup

$p_{NG}(0{,}9{,}0) \leq p_{NG}(0{,}9{,}9) + p_{NG}(9{,}9{,}0) - p_{NG}(9{,}9{,}9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 9$, $z = 4, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6{,}9{,}4) \leq p_{NG}(6 * 9{,}9 * 9{,}4 * 9) = p_{NG}(6{,}9{,}0)$ olup

$p_{NG}(6,9,0) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,9,0) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

$x = 6, y = 4, z = 9, a = 9$, etkisiz$(a) = 9$ için

$p_{NG}(6,4,9) \leq p_{NG}(6 * 9, 4 * 9, 9 * 9) = p_{NG}(6,0,9)$ olup

$p_{NG}(6,0,9) \leq p_{NG}(6,9,9) + p_{NG}(9,0,9) - p_{NG}(9,9,9)$ sağlanır.

Sonuç olarak p_{NG} bir neutrosophic üçlü kısmi G metriktir (Şahin ve Kargın, 2020).

Tanım 4.2.21 $((X,*), p_{NG})$ ikilisi bir neutrosophic üçlü kısmi G metrik uzay $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

i) Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p_{NG}(x, x_n, x_m) - p_{NG}(x, x, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x e kısmi G-yakınsaktır denir.

ii) Eğer $\lim_{n,m,l\to\infty} p_{NG}(x_n, x_m, x_l) - p_{NG}(x, x, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine kısmi G-Cauchy dizisi denir.

iii) Her $\{x_n\}$ kısmi G-Cauchy dizisi kısmi G-Cauchy yakınsak ise $((X,*), p_{NG})$ ye neutrosophic üçlü tam kısmi G metrik uzay denir.

(Şahin ve Kargın, 2020).

Tanım 4.2.22: $(X, \#)$ bir neutrosophic üçlü küme olsun. $d_v: \to X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa d_v ye neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik denir. Her $a, b, u_1, \ldots u_v \in X$ için

i) $a\#b \in X$

ii) $0 \leq d_v(a, b)$

iii) Eğer $a = b$ ise $d_v(a, b) = 0$

iv) $d_v(a, b) = d_v(b, a)$

v) Eğer

$$d_v(a, b) \leq d_v(a, b\#\text{etkisiz}(u_v)),$$

$$d_v(a, u_2) \leq d_v(a, u_2\#\text{etkisiz}(u_1)),$$

$$d_v(u_1, u_3) \leq d_v(u_1, u_3\#\text{etkisiz}(u_2)),$$

$$\ldots,$$

$$d_v(u_{v-1}, b) \leq d_v(u_{v-1}, b\#\text{etkisiz}(u_v))$$

olacak şekilde birbirinden farklı $a, b, u_1, \ldots u_v \in X$ varsa

$$d_v(a, b\#\text{etkisiz}(u_v)) \leq d_v(a, u_1) + d_v(u_1, u_2) + \cdots d_v(u_{v-1}, u_v) + d_v(u_v, b)$$

olur.

$((X, \#), d_v)$ uzayına neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay denir (Şahin ve Kargın, 2018).

Tanım 4.2.23 $((X, \#), d_v)$ neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun.

- **i.** $a \in X$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ ve her $n \geq M$ için $d_v(a, x_n) < \epsilon$ olacak biçimde $N \in \mathbb{N}$ mevcutsa $\{x_n\}$ dizisi a noktasına v- yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ şeklinde gösterilir.
- **ii.** Eğer $\{x_n\}$ dizisi v-yakınsak ve $N \in \mathbb{N}$ için $d_v(x_n, x_m) < \epsilon$ ise $\{x_n\}$ dizisine bir v-Cauchy dizisi denir.

(Şahin ve Kargın, 2018).

Örnek 4.2.24 $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_2\}\}$ olsun. $\mathcal{F}$ kümesi birleşme işlemi ile bir neutrosophic üçlü kümedir. Burada neutrosophic üçlüler $A \in \mathcal{F}$ olmak üzere (A, A, A) dır.

$B \in \mathcal{F}$ olmak üzere $d_v: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ fonksiyonu

$$d_v(A, B) = \left|m(A) + 2^{m(A)} - \left(m(B) + 2^{m(B)}\right)\right|$$

şeklinde tanımlansın.

i) $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır.

ii) $d_{\mathrm{v}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \left|\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})} - \left(\mathrm{m}(\mathrm{B}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{B})}\right)\right| \geq 0$ dır.

iii) Eğer $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ ise

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{v}}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= \left|\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})} - \left(\mathrm{m}(\mathrm{B}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{B})}\right)\right| \\ &= \left|\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})} - \left(\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})}\right)\right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

iv)
$$\begin{aligned} d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) &= \left|\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})} - \left(\mathrm{m}(\mathrm{B}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{B})}\right)\right| \\ &= \left|-\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})} - \left(\mathrm{m}(\mathrm{B}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{B})}\right)\right| \\ &= \left|\mathrm{m}(\mathrm{B}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{B})} - \left(\mathrm{m}(\mathrm{A}) + 2^{\mathrm{m}(\mathrm{A})}\right)\right| \\ &= d_{\mathrm{v}}(\mathrm{B}, \mathrm{A}) \text{ dır.} \end{aligned}$$

v)
$$\begin{aligned} &d_{\mathrm{v}}(\{w_2\}, \{w_1, w_2\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\{w_2\}, \{w_1, w_2\} \cup w_1) \\ &d_{\mathrm{v}}(\{w_1\}, \{w_1, w_2\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\{w_1\}, \{w_1, w_2\} \cup \{w_2\}) \\ &d_{\mathrm{v}}(\{w_1\}, \{w_2\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\{w_1\}, \{w_2\} \cup \emptyset) \\ &d_{\mathrm{v}}(\{w_2\}, \{w_1\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\{w_2\}, \{w_1\} \cup \emptyset) \\ &d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_1\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_1\} \cup \{w_2\}) \\ &d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_2\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_2\} \cup \{w_1\}) \\ &d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_1, w_2\}) \leq d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_1, w_2\} \cup \{w_2\}) \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} &d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_1\}) = 2 \\ &d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_2\}) = 2 \\ &d_{\mathrm{v}}(\emptyset, \{w_1, w_2\}) = 5 \\ &d_{\mathrm{v}}(\{w_1\}, \{w_2\}) = 0 \\ &d_{\mathrm{v}}(\{w_1, w_2\}, \{w_1\}) = 3 \\ &d_{\mathrm{v}}(\{w_1, w_2\}, \{w_2\}) = 3 \end{aligned}$$

olduğundan

$$d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_2\}) < d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_1,w_2\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_1,w_2\},\{w_1\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\{w_2\}))$$
$$d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_1\}) < d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_1,w_2\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_1,w_2\},\{w_2\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_2\},\{w_1\}))$$
$$d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\{w_2\}) < d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\{w_1,w_2\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_1,w_2\},\emptyset) + d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_2\}))$$
$$d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\{w_1,w_2\}) < d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\{w_2\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_2\},\emptyset) + d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_1,w_2\}))$$
$$d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\{w_1,w_2\}) < d_{\mathrm{v}}(\{w_2\},\{w_1\}) + d_{\mathrm{v}}(\{w_1\},\emptyset) + d_{\mathrm{v}}(\emptyset,\{w_1,w_2\}))$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. Böylelikle $((\mathcal{F},\cup),d_{\mathrm{v}})$ bir neutrosophic üçlü v-genelleştirilmiş metrik uzay olur (Şahin ve Kargın, 2018).

KAYNAKLAR

Atanassov, T. K., (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst. 20*,87–96.

Boriceanu, M. (2009). Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metric, studia, univ Babes, Bolya: Math, Liv (3), 1-14.

Boriceanu, M. Bota, M. & Petrusel, A. (2010). Multivalued fractals in b−metric spaces. *Cent. Eur. J. Math, 8* (2), 367-377. htps:// doi: 10.2478/s11533-010-0009-4.

Branciari, A. (2000). A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. *Publ. Math. Debrecen 57*, 31–37.

Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Math. Inform. Univ. Ostrav. 1*, 5-11.

Czerwik, S. (2014). Partial b-metric spaces and fixed point theorems. *Mediterranean journal of mathematics 11*(2) htps://doi:10.1007/s00009-013-0327-4.

Demiralp, Sibel. (2021). Fixed point theorem on neutrosophic triplet b-metric space. *Neutrosophic Sets and Systems 47*, 385-396.

Kandasamy, WBV. Smarandache, F. (2004). Basic neutrosophic algebraic structures and their applications to fuzzy and neutrosophic models. *Hexis, Frontigan*, 219.

Ma, Z., Nazam, M., Ullah Khan, S., & Li, X. (2018). Fixed point theorems for generalized αs-ψ-contractions with applications. *Hindawi Journal of Function Spaces Volume* Article ID 8368546, 1-10. https://doi.org/10.1155/2018/8368546.

Matthews. S. G. (1992). Partial metric topology. Research Report 212, *Dept. of Computer Science*, University of Warwick.

Mustafa, Z. & Sims, B. (2006). A new approach to generalized metric spaces. *J. Nonlinear Convex Anal. 7*(2), 289-297.

Özkan, M. M. (2003). *Bulanık Hedef Programlama*. Bursa: Ekin Kitabevi

S. Chandok, Deepak Kumar & M. Khan. (2015). Some Results In Partial Metric Space Using Auxiliary Functions, 233-240.

Smarandache, F. (1998). A Unifying Field in Logics. Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set and Logic. *American Research Press, Rehoboth.*

Smarandache, F. & Ali, M. (2016). Neutrosophic triplet group. *Neural Computing and Applications*, 1-7. https://doi.org/10.1007/s00521-016-2535-x.

Smarandache F. & Ali, M. (2016). Neutrosophic triplet as extension of matter plasma, unmatter plasma and antimatter plasma, *APS Gaseous Electronics Conference*, https://doi:10.1103/baps.2016.gec.ht6.110.

Soykan, Y. (2012). *Metrik uzaylar ve topolojisi.* 1. Baskı, Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Şahin, M. & Kargın, A. (2017) Neutrosophic triplet normed space, *Open Physics*, *15*, 697-704. https://doi.org/10.1515/phys-2017-0082.

Şahin, M. & Kargın, A. (2019). Neutrosophic triplet b – metric space, neutrosophic triplet *ResearchGate 1*, 79 -89.

Şahin, M. & Kargın, A. (2018). Neutrosophic triplet v-generalized metric space. *Axioms, 7*(3), 67. https://doi.org/10.3390/axioms7030067.

Şahin, M. Kargın, A. & Yücel, M. (2020). Neutrosophic triplet partial g-metric spaces. *Neutrosophic Sets and Systems 33,* 116-133.

Şahin, M. Kargın, A., & M, Ali. (2018). Fixed point theorem for neutrosophic triplet partial metric space. *Symmetry*,*10*(7),240. https://doi.org/10.3390/sym10070240.

Şahin, M. Kargın, A., & Yücel, M. (2020). *Neutrosophic triplet g - metric space. Neutrosophic Quadruple Research 1*(13), 181 – 202. https://doi.org/10.5281/zenodo.3782864.

Şahin, M. & Kargin, A. (2019). Neutrosophic triplet b-metric space. Neutrosophic triplet structures. *Neutrosophic Science International Association*, 79-88.

Zadeh, L.A. (1965). *Fuzzy sets ınformation and control*. *8(*3), 338-335