T.C.

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ r-PELL VE r-PELL LUCAS DİZİLERİ

BURHAN ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

PROF. DR. GÖKSAL BİLGİCİ

TEMMUZ - 2023

KASTAMONU

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Burhan ÇETİN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ r- PELL VE r-PELL LUCAS DİZİLERİ

BURHAN ÇETİN

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. GÖKSAL BİLGİCİ

Pell ve Pell-Lucas dizileri tamsayı dizileri arasında iyi bilinen iki dizidir. Literatürde bu iki dizinin genelleştirmeleri üzerine yürütülmüş birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan biri Brod (2019) tarafından tanımlanan *r*–Pell sayılarıdır. Bu tezde öncelikle *r*–Pell sayılarına uygun olan *r*–Pell–Lucas sayıları tanımlanacak ve bu iki sayı dizisine ait olan üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri elde edilecektir. Daha sade sonuçlar elde edebilmek için Pell ve Pell–Lucas sayı dizilerinin yeni genelleştirilmelerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ikinci genelleştirme 2. tip olarak isimlendirildikten sonra bu dört sayı dizisine ait başta Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri olmak üzere birçok özdeşlik elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, r-Pell sayıları, r-Pell-Lucas sayıları.

Temmuz 2023, 72 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

GENERALIZED r-PELL AND r-PELL-LUCAS SEQUENCES

BURHAN ÇETİN

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR:PROF.DR. GÖKSAL BİLGİCİ

Pell and Pell-Lucas sequences are two well-known sequences among integer sequences. There are many studies in the literature on the generalizations of these two sequences. One of them is the *r*–Pell numbers defined by Brod (2019). In this thesis, first of all, *r*–Pell–Lucas numbers suitable for *r*–Pell numbers are defined, their generating functions and Binet formulas for these two integer sequences are obtained. A new generalization of the Pell and Pell–Lucas number sequences is needed to obtain simpler results. After this second generalization is named as the 2nd type, many identities are obtained, such as Vajda's, Catalan's, Cassini's and d'Ocagne's identities, for these four number sequences.

KEYWORDS: Pell numbers, Pell-Lucas numbers, r-Pell numbers, r-Pell-Lucas numbers

July 2023, 72 Page

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda katkısı bulunan ve benimle aynı sıkıntıyı paylaşan en başta eşim Öznur Çetin’e daha sonra danışmanım Prof. Dr. Göksal Bilgici hocama ve bugüne kadar beni yetiştiren ve üzerimde katkısı bulunan tüm hocalarıma teşekkür ediyorum.

BURHAN ÇETİN

Kastamonu, 2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\boldsymbol{P_n}$	: Pell Dizisinin n -yinci Terimi.
$\boldsymbol{Q_n}$	: Pell-Lucas Dizisinin n- yinci Terimi.
$\boldsymbol{\gamma}$	:Pell ve Pell−Lucas Dizisinin Karakteristik Denkleminin Pozitif Kökü.
$\boldsymbol{\delta}$	:Pell ve Pell − Lucas Dizisinin Karakteristik Denkleminin Negatif Kökü.
$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \boldsymbol{P_n}\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{n}}$	: Pell Dizisinin Üreteç Fonksiyonu.
$\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \boldsymbol{Q_n}\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{n}}$	: Pell-Lucas Dizisinin Üreteç Fonksiyonu.
$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})$	: 1. Tip r −Pell Dizisinin ω-yinci Terimi.
$\boldsymbol{r_1}$	:1. Tip r −Pell ve r − Pell− Lucas Dizisinin Karakteristik Denkleminin Pozitif Kökü.
$\boldsymbol{r_2}$	:1. Tip r −Pell ve r − Pell− Lucas Dizisinin Karakteristik Denkleminin Negatif Kökü.
$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})$	: 1. Tip r − Pell− Lucas Dizisinin ω-yinci Terimi.
$\sum_{\omega=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\omega}}$	:1.Tip r − Pell Dizisinin Üreteç Fonksiyonu.
$\sum_{\omega=0}^{\infty} \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\omega}}$	:1.Tip r − Pell− Lucas Dizisinin Üreteç Fonksiyonu.
$\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})$	: 2. Tip r −Pell Dizisinin ω- yinci Terimi.
$\tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})$	: 2. Tip r −Pell− Lucas Dizisinin ω- yinci Terimi.
$\sum_{\omega=0}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}^{\omega}$	:2. Tip r − Pell Dizisinin Üreteç Fonksiyonu.
$\sum_{\omega=0}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\omega}}$	:2. Tip r − Pell− Lucas Dizisinin Üreteç Fonksiyonu.
$\sum_{\omega=0}^{\omega-1} \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{x}^{\omega}$	:1. Tip r − Pell Dizisinin ω. Toplamı.
$\sum_{\omega=0}^{\omega-1} \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{x}^{\omega}$	:1.Tip r − Pell− Lucas Dizisinin ω. Toplamı.

1. GİRİŞ

Bu bölümde Pell ve Pell$-$Lucas tamsayı dizisi ile bu dizilerin genelleştirmeleri hakkında bilgi verilecektir.

1.1 Pell ve Pell- Lucas Sayıları

Pell tamsayı dizisi adını İngiliz matematikçi John Pell (1611-1685)'den alır. John Pell'in d pozitif tam kare olmayan bir tam sayı olmak üzere, $x^2 - dy^2 = (-1)^n$ Diophantine eşitliği üzerindeki çalışmalarından dolayı bu sayılara Pell tamsayı dizisi ismi verilmiştir (Koshy, 2014).

Pell dizisi başlangıç koşulları $P_0 = 0$ *ve* $P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bu dizinin oluşturduğu $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bazı elemanları 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, $\cdots$ şeklindedir.

Pell$-$Lucas dizisi de Pell dizisi ile aynı indirgeme bağıntısı yardımıyla tanımlanır. Yani, başlangıç koşulları $Q_0 = 1$ *ve* $Q_1 = 1$ olmak üzere, Pell$-$Lucas dizisi

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

indirgeme bağıntısını sağlar. Bu dizinin bazı elemanları $1, 1, 3, 7, 17, 41, \cdots$ şeklindedir. Pell ve Pell$-$Lucas dizisi arasında; $n \geq 1$ keyfi bir tamsayı olmak üzere

$$Q_n = P_n + P_{n-1}$$

ilişkisi vardır (Koshy, 2014). Bu eşitlik sayesinde Pell dizisi kullanılarak Pell$-$Lucas dizisi bulunabilir.

Pell dizisinin Binet formülü

$$\mathrm{P_n} = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve Pell−Lucas dizisinin Binet formülü

$$\mathrm{Q_n} = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

şeklindedir. Burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ sayıları $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Pozitif kök γ, gümüş oran olarak adlandırılır ve Fibonacci dizisindeki altın oran ile benzer bir rol oynar.

$\{\mathrm{P_n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\mathrm{Q_n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerini üreten fonksiyonlar sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2 - x}{1 - 2x - x^2}$$

dir.

Literatürde Pell ve Pell – Lucas tamsayı dizileri ve bu dizilerin genelleştirilmeleri ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır.

Koshy (2014) Pell ve Pell-Lucas sayılarından bahsetmiş, başlangıç koşullarını vermiş, indirgeme bağıntılarını tanımlamış, Binet formüllerine de yer vermiştir. Ayrıca Pell ve Pell-Lucas sayılarının matris özelliklerine ve determinantına yer vermiştir.

Catarino ve Campos (2017) k-Pell sayılarıyla ilgili; indirgeme bağıntısını başlangıç koşullarıyla birlikte vermiş, karakteristik denklemine ve denklemin köklerine yer vermiş daha sonra Binet formülünü ispatlayıp, üreteç fonksiyonunu ele aldıktan sonra, Catalan, Cassini, d'Ocagne özdeşliklerinin ispatına yer vermiştir.

Halıcı ve Daşdemir (2010) Pell, Pell-Lucas ve Modifiye Pell sayıları üzerine çalışmış, bu sayı dizileri için Binet formüllerini kullanılarak, bu diziler arasındaki bazı ilişkiler ortaya koymuş ve bulunan bu özellikler yardımıyla da bazı toplam formüllerini vermişlerdir.

Köken (2020) 3x3 boyutlu matrisler için, matrisin n. kuvvetinin elemanlarını bu matrislerin kuvvetlerine göre belirli pozitif tamsayı indisli Pell ve Pell-Lucas sayıları ile ilişkilendirilerek, özel Pell ve Pell-Lucas matrisleri üzerinde çalışmıştır.

Aynı zamanda Köken (2019) tarafından, değiştirilmiş yeni Pell ve Pell – Lucas sayıları tanımlanmış, bu dizilerin özellikleri incelenmiş, değiştirilmiş dizilerin en büyük ortak bölenleri (yani, EBOB) dizileri araştırılmış ve EBOB dizilerinin, Pell ve Pell- Lucas dizilerinin alt dizileri olduğu görülmüştür. Son olarak EBOB dizilerinin Binet formülü, Cassini, Catalan ve d'Ocagne'nin eşitlikleri elde edilmiştir.

Çelik, Durukan ve Özkan (2021) Pell sayılarını çokgenlerin her bir köşesine karşılık gelen bir sayı ile saat yönünde yerleştirmiştir. Daha sonra bir köşeye karşılık gelen sayılar arasındaki bir ilişki verilmiştir. Ayrıca bir n-gon'da *k*-yıncı köşede oluşan dizinin *m*-yinci terimini veren bir formül elde etmiştir. Aynı işlem Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları ile tekrarlamıştır.

Gianella ve Cerin (2006) çift terimli Pell-Lucas sayılarının karelerinin toplamları için çeşitli formüller kanıtlayıp, tek terimli Pell-Lucas sayılarının karelerinin toplamlarını, çift ve tek terimli Pell - Lucas sayılarının çarpımlarının toplamlarını ve bu toplamlara uygun Pell ve Pell-Lucas sayılarının çarpımlarıyla ilgili sonuçlar sunmuşlardır.

Menken ve Dişkaya (2019) Pell ve Pell-Lucas sayılarının bir birleşimi olan Fibonacci-Pell, Pell-Jacobsthal, Fibonacci-Pell-Jacobsthal dizilerini ele alıp bu dizilerin Binet formüllerini, üreteç fonksiyonlarını üstel üreteç fonksiyonlarını ve Binom formüllerini vermişlerdir.

Özkoç ve Gündüz (2022) çalışmasında kuadra Fibonacci-Pell Binom dönüşümü ele alınmıştır. Daha sonra tanımlanan dizi için Binom dönüşümü ve ardından Binom dönüşümünün yineleme ilişkisi, daha sonra Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve çeşitli toplam formülleri bulunmuştur. Daha sonra kuadra Fibonacci-Pell kuaterniyonu için Binom dönüşümü uygulanmıştır.

Torunbalcı Aydın (2018) çalışmasında bikompleks Pell ve bikompleks Pell-Lucas sayıları tanımlanmıştır. Bikompleks Pell ve bikompleks sayıların bazı cebirsel özellikleri; Bikompleks sayılar ile Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Ayrıca bunlar için Binet formülü, d'Ocagne, Cassini formülü ve Catalan formülü verilmiştir.

Melham (1999) çalışmasında $p = 2$ için Fibonacci sayılarının özel hali Pell sayılarını ve Lucas sayılarının da Pell-Lucas sayılarını verdiğini göstermiştir.

Bayrakçı Özsoy ve Bilgici (2022) sınırsız Pell ve Pell-Lucas hiper kompleks sayılarını tanımlamış. Daha sonra bu sayılar için Binet formüllerini, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini vermiştir.

Tokeşer, Mert, Ünal ve Bilgici (2021) çalışmalarında Pell ve Pell-Lucas sayılarını oktonyonlara genelleyip, bu sayılar için Binet formülleri, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini elde etmişlerdir.

Gökbaş (2022) çalışmasında dual Gauss-Pell ve dual Gauss-Pell-Lucas sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca negadual Gauss-Pell ve Gauss-Pell sayıları ile dual kompleks Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki ilişki de verilmiştir. Ayrıca dual Gauss-Pell ve Gauss-Pell-Lucas bazı cebirsel özellikleri ve bu sayılar için Binet fomülleri, üreteç fonksiyonu, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri verilmiştir.

Gökbaş (2023) başka bir çalışmasında Gauss-bihiperbolik Pell ve Pell-Lucas sayıları ve negaGauss-bihiperbolik Pell ve Pell-Lucas sayılarını tanımlanmış ve bu sayılar için Binet formülleri, üretici fonksiyonları, Catalan, Cassini ve d'Ocagne formüllerini ve bu sayıların cebirsel özellikleri ile toplam formüllerini vermiştir.

Panwar (2022) genelleştirilmiş Pell ve Pell-Lucas sayılarının toplam formüllerini verimiştir. Tülay Yağmur (2019) tarafından tanıtılan bu dizilere ek olarak bazı bağlantı formüllerini oluşturmuş ve bazı özdeşlikler türetilmiştir.

Halıcı ve Öz (2016) genelleştirilmiş Gauss-Fibonacci ve Gauss-Lucas sayılarını ele almış daha sonra Gauss-Pell ve Gauss-Pell-Lucas sayılarını tanımlamıştır ve bu dizilerin üreteç fonksiyonları ile Binet formüllerini elde etmiştir.

Szynal – Liana vd. (2022) çalışmalarında bihiperbolik Pell ve Pell-Lucas sayılarının bir genellemesi olan Pell ve Pell-Lucas bihipernomiyalları tanıtılmıştır. Bu çalışmada bihiperbolik sayılar hiperbolik sayıların dört boyuta genişletilmesidir.

Karaaslan (2019) değiştirilmiş Pell polinomlarını inceleyip üreteç fonksiyonunu tanımlamıştır. Daha sonra n-yinci değiştirilmiş Pell polinomlarının Binet formülünü ispatlayıp, polinomlar için toplam formülleri elde etmiştir. Ayrıca Catalan, Cassini, Cassini ve Gelin Gessero özdeşliklerini ispatlamıştır.

Özkan ve Uysal (2022) Gauss-Pell-Lucas polinomlarının yeni bir genellemesini tanımlayıp, üreteç fonksiyonunu, Binet formülünü, matris gösterimini vermiştir.

Daşdemir (2016) çalışmasında değiştirilmiş Pell ve Pell-Lucas sayıların genellemesini ve formüllerinin araştırılmasını ele almıştır.

Akbaba (2023) çalışmasında Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarıyla matrisler kullanarak bu sayılarla ilgili yeni özdeşlikler türetmiştir.

2. BİRİNCİ TİP r −PELL VE r −PELL−LUCAS SAYILARI

Bu bölümde Brod (2019) tarafından tanımlanan $r-$Pell sayıları birinci tip $r-$Pell sayıları olarak isimlendirilmiş ve kısaca izah edildikten sonra bu sayılarla ilişkili olan birinci tip $r-$ Pell$-$Lucas sayıları tanımlanmış, üreteç fonksiyonlarına ve Binet formüllerine yer verilmiştir.

2.1 Birinci Tip r − Pell Sayıları

2.1.1. Tanım Brod (2019) $\omega \geq 2$ ve $r \geq 1$ iki keyfi tam sayı ve başlangıç koşulları $Y(r,0)=2,\ Y(r,1)=1+2^{r+1}$

olmak üzere birinci tip $r-$Pell sayılarını

$$Y(r,\omega) = 2^{r}Y(r,\omega-1)+2^{r-1}Y(r,\omega-2) \qquad (2.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlamıştır. Buna göre birinci tip $r-$Pell sayılarının bazı terimleri

$$Y(r,0)=2,$$

$$Y(r,1)=1+2^{r+1},$$

$$Y(r,2)= 2^{r+1}+2.4^{r},$$

$$Y(r,3)= 2^{r-1}+3.4^{r}+2.8^{r},$$

$$Y(r,4)=\frac{3}{2}4^{r}+4.8^{r}+2.16^{r}.$$

şeklindedir. Kolayca görülebilir ki $Y(1,\omega+2)=P_n$ dir. Brod, birinci tip $r-$Pell sayılarının Binet formülünü

$$Y(r,\omega)=C_1r_1^{\omega}+C_2r_2^{\omega}$$

şeklinde vermiştir. Burada

$$r_1 = \frac{2^r + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}, \qquad r_2 = \frac{2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}$$

ve

$$C_1 = 1 + \frac{2^r + 1}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}, \qquad C_2 = 1 - \frac{2^r + 1}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

şeklindedir (Brod, 2019).

$x^2 - 2^r x - 2^{r-1} = 0$ denklemi birinci tip $r-$Pell dizisinin karakteristik denklemi olup kökleri r_1 ve r_2 dir.

2.2 Birinci Tip $r-$ Pell $-$Lucas Sayıları

2.2.1 Tanım $\omega \geq 2$ ve $r \geq 1$ iki keyfi tamsayı ve başlangıç koşulları, $Z(r,1) = 3 + 2^{r+1}$ olmak üzere birinci tip $r-$ Pell $-$Lucas sayıları

$$Z(r,\omega) = 2^r Z(r,\omega-1) + 2^{r-1} Z(r,\omega-2) \tag{2.2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlansın. Buna göre birinci tip $r-$Pell$-$Lucas sayılarının bazı terimleri

$$Z(r,0) = 2 + 2^{1-r},$$

$$Z(r,1) = 3 + 2^{r+1},$$

$$\mathrm{Z(r,2)} = 1 + 2^{\mathrm{r}+2} + 2.4^{\mathrm{r}},$$

$$\mathrm{Z(r,3)} = 2^{\mathrm{r}-1} + 2^{\mathrm{r}+1} + 5.4^{\mathrm{r}} + 2.8^{\mathrm{r}},$$

$$Z(r,4) = 2^{r-1} + \frac{9}{2}4^r + 6.8^r + 2.16^r,$$

şeklindedir.

2.2.2 Lemma (Brod, 2019)

$K = r_1 - r_2$ olmak üzere

$$M = r_1 + r_2 = 2^r, \tag{2.3}$$

$$r_1 r_2 = -2^{r-1} \tag{2.4}$$

ve

$$K = r_1 - r_2 = \sqrt{4^r + 2^{r+1}} \tag{2.5}$$

dir.

Brod makalesinde bu lemmayı ispatsız vermiştir. Burada bu eşitlikler ispatlanacaktır.

İspat. Yukarıda belirtilen r −Pell dizisinin karakteristik denklemin kökleri olan r_1 ve r_2 yi eşitlikte yerine yazalım.

$$M = r_1 + r_2 = \frac{2^r + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2} + \frac{2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}$$

$$= \frac{2^{r+1}}{2} = 2^r$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$r_1 r_2 = \left(\frac{2^r + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}\right)\left(\frac{2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}\right) = \frac{4^r - (4^r + 2^{r+1})}{4}$$

$$= \frac{-2^{r+1}}{4} = -2^{r-1}$$

ve

$$K = r_1 - r_2 = \frac{2^r + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2} - \frac{2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}$$

$$= \sqrt{4^r + 2^{r+1}}$$

bulunur.■

2.2.3 Teorem (Binet formülleri)

İki keyfi tam sayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere, $\omega -$yinci birinci tip r – Pell ve birinci tip $r -$Pell$-$Lucas sayıları sırasıyla

$$Y(r,\omega) = \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2} \qquad (2.6)$$

ve

$$Z(r,\omega) = \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 + r_2} \qquad (2.7)$$

dir. Burada

$1 + 2r_1 = r_1^{\vee}$ ve $1 + 2r_2 = r_2^{\vee}$ şeklindedir.

İspat.

Birinci tip $r -$Pell sayılarının Binet formülü

$$Y(r,\omega) = c_1 r_1^{\omega} + c_2 r_2^{\omega} \qquad (2.8)$$

olsun. $\omega = 0$ için

$$Y(r,0) = c_1 + c_2 = 2 \qquad (2.9)$$

ve $\omega = 1$ için

$$Y(r,1) = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 + 2^{r+1}$$

elde edilir. Son eşitlikte karakteristik denkleminin kökleri yerine yazılırsa

$$c_1\left[\frac{2^r + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}\right] + c_2\left[\frac{2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}\right] = 1 + 2^{r+1} \tag{2.10}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$2^r(c_1 + c_2) + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}(c_1 - c_2) = 2 + 2^{r+2}$$

elde edilir. Eş. (2.9), son eşitlikte yerine yazılır ve düzenlenirse

$$2^{r+1} + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}\,(c_1 - c_2) = 2 + 2^{r+2}$$

$$c_1 - c_2 = \frac{2 + 2^{r+1}}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}} \tag{2.11}$$

bulunur. Eş. (2.9) ve (2.11) ortak çözüm yapılıp taraf tarafa toplanırsa

$$c_1 = \frac{\sqrt{4^r + 2^{r+1}} + 2^r + 1}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

olur. (2.9) da c_1 yerine yazılırsa

$$c_2 = \frac{\sqrt{4^r + 2^{r+1}} - 2^r - 1}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

elde edilir. c_1 ve c_2 değerleri r_1 ve r_2 cinsinden yazılırsa

$$c_1 = \frac{1 + 2r_1}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

ve

$$c_2 = -\frac{1+2r_2}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

bulunur. Bu c_1 ve c_2 değerleri (2.8) de yerine yazılıp düzenlenirse

$$P(r,\omega) = \frac{1}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}[(1+2r_1)r_1^{\omega} - (1+2r_2)r_2^{\omega}]$$

$$= \frac{(1+2r_1)r_1^{\omega} - (1+2r_2)r_2^{\omega}}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

elde edilir ve (2.5) son eşitlikte yerine yazılırsa

$$Y(r,\omega) = \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

bulunur. Bu ise (2.6)'yı ispatlar Eş. (2.7) nin ispatı için birinci tip r −Pell−Lucas sayılarının Binet formülü

$$Z(r,\omega) = d_1 r_1^{\omega} + d_2 r_2^{\omega} \tag{2.12}$$

olsun. $\omega = 0$ için

$$Z(r,0) = d_1 + d_2 = 2 + 2^{1-r} \tag{2.13}$$

ve $\omega = 1$ için

$$Z(r,1) = d_1 r_1 + d_2 r_2 = 3 + 2^{r+1} \tag{2.14}$$

olduğu görülebilir. Eş. (2.14)'te karakteristik denkleminin kökleri yerine yazılırsa

$$d_1\left[\frac{2^r + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}\right] + d_2\left[\frac{2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2}\right] = 2^{r+1} + 3$$

elde edilir. Düzenlemelerden sonra

$$2^{r+2} + 6 = 2^r(d_1 + d_2) + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}\,(d_1 - d_2)$$

bulunur. (2.13) son eşitlikte kullanılırsa

$$2^{r+2} + 6 = 2^r(2 + 2^{1-r}) + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}\,(d_1 - d_2)$$

elde edilir. Buradan

$$d_1 - d_2 = \frac{2^{r+1} + 4}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}} \tag{2.15}$$

olur. Eş. (2.13) ve (2.15) taraf tarafa toplanırsa

$$2d_1 = 2 + 2^{1-r} + \frac{2^{r+1} + 4}{\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}$$

bulunur. Buradan

$$d_1 = 1 + 2^{-r} + \frac{(2^r + 2)\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{4^r + 2^{r+1}}$$

$$= 1 + 2^{-r} + \frac{(2^r + 2)\sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2^r(2^r + 2)}$$

ve gerekli sadeleştirmelerle

$$d_1 = \frac{2^r + 1 + \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2^r}$$

elde edilir. Eş. (2.13) de d_1 yerine yazılırsa

$$d_2 = \frac{1 + 2^r - \sqrt{4^r + 2^{r+1}}}{2^r}$$

bulunur. d_1 ve d_2 değerleri r_1 ve r_2 cinsinden yazılırsa

$$d_1 = \frac{1}{2^r} + \frac{r_1}{2^{r-1}} = \frac{1+2r_1}{2^r}$$

ve

$$d_2 = \frac{1}{2^r} + \frac{r_2}{2^{r-1}} = \frac{1+2r_2}{2^r}$$

elde edilir. d_1 ve d_2 değerleri (2.12) de yerine yazılırsa

$$Z(r,\omega) = \left[\frac{1+2r_1}{2^r}\right] r_1^{\omega} + \left[\frac{1+2r_2}{2^r}\right] r_2^{\omega}$$

$$= \frac{1}{2^r}\left[(1+2r_1)r_1^{\omega} + (1+2r_2)r_2^{\omega}\right]$$

olur. Buradan

$$Z(r,\omega) = \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki lemmaya bazı özdeşliklerin ispatında ihtiyaç duyulacaktır.

2.2.4 Lemma

r_1 ve r_2 yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere

$$r_1^{\vee} r_2^{\vee} = 1$$

dir.

İspat. $r_1^{\vee}$ ve $r_2^{\vee}$ yukarıda Teorem 2.1. deki gibi olmak üzere

$$r_1^{\vee} r_2^{\vee} = (1 + 2r_1)(1 + 2r_2)$$

$$= 1 + 2r_1 + 2r_2 + 4r_1 r_2$$

$$= 1 + 2(r_1 + r_2) + 4r_1 r_2$$

bulunur. Eş. (2.3) ve (2.4) kullanılırsa

$$r_1^{\vee} r_2^{\vee} = 1 + 2^{r+1} - 2^{r+1} = 1$$

elde edilir. ■

Brod (2019) çalışmasında birinci tip r −Pell sayılarının üreteç fonksiyonunun ispatına yer vermişti. Bu çalışmada ise bu fonksiyonun ispatının farklı bir versiyonuna yer verilerek birinci tip $r-$ Pell − Lucas sayıları için de üreteç fonksiyonu elde edilecektir.

2.2.5 Teorem(Üreteç fonksiyonları)

Keyfi bir pozitif tamsayı r olmak üzere birinci tip r −Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} Y(r,\omega)x^{\omega} = \frac{2 + x}{1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2} \tag{2.16}$$

ve birinci tip $r-$ Pell – Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} Z(r,\omega)x^{\omega} = \frac{2 + 2^{1-r} + x}{1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2} \tag{2.17}$$

dir.

İspat. Birinci tip r −Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$f(x)=\sum_{\omega=0}^{\infty}Y(r,\omega)x^{\omega}$$

olsun. İlk üç terim açılırsa

$$f(x)=Y(r,0)+Y(r,1)x+Y(r,2)x^2+\sum_{\omega=3}^{\infty}Y(r,\omega)x^{\omega}$$

ve dolayısıyla

$$f(x)=2+(1+2^{r+1})x+(2^{r+1}+2.4^r)x^2+\sum_{\omega=3}^{\infty}Y(r,\omega)x^{\omega} \tag{2.18}$$

elde edilir. Eş. (2.18) in her iki yanı $-2^r x$ ile çarpılırsa

$$-2^r xf(x)=-2^{r+1}x-(2^r+2^{2r+1})x^2-(2^{2r+1}+2^{r+1}4^r)x^3 \\ -\sum_{\omega=3}^{\infty}2^rY(r,\omega)x^{\omega+1}$$

bulunur. Buradan

$$-2^r xf(x)=-2^{r+1}x-(2^r+2^{2r+1})x^2-\sum_{\omega=2}^{\infty}2^rY(r,\omega)x^{\omega+1}$$

elde edilir. ω yerine $\omega-1$ yazılırsa

$$-2^r xf(x)=-2^{r+1}x-(2^r+2^{2r+1})x^2-\sum_{\omega=3}^{\infty}2^rY(r,\omega-1)x^{\omega} \tag{2.19}$$

olur. Eş. (2.18), $-2^{r-1}x^2$ ile çarpılırsa

$$-2^{r-1}x^2 f(x) = -2^r x^2 - (2^{r-1} + 2^{2r})x^3 - (2^{2r} + 2^r.4^r)x^4$$
$$+ \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1} Y(r,\omega)x^{\omega+2}$$

Son iki terim toplamın içine alınırsa

$$-2^{r-1}x^2 f(x) = -2^r x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{r-1} Y(r,n)x^{n+2}$$

elde edilir. Son eşitlikte ω yerine $\omega - 2$ yazılırsa

$$-2^{r-1}x^2 f(x) = -2^r x^2 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1} Y(r,\omega-2)x^{\omega} \tag{2.20}$$

bulunur. Eş. (2.18), (2.19) ve (2.20) den

$$f(x)(1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2)$$
$$= 2 + x - \sum_{\omega=3}^{\infty} [Y(r,\omega) - 2^r Y(r,\omega-1) - 2^{r-1} Y(r,\omega-2)]$$

olur. (2.1) birinci tip r −Pell sayılarının indirgeme bağıntısı kullanılarak

$$f(x)(1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2) = 2 + x$$

elde edilir ve buradan

$$f(x) = \frac{2 + x}{1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2}$$

bulunur. Birinci tip $r -$ Pell – Lucas sayılarını üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{\omega=0}^{\infty} Z(r,\omega)x^{\omega}$$

olsun. Fonksiyonun ilk üç terimi açılırsa

$$g(x) = 2 + 2^{1-r} + (3 + 2^{r+1})x + (1 + 2^{r+2} + 2.4^r)x^2 + \sum_{\omega=3}^{\infty} Z(r,\omega)x^{\omega} \quad (2.21)$$

olur. Eş. (2.21) in her iki yanı, $-2^r x$ ile çarpılırsa

$$-2^r xg(x) = -(2^{r+1} + 2)x - (3.2^r + 2.4^r)x^2 - (2^r + 2^{2r+2} + 2.8^r)x^3 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^r Z(r,\omega)x^{\omega+1}$$

elde edilir. Son terim toplam içine alınırsa

$$-2^r xg(x) = -(2^{r+1} + 2)x - (3.2^r + 2.4^r)x^2 - \sum_{\omega=2}^{\infty} 2^r Z(r,\omega)x^{\omega+1}$$

ve ω yerine $\omega - 1$ yazılırsa

$$-2^r xg(x) = -(2^{r+1} + 2)x - (3.2^r + 2.4^r)x^2 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^r Z(r,\omega - 1) \quad (2.22)$$

buluωur. Eş. (2.21) in her iki yanı, $-2^{r-1}x^2$ ile çarpılırsa

$$-2^{r-1}x^2 g(x) = -(2^r + 1)x^2 - (3.2^{r-1} + 2^{2r})x^3 - (2^r + 2^{2r+2} + \ 2^{r+1}4^r)x^4 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1} Z(r,\omega)x^{\omega+2}$$

ve son iki terim toplamın içine alınırsa

$$-2^{r-1}x^2 g(x) = -(2^r + 1)x^2 - \sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{r-1} Z(r,\omega)x^{\omega+2}$$

elde edilir. Son eşitlikte n yerine $n - 2$ yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-2^{r-1}x^2 g(x) = -(2^r+1)x^2 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1}Z(r,\omega-2)x^{\omega} \tag{2.23}$$

olur. Eş. (2.21), (2.22) ve (2.23) den

$$g(x)(1-2^r x - 2^{r-1}x^2)$$
$$= 2 + 2^{1-r} + x + \sum_{\omega=3}^{\infty}[Z(r,\omega) - 2^r Z(r,\omega-1) - 2^{r-1}Z(r,\omega-2)]$$

elde edilir. Birinci tip $r-$ Pell−Lucas sayılarının indirgeme bağıntısı kullanılırsa

$$g(x)(1-2^r x - 2^{r-1}x^2) = 2 + 2^{1-r} + x$$

olur ve buradan da

$$g(x) = \frac{2+2^{1-r}+x}{1-2^r x - 2^{r-1}x^2}$$

bulunur.■

3. İKİNCİ TİP r −PELL VE r −PELL − LUCAS SAYILARI

3.1 İkinci Tip r −Pell Sayıları

3.1.1. Tanım

Daha sade sonuçlar elde edebilmek amacıyla Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir genelleştirmesi, $r-$ Pell ve $r-$ Pell − Lucas sayılarının indirgeme bağıntısı kullanılarak tanımlanacaktır. Bu sayılar ikinci tip $r-$ Pell ve r −Pell−Lucas sayıları olarak isimlendirilecektir.

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 2$ ve $r \geq 1$ ve başlangıç koşulları $\tilde{y}(r,0)=0$ ve $\tilde{y}(r,1)=1$

olmak üzere ikinci tip $r-$ Pell sayıları

$$\tilde{y}(r,\omega)=2^r\tilde{y}(r,\omega-1)+2^{r-1}\tilde{y}(r,\omega-2) \tag{3.1}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlansın. Buna göre ikinci tip r – Pell sayılarının bazı

terimleri

$$\tilde{y}(r,0)=0,$$

$$\tilde{y}(r,1)=1,$$

$$\tilde{y}(r,2)=2^r,$$

$$\tilde{y}(r,3)=4^r+2^{r-1},$$

$$\tilde{y}(r,4)=8^r+4^r.$$

olduğu görülebilir.

3.2. İkinci Tip r – Pell – Lucas Sayıları

3.2.1 Tanım

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 2$ ve $r \geq 1$ ve başlangıç koşulları $\tilde{z}(r,0) = 2^{1-r}$ ve $\tilde{z}(r,1) = 1$ olmak üzere ikinci tip $r -$ Pell$-$Lucas tamsayı dizisi

$$\tilde{z}(r,\omega) = 2^r \tilde{z}(r,\omega-1) + 2^{r-1}\tilde{z}(r,\omega-2) \tag{3.2}$$

indirgeme bağıntısıyla tanımlansın. Buna göre ikinci tip $r -$ Pell$-$Lucas sayılarının

bazı terimleri

$$\tilde{z}(r,0) = 2^{1-r},$$

$$\tilde{z}(r,1) = 1,$$

$$\tilde{z}(r,2) = 2^r,$$

$$\tilde{z}(r,3) = 4^r + 3.\,2^{r-1}.$$

olduğu görülebilir.

3.2.2 Teorem (Binet Formülleri)

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere;

ω-yinci ikinci tip $r -$Pell ve ikinci tip $r -$Pell$-$Lucas sayısı

$$\tilde{y}(r,\omega) = \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{r_1 - r_2} \tag{3.3}$$

ve

$$\tilde{z}(r,\omega)=\frac{r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{r_1+r_2} \tag{3.4}$$

dir. Burada r_1 ve r_2 daha önce tanımlandıkları gibidir.

İspat.

İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü

$$\tilde{y}(r,\omega)=c_1r_1^{\omega}+c_2r_2^{\omega} \tag{3.5}$$

olsun.

$\omega=0$ için

$$\tilde{y}(r,0)=c_1+c_2=0 \tag{3.6}$$

ve

$\omega=1$ için

$$\tilde{y}(r,1)=c_1r_1+c_2r_2=1 \tag{3.7}$$

elde edilir. r_1 ve r_2 (3.7) de yerine yazılırsa

$$c_1\left(\frac{2^r+K}{2}\right)+c_2\left(\frac{2^r-K}{2}\right)=1$$

$$c_12^r+c_1K+c_22^r-c_2K=2$$

ve buradan

$$2^r(c_1+c_2)+K(c_1-c_2)=2 \tag{3.8}$$

bulunur. Eş. (3.6), (3.8) de yerine yazılırsa

$$c_1 - c_2 = \frac{2}{K} \tag{3.9}$$

ve

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. Buradan

$$c_1 = \frac{1}{K} \quad \text{ve} \quad c_2 = -\frac{1}{K}$$

olur. Dolayısıyla

$$\tilde{y}(r,\omega) = \frac{1}{K} r_1^{\omega} - \frac{1}{K} r_2^{\omega}$$

bulunur. Eş. (2.5) den

$$\tilde{y}(r,\omega) = \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

elde edilir. İkinci tip $r -$ Pell−Lucas sayılarının Binet formülü

$$\tilde{z}(r,\omega) = d_1 r_1^{\omega} + d_2 r_2^{\omega} \tag{3.11}$$

olsun. $\omega = 0$ için

$$\tilde{z}(r,0) = d_1 + d_2 = 2^{1-r} \tag{3.12}$$

ve $\omega = 1$ için

$$\tilde{z}(r,1) = d_1 r_1 + d_2 r_2 = 1 \tag{3.13}$$

olur. r_1 ve r_2, (3.13) de yazılırsa

$$d_1\left(\frac{2^r+K}{2}\right)+d_2\left(\frac{2^r-K}{2}\right)=1$$

$$d_1 2^r + d_1 K + d_2 2^r - d_2 K = 2$$

ve

$$2^r(d_1+d_2)+K(d_1-d_2)=2 \tag{3.14}$$

elde edilir. Eş. (3.12), (3.14) de yerine yazılırsa

$$d_1 - d_2 = 0 \tag{3.15}$$

ve

$$d_1 + d_2 = 2^{1-r}$$

olur. Eş. (3.12) ve (3.15) den

$$d_1 = 2^{-r}$$

ve

$$d_2 = 2^{-r}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\tilde{z}(r,\omega) &= 2^{-r} r_1^{\omega} + 2^{-r} r_2^{\omega}\\ &= \frac{1}{2^r} r_1^{\omega} + \frac{1}{2^r} r_2^{\omega}\\ &= \frac{r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{2^r}\end{aligned}$$

$$= \frac{r_1^\omega + r_2^\omega}{r_1 + r_2}$$

bulunur ki bu ise ispatı tamamlar.■

3.2.3 Teorem (Üreteç fonksiyonları)

Keyfi bir tamsayı $r \geq 1$ olmak üzere ikinci tip r –Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} \tilde{y}(r,\omega)x^\omega = \frac{x}{1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2} \tag{3.16}$$

ve ikinci tip r –Pell−Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} \tilde{z}(r,\omega)x^\omega = \frac{2^{1-r} - x}{1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2} \tag{3.17}$$

şeklindedir.

İspat.

İkinci tip r −Pell sayılarının üreteç fonksiyonu

$$h(x) = \sum_{\omega=0}^{\infty} \tilde{y}(r,\omega)x^\omega \quad \forall\, r \geq 1$$

olsun. İlk üç terimi açılırsa

$$h(x) = \tilde{y}(r,0) + \tilde{y}(r,1)x + \tilde{y}(r,2)x^2 + \sum_{\omega=3}^{\infty} \tilde{y}\,(r,\omega)x^\omega$$

ve dolayısıyla

$$h(x) = x + 2^r x^2 + \sum_{\omega=3}^{\infty} \tilde{y}\,(r,\omega)x^{\omega} \tag{3.18}$$

elde edilir. Eş. (3.18), $-2^r x$ ile çarpılırsa

$$-2^r x h(x) = -2^r x^2 - 2^{2r} x^3 - \sum_{\omega=3}^{\infty} \tilde{y}(r,\omega) 2^r x^{\omega+1}$$

Son terim toplamın içine alınırsa

$$-2^r x h(x) = -2^r x^2 - \sum_{\omega=2}^{\infty} \tilde{y}(r,\omega) 2^r x^{\omega+1}$$

olur. ω yerine $\omega - 1$ yazılırsa

$$-2^r x h(x) = -2^r x^2 - \sum_{\omega=3}^{\infty} \tilde{y}(r,\omega-1) 2^r x^{\omega} \tag{3.19}$$

elde edilir. Eş. (3.18), $-2^{r-1}x^2$ ile çarpılırsa

$$-2^{r-1}x^2 h(x) = -2^{r-1}x^3 - 2^{2r-1}x^4 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1}\tilde{y}(r,\omega)x^{\omega+2}$$

bulunur. Buradan

$$-2^{r-1}x^2 h(x) = -\sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{r-1}\tilde{y}(r,\omega)x^{\omega+2}$$

olur. ω yerine $\omega - 2$ yazılırsa

$$-2^{r-1}x^2 h(x) = -\sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1}\tilde{y}(r,\omega-2)x^{\omega} \tag{3.20}$$

elde edilir. Eş. (3.18), (3.19) ve (3.20) den

$$h(x)(1-2^r x-2^{r-1}x^2)$$
$$=x+\sum_{\omega=3}^{\infty}[\tilde{y}(r,\omega)-2^r\tilde{y}(r,\omega-1)-2^{r-1}\tilde{y}(r,\omega-2)]\,x^{\omega}$$

bulunur. İkinci tip r −Pell sayılarının indirgeme bağıntısı (3.1), son eşitlikte yerine yazılırsa

$$h(x)(1-2^r x-2^{r-1}x^2)=x$$

olur ve buradan da

$$h(x)=\frac{x}{1-2^r x-2^{r-1}x^2}$$

elde edilir.

İkinci tip r −Pell−Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu

$$v(x)=\sum_{\omega=0}^{\infty}\tilde{z}(r,\omega)x^{\omega}$$

olsun. İlk üç terim açılırsa

$$v(x)=\tilde{z}(r,0)+\tilde{z}(r,1)x+\tilde{z}(r,2)x^2+\sum_{\omega=3}^{\infty}\tilde{z}(r,\omega)x^{\omega}$$

elde edilir ve buradan da

$$v(x)=2^{1-r}+x+(2^r+1)x^2+\sum_{\omega=3}^{\infty}\tilde{z}(r,\omega)x^{\omega} \tag{3.21}$$

olur. Eş. (3.21) in her iki yanı, $-2^r x$ ile çarpılırsa

$$-2^r x v(x) = -2x - 2^r x^2 - (2^{2r} + 2^r)x^3 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^r \tilde{z}(r,\omega)x^{\omega+1}$$

elde edilir. Buradan

$$-2^r x v(x) = -2x - 2^r x^2 - \sum_{\omega=2}^{\infty} 2^r \tilde{z}(r,\omega)x^{\omega+1}$$

olur ve ω yerine $\omega - 1$ yazılırsa

$$-2^r x v(x) = -2x - 2^r x^2 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^r \tilde{z}(r,\omega-1)x^{\omega} \tag{3.22}$$

bulunur. Eş. (3.21) in her iki yanı, $-2^{r-1}x^2$ ile çarpılırsa

$$-2^{r-1}x^2 v(x) = -x^2 - 2^{r-1}x^3 - (2^{2r-1} + 2^{r-1})x^4 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1} \tilde{z}(r,\omega)x^{\omega+2}$$

olur. Dolayısıyla

$$-2^{r-1}x^2 v(x) = -x^2 - \sum_{\omega=1}^{\infty} 2^{r-1} \tilde{z}(r,\omega)x^{\omega+2}$$

elde edilir. ω yerine $\omega - 2$ yazılırsa

$$-2^{r-1}x^2 v(x) = -x^2 - \sum_{\omega=3}^{\infty} 2^{r-1} \tilde{z}(r,\omega-2)x^{\omega} \tag{3.23}$$

olur. Eş. (3.21), (3.22) ve (3.23) den

$$\begin{aligned} &v(x)(1 - 2^r x - 2^{r-1}x^2) \\ &\qquad = 2^{1-r} - x + \sum_{\omega=3}^{\infty} [\tilde{z}(r,\omega) - 2^r \tilde{z}(r,\omega-1) - 2^{r-1}\tilde{z}(r,\omega-2)]x^{\omega} \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci tip $r-$ Pell$-$Lucas sayılarının indirgeme bağıntısı (3.2) kullanılırsa

$$v(x)(1-2^{r}x-2^{r-1}x^{2})=2^{1-r}-x$$

elde edilir ve buradan da

$$v(x)=\frac{2^{1-r}-x}{1-2^{r}x-2^{r-1}x^{2}}$$

bulunur. ■

4. BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde bazı iyi bilinen özdeşliklerin genelleştirilmesi verilecektir.

4.1. Lemma

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere birinci tip $r-$ Pell ve $r-$ Pell – Lucas sayılarıyla, ikinci tip $r-$ Pell ve r −Pell−Lucas sayıları arasında

$$Y(r,\omega) = 2\tilde{y}(r,\omega+1) + \tilde{y}(r,\omega), \tag{4.1}$$

ve

$$Z(r,\omega) = 2\tilde{z}(r,\omega+1) + \tilde{z}(r,\omega). \tag{4.2}$$

bağıntıları vardır.

İspat. Birinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$Y(r,\omega) = \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{(1+2r_1)r_1^{\omega} - (1+2r_2)r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{r_1^{\omega} + 2r_1^{\omega+1} - (r_2^{\omega} + 2r_2^{\omega+1})}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{2(r_1^{\omega+1} - r_2^{\omega+1}) + r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

$$= 2\left(\frac{r_1^{\omega+1} - r_2^{\omega+1}}{r_1 - r_2}\right) + \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

$$= 2\tilde{y}(r,\omega+1) + \tilde{y}(r,\omega)$$

bulunur. Birinci tip $r -$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa

$$Z(r,\omega)=\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega}+r_2^{\vee}r_2^{\omega}}{r_1+r_2}$$

$$=\frac{(1+2r_1)r_1^{\omega}+(1+2r_2)r_2^{\omega}}{r_1+r_2}$$

$$=\frac{r_1^{\omega}+2r_1^{\omega+1}+r_2^{\omega}+2r_2^{\omega+1}}{r_1+r_2}$$

$$=\frac{2(r_1^{\omega+1}+r_2^{\omega+1})+r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{r_1+r_2}$$

$$=2\left(\frac{r_1^{\omega+1}+r_2^{\omega+1}}{r_1+r_2}\right)+\frac{r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{r_1+r_2}$$

$$=2\tilde{z}(r,\omega+1)+\tilde{z}(r,\omega)$$

elde edilir. ■

Daha önce birinci tip $r -$Pell ve $r -$ Pell$-$ Lucas sayıları sadece pozitif tamsayılar için tanımlanabilmişti. Bu bölümde ise bu sayıların ikinci tip $r -$Pell ve $r -$ Pell$-$ Lucas sayıları aracılığıyla, negatif tamsayılar için de tanımlanabildiği görülecektir.

4.2. Lemma

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere

$$\tilde{y}(r,-\omega)=(-1)^{\omega+1}2^{\omega(1-r)}\tilde{y}(r,\omega) \tag{4.3}$$

ve

$$\tilde{z}(r,-\omega)=(-1)^{\omega}2^{\omega(1-r)}\tilde{z}(r,\omega) \tag{4.4}$$

dir.

İspat.

İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülünden

$$\tilde{y}(r,-\omega)=\frac{r_1^{-\omega}-r_2^{-\omega}}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{r_1^{\omega}}-\frac{1}{r_2^{\omega}}}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{\frac{r_2^{\omega}-r_1^{\omega}}{(r_1r_2)^{\omega}}}{r_1-r_2}$$

$$=-\frac{1}{(r_1r_2)^{\omega}}\left[\frac{r_1^{\omega}-r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right]$$

$$=-\frac{1}{(-2^{r-1})^{\omega}}\tilde{y}(r,\omega)$$

$$=(-1)^{\omega+1}2^{\omega(1-r)}\tilde{y}(r,\omega)$$

bulunur. İkinci tip $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülünden

$$\tilde{z}(r,-\omega)=\frac{r_1^{-\omega}+r_2^{-\omega}}{r_1+r_2}$$

$$=\frac{\frac{1}{r_1^{\omega}}+\frac{1}{r_2^{\omega}}}{r_1+r_2}$$

$$=\frac{\frac{r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{(r_1r_2)^{\omega}}}{r_1+r_2}$$

$$= \frac{1}{(r_1 r_2)^{\omega}} \left[\frac{r_1^{\omega} + r_2^{\omega}}{r_1 + r_2} \right]$$

$$= \frac{1}{(-2^{r-1})^{\omega}} \tilde{z}(r, \omega)$$

$$= (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)} \tilde{z}(r, \omega)$$

elde edilir.■

4.3 Teorem

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere

$$Y(r, -\omega) = (-1)^{\omega+1} 2^{(\omega-1)(1-r)} \tilde{y}(r, \omega - 2) \tag{4.5}$$

ve

$$Z(r, -\omega) = (-1)^{\omega} 2^{(\omega-1)(1-r)} \tilde{z}(r, \omega - 2) \tag{4.6}$$

dir.

İspat.

Eş. (4.1) de ω yerine $-\omega$ yazılırsa

$$Y(r, -\omega) = 2\tilde{y}(r, -\omega + 1) + \tilde{y}(r, -\omega)$$

$$= 2\tilde{y}\big(r, -(\omega - 1)\big) + \tilde{y}(r, -\omega)$$

elde edilir. Eş. (4.3) kullanılarak

$$Y(r, -\omega) = 2(-1)^{\omega} 2^{(\omega-1)(1-r)} \tilde{y}(r, \omega - 1) + (-1)^{\omega+1} 2^{\omega(1-r)} \tilde{y}(r, \omega)$$

$$= (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)+r} \tilde{y}(r, \omega - 1) + (-1)^{\omega+1} 2^{\omega(1-r)} \tilde{y}(r, \omega)$$

$$= (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)} [2^r \tilde{y}(r, \omega - 1) - \tilde{y}(r, \omega)]$$

bulunur. Eş. (3.1) den

$$Y(r, -\omega) = (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)} [2^r \tilde{y}(r, \omega - 1) - (2^r \tilde{y}(r, \omega - 1) + 2^{r-1} \tilde{y}(r, \omega - 2))]$$

$$= (-1)^{\omega+1} 2^{(\omega-1)(1-r)} \tilde{y}(r, \omega - 2)$$

elde edilir. Eş. (4.2) de ω yerine $-\omega$ yazılırsa

$$Z(r, -\omega) = 2\tilde{z}(r, -\omega + 1) + \tilde{z}(r, -\omega)$$

$$= 2\tilde{z}\big(r, -(\omega - 1)\big) + \tilde{z}(r, -\omega)$$

olur. Eş.(4.4) yardımıyla

$$Z(r, -\omega) = 2(-1)^{\omega-1} 2^{(\omega-1)(1-r)} \tilde{z}(r, \omega - 1) + (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)} \tilde{z}(r, \omega)$$

$$= (-1)^{\omega-1} 2^{\omega(1-r)+r} \tilde{z}(r, \omega - 1) + (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)} \tilde{z}(r, \omega)$$

$$= (-1)^{\omega} 2^{\omega(1-r)} [-2^r \tilde{z}(r, \omega - 1) + \tilde{z}(r, \omega)]$$

elde edilir. Eş. (3.2) den

$$Z(r, -\omega) = (-1)^{\omega} 2^{(\omega-1)(1-r)} \tilde{z}(r, \omega - 2)$$

bulunur.■

Aşağıdaki lemmaya daha sonra ihtiyaç duyulacaktır.

4.4 Lemma

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere r_1, r_2 ve K önceden tanımlandıkları gibi olmak üzere

$$1+\frac{1}{r_1}= \frac{K}{2^r} \tag{4.7}$$

ve

$$1+\frac{1}{r_2}=-\frac{K}{2^r} \tag{4.8}$$

dir.

İspat.r_1 ve r_2 nin tanımından

$$1+\frac{1}{r_1}=1+\frac{1}{\frac{2^r+K}{2}}$$

$$=1+\frac{2}{2^r+K}$$

$$=1+\frac{2^{r+1}-2K}{4^r-(4^r+2.2^r)}$$

$$=1-\frac{2.2^r-2K}{2.2^r}$$

$$=1-\frac{2^r-K}{2^r}$$

$$=\frac{K}{2^r}$$

ve

$$1+\frac{1}{r_2}=1+\frac{1}{\frac{2^r-K}{2}}$$

$$=1+\frac{2}{2^r-K}$$

$$= 1 + \frac{2^{r+1} + 2K}{4^r - (4^r + 2^{r+1})}$$

$$= 1 - \frac{2^{r+1} + 2K}{2^{r+1}}$$

$$= 1 - \frac{2^r + K}{2^r}$$

$$= -\frac{K}{2^r}$$

bulunur. ■

Koshy (2010) daha önce Pell ve Pell−Lucas sayıları için bazı eşitlikler vermişti. Bu eşitlikleri birinci tip $r -$ Pell, $r -$Pell –Lucas sayıları ve ikinci tip $r -$Pell , $r -$ Pell – Lucas sayıları için tekrar verelim.

4.5 Teorem

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ $ve\ r \geq 1$ olmak üzere

$$Z(r,\omega) = Y(r,\omega) + Y(r,\omega - 1), \tag{4.9}$$

$$Y(r,\omega) + Z(r,\omega) = 2^{1-r}Y(r,\omega + 1), \tag{4.10}$$

$$Y(r,\omega) + Y(r,\omega - 1) = Z(r,\omega), \tag{4.11}$$

$$Z(r,\omega) + Z(r,\omega - 1) = \frac{K^2}{4^r}Y(r,\omega), \tag{4.12}$$

$$2^{2r}[Z(r,\omega)]^2 - K^2[Y(r,\omega)]^2 = (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)+2}\,, \tag{4.13}$$

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{y}(r,\omega - 1) = \tilde{z}(r,\omega), \tag{4.14}$$

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{z}(r,\omega) = 2^{1-r}y(r,\omega + 1), \tag{4.15}$$

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i) = \frac{Y(r,\omega) + 2^{r-1}Y(r,\omega-1) - 3}{3.2^{r-1} - 1}, \tag{4.16}$$

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i) = \frac{Z(r,\omega) + 2^{r-1}Z(r,\omega-1) - 2^{1-r} - 3}{3.2^{r-1} - 1}. \tag{4.17}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat.

Birinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa ve Eş.(2.5) den

$$Y(r,\omega) + Y(r,\omega-1) =$$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{K} + \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega-1} - r_2^{\vee} r_2^{\omega-1}}{K}$$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega} + r_1^{\vee} r_1^{\omega-1} - r_2^{\vee} r_2^{\omega-1}\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\left(1 + \frac{1}{r_1}\right) - r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(1 + \frac{1}{r_2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\left(\frac{r_1 + 1}{r_1}\right) - r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(\frac{r_2 + 1}{r_2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{r_1 r_2}\right)\left(\frac{1}{K}\right)\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega} r_2 (r_1 + 1) - r_2^{\vee} r_2^{\omega} r_1 (r_2 + 1)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{r_1 r_2}\right)\left(\frac{1}{K}\right)\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}(r_1 r_2 + r_2) - r_2^{\vee} r_2^{\omega}(r_1 r_2 + r_1)\right]$$

olur. Eş. (2.4) ve r_1 ve r_2 yardımıyla

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)$$
$$=\left(\frac{1}{r_1r_2}\right)\left(\frac{1}{K}\right)\left[r_1^{\nu}r_1^{\omega}\left(-2^{r-1}+\frac{2^r-K}{2}\right)-r_2^{\nu}r_2^{\omega}\left(-2^{r-1}+\frac{2^r+K}{2}\right)\right]$$

bulunur.

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)=\left(\frac{1}{r_1r_2}\right)\left(\frac{1}{K}\right)\left[r_1^{\nu}r_1^{\omega}\left(-\frac{K}{2}\right)-r_2^{\nu}r_2^{\omega}\left(\frac{K}{2}\right)\right]$$

elde edilir. Buradan

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)=-\frac{1}{2r_1r_2}\left[r_1^{\nu}r_1^{\omega}+r_2^{\nu}r_2^{\omega}\right]$$

olur. Eş. (2.4) den

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)=\frac{1}{2^r}\left[r_1^{\nu}r_1^{\omega}+r_2^{\nu}r_2^{\omega}\right]$$

bulunur. Eş. (2.3) kullanılarak

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)=\frac{r_1^{\nu}r_1^{\omega}+r_2^{\nu}r_2^{\omega}}{r_1+r_2}$$

elde edilir. Birinci tip $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)=Z(r,\omega)$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Birinci tip $r-$ Pell ve $r-$ Pell $-$ Lucas sayılarının Binet formülleri yerlerine yazıldığında

$$Y(r,\omega)+Z(r,\omega)$$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2} + \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}$$

elde edilir.

Eş. (2.3) ve (2.5) son eşitlikte yerine yazılırsa buradan

$$Y(r,\omega) + Z(r,\omega)$$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{K} + \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{2^r}$$

$$= \frac{2^r (r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}) + K(r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega})}{2^r K}$$

$$= \frac{(2^r + K) r_1^{\vee} r_1^{\omega} - (2^r - K) r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{2^r K}$$

$$= \left[\frac{(2^r + K) r_1^{\vee} r_1^{\omega} - (2^r - K) r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{2^r K}\right]\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{2^r K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\left(\frac{2^r + K}{2}\right) - r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(\frac{2^r - K}{2}\right)\right]$$

olur. Son eşitlikte r_1 ve r_2 yerlerine yazılırsa

$$Y(r,\omega) + Z(r,\omega) = \frac{2}{2^r}\left[\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega+1} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+1}}{K}\right]$$

bulunur. Eş. (2.5) kullanılarak

$$Y(r,\omega) + Z(r,\omega) = \frac{2}{2^r}\left[\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega+1} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+1}}{r_1 - r_2}\right]$$

ve Birinci tip $r -$ Pell sayılarının Binet formülü yardımıyla

$Y(r,\omega) + Z(r,\omega) = 2^{1-r}Y(r,\omega+1)$

elde edilir.

Birinci tip $r -$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılarak ve Eş. (2.5) den

$Y(r,\omega) + Y(r,\omega-1)$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{K} + \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega-1} - r_2^{\vee} r_2^{\omega-1}}{K}$$

elde edilir.

$Y(r,\omega) + Y(r,\omega-1)$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega} + r_1^{\vee} r_1^{\omega-1} - r_2^{\vee} r_2^{\omega-1}\right]$$

$Y(r,\omega) + Y(r,\omega-1)$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\left(1+\frac{1}{r_1}\right) - r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(1+\frac{1}{r_2}\right)\right]$$

bulunur ve Eş. (4.7) ve (4.8) kullanılarak

$Y(r,\omega) + Y(r,\omega-1)$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\frac{K}{2^r} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(-\frac{K}{2^r}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\frac{K}{2^r} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}\frac{K}{2^r}\right]$$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{2^r}$$

olur. Eş.(2.3) den

$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}$$

bulunur. Birinci tip $r -$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü yardımıyla

$$Y(r,\omega)+Y(r,\omega-1)=Z(r,\omega)$$

elde edilir.

Birinci tip $r -$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü kullanılarak Eş.(2.3) den

$Z(r,\omega)+Z(r,\omega-1)$

$$= \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{M} + \frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega-1} + r_2^{\vee} r_2^{\omega-1}}{M}$$

elde edilir. Buradan

$Z(r,\omega)+Z(r,\omega-1)$

$$= \frac{1}{M}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega} + r_1^{\vee} r_1^{\omega-1} + r_2^{\vee} r_2^{\omega-1}\right]$$

olur. Eş. (2.3) den

$Z(r,\omega)+Z(r,\omega-1)$

$$= \frac{1}{2^r}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\left(1+\frac{1}{r_1}\right) + r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(1+\frac{1}{r_2}\right)\right]$$

elde edilir. Eş. (4.7) ve (4.8) vasıtasıyla

$Z(r,\omega)+Z(r,\omega-1)$

$$= \frac{1}{2^r}\left[r_1^{\vee} r_1^{\omega}\left(\frac{K}{2^r}\right) + r_2^{\vee} r_2^{\omega}\left(-\frac{K}{2^r}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^r}\left[\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} K}{2^r} - \frac{r_2^{\vee} r_2^{\omega} K}{2^r}\right]$$

bulunur. Eş. (2.5) den

$$Z(r,\omega) + Z(r,\omega-1)$$

$$= \frac{K^2}{4^r}\left[\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}\right]$$

olur. Birinci tip $r -$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$Z(r,\omega) + Z(r,\omega-1) = \frac{K^2}{4^r} Y(r,\omega)$$

bulunur.

Birinci tip $r -$Pell ve $r -$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülleri kullanılarak

$$2^{2r}[Z(r,\omega)]^2 - K^2[Y(r,\omega)]^2 =$$

$$= [2^r Z(r,\omega)]^2 - [KY(r,\omega)]^2$$

elde edilir. Buradan

$$= \left[2^r\left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}\right)\right]^2 - \left[K\left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}\right)\right]^2$$

olduğu görülür. Eş. (2.3) ve (2.5) kullanılarak

$$2^{2r}[Z(r,\omega)]^2 - K^2[Y(r,\omega)]^2$$

$$= [2^r Z(r,\omega)]^2 - [KY(r,\omega)]^2 = \left[2^r \left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{2^r}\right)\right]^2 - \left[K\left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{K}\right)\right]^2$$

$$= (r_1^{\vee} r_1^{\omega} + r_2^{\vee} r_2^{\omega})^2 - (r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega})^2$$

$$= [(r_1^{\vee})^2 r_1^{2\omega} + 2r_1^{\vee} r_2^{\vee}(r_1 r_2)^{\omega} + (r_2^{\vee})^2 r_2^{2\omega}]$$
$$- [(r_1^{\vee})^2 r_1^{2\omega} - 2r_1^{\vee} r_2^{\vee}(r_1 r_2)^{\omega} + (r_2^{\vee})^2 r_2^{2\omega}]$$

$$= 4r_1^{\vee} r_2^{\vee}(r_1 r_2)^{\omega}$$

bulunur. Lemma 2.2. ve (2.4) vasıtasıyla

$$2^{2r}[Z(r,\omega)]^2 - K^2[Y(r,\omega)]^2$$

$$= [2^r Z(r,\omega)]^2 - [KY(r,\omega)]^2 = 4(-2^{r-1})^{\omega}$$

olur ve buradan

$$2^{2r}[Z(r,\omega)]^2 - K^2[Y(r,\omega)]^2$$

$$= [2^r Z(r,\omega)]^2 - [KY(r,\omega)]^2 = (-1)^{\omega} 2^{\omega(r-1)+2}$$

elde edilir.

İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa ve Eş.(2.5) den

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{y}(r,\omega-1)$$

$$= \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{r_1 - r_2} + \frac{r_1^{\omega-1} - r_2^{\omega-1}}{r_1 - r_2}$$

bulunur. Eş. (2.5) den

$$= \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega} + r_1^{\omega-1} - r_2^{\omega-1}}{K}$$

$$= \frac{r_1^{\omega}\left(1+\frac{1}{r_1}\right) - r_2^{\omega}\left(1+\frac{1}{r_2}\right)}{K}$$

olur. Eş. (4.7) ve (4.8) yerlerine yazıldığında

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{y}(r,\omega-1)$$

$$= \frac{r_1^{\omega}\frac{K}{2^r} - r_2^{\omega}\left(-\frac{K}{2^r}\right)}{K}$$

bulunur.Eş. (2.3) aracılığıyla

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{y}(r,\omega-1)$$

$$= \frac{r_1^{\omega} + r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}$$

eşitliğini verir ki buradan İkinci tip $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü bulunur. Buradan

$$= \tilde{z}(r,\omega)$$

elde edilir.

İkinci tip $r-$ Pell ve $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülleri kullanılarak

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{z}(r,\omega) =$$

$$= \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{r_1 - r_2} + \frac{r_1^{\omega} + r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}$$

bulunur. Eş. (2.3) ve (2.5) yerlerine yazılırsa buradan

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{z}(r,\omega) =$$

$$= \frac{r_1^{\omega} - r_2^{\omega}}{K} + \frac{r_1^{\omega} + r_2^{\omega}}{2^r}$$

$$= \frac{2^r(r_1^{\omega} - r_2^{\omega}) + K(r_1^{\omega} + r_2^{\omega})}{K.2^r}$$

$$= \frac{r_1^{\omega}(2^r + K) - r_2^{\omega}(2^r - K)}{K.2^r}$$

$$= \frac{2^{1-r}}{K}\left[r_1^{\omega}\left(\frac{2^r + K}{2}\right) - r_2^{\omega}\left(\frac{2^r - K}{2}\right)\right]$$

olur. Eş. (2.5), r_1 ve r_2 yardımıyla

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{z}(r,\omega)$$

$$= 2^{1-r}\left[\frac{r_1^{\omega+1} - r_2^{\omega+1}}{r_1 - r_2}\right]$$

elde edilir ve İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa buradan

$$\tilde{y}(r,\omega) + \tilde{z}(r,\omega)$$

$$= 2^{1-r}\tilde{y}(r,\omega+1)$$

bulunur.

Birinci tip r − Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa ve Eş. (2.5) den

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i) = \sum_{i=0}^{\omega-1}\left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{i} - r_2^{\vee} r_2^{i}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{\omega-1}\left(r_1^{\vee} r_1^{i} - r_2^{\vee} r_2^{i}\right)$$

$$= \frac{1}{K}\left[r_1^{\vee}\sum_{i=0}^{\omega-1}\left(r_1^{i}\right) - r_2^{\vee}\sum_{i=0}^{\omega-1}\left(r_2^{i}\right)\right]$$

olur ve daha önce tanımlanan $r_1^{\vee}$ ve $r_2^{\vee}$ yerlerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{1}{K}[(1+2r_1)(1+r_1+r_1^2+\cdots+r_1^{\omega-1}) - (1+2r_2)(1+r_2+r_2^2+\cdots r_2^{\omega-1})]$$

$$= \frac{1}{K}\left[(1+2r_1)\left(\frac{1-r_1^{\omega}}{1-r_1}\right) - (1+2r_2)\left(\frac{1-r_2^{\omega}}{1-r_2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{(1+2r_1)(1-r_2)(1-r_1^{\omega}) - (1+2r_2)(1-r_1)(1-r_2^{\omega})}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{(1-2r_1r_2+2r_1-r_2)(1-r_1^{\omega}) - (1-2r_1r_2-r_1+2r_2)(1-r_2^{\omega})}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2}\right]$$

elde edilir. Eş. (2.3) ve (2.4) vasıtasıyla

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{1}{r_1-r_2}\left[\frac{3(r_1-r_2) - (1+2^r+2r_1-r_2)r_1^{\omega} + (1+2^r-r_1+2r_2)r_2^{\omega}}{1-2^r-2^{r-1}}\right]$$

bulunur ki $r_1^{\vee}$ve $r_2^{\vee}$ değerleri yerlerine yazılarak

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{3(r_1 - r_2) - (r_1^{\text{v}} r_1^{\omega} + (2^r - r_2) r_1^{\omega} - r_2^{\text{v}} r_2^{\omega} - (2^r - r_1) r_2^{\omega})}{1 - 3.2^{r-1}}\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{3(r_1 - r_2) - r_1^{\text{v}} r_1^{\omega} + r_2^{\text{v}} r_2^{\omega} - (2^r - r_2) r_1^{\omega} + (2^r - r_1) r_2^{\omega}}{1 - 3.2^{r-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{3(r_1 - r_2) - r_1^{\text{v}} r_1^{\omega} + r_2^{\text{v}} r_2^{\omega} - (2^r r_1 - r_1 r_2) r_1^{\omega-1} + (2^r r_2 - r_1 r_2) r_2^{\omega-1}}{1 - 3.2^{r-1}}\right]$$

bulunur. Eş. (2.4) den

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{3(r_1 - r_2) - r_1^{\text{v}} r_1^{\omega} + r_2^{\text{v}} r_2^{\omega} - (2^r r_1 + 2^{r-1}) r_1^{\omega-1} + (2^r r_2 + 2^{r-1}) r_2^{\omega-1}}{1 - 3.2^{r-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{K}\left[\frac{3(r_1 - r_2) - r_1^{\text{v}} r_1^{\omega} + r_2^{\text{v}} r_2^{\omega} - 2^{r-1}(1 + 2r_1) r_1^{\omega-1} + 2^{r-1}(1 + 2r_2) r_2^{\omega-1}}{1 - 3.2^{r-1}}\right]$$

olur ki r_1^{v}ve r_2^{v} yerlerine yazılırsa ve Eş. (2.5) den

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\frac{3(r_1 - r_2) - r_1^{\text{v}} r_1^{\omega} + r_2^{\text{v}} r_2^{\omega} - 2^{r-1} r_1^{\text{v}} r_1^{\omega-1} + 2^{r-1} r_2^{\text{v}} r_2^{\omega-1}}{1 - 3.2^{r-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{3.2^{r-1}-1}\left[\frac{-3(r_1-r_2)+r_1^{\vee}r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}+2^{r-1}r_1^{\vee}r_1^{\omega-1}-2^{r-1}r_2^{\vee}r_2^{\omega-1}}{r_1-r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{3.2^{r-1}-1}\left[\frac{-3(r_1-r_2)+r_1^{\vee}r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}+2^{r-1}(r_1^{\vee}r_1^{\omega-1}-r_2^{\vee}r_2^{\omega-1})}{r_1-r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{3.2^{r-1}-1}\left[-3+\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right)+2^{r-1}\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega-1}-r_2^{\vee}r_2^{\omega-1}}{r_1-r_2}\right)\right]$$

elde edilir. Birinci tip $r-$Pell sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa ve buradan

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Y(r,i)$$

$$= \frac{Y(r,\omega)+2^{r-1}Y(r,\omega-1)-3}{3.2^{r-1}-1}$$

bulunur.

Birinci tip $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü ve Eş. (2.3) yerlerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i) = \sum_{i=0}^{\omega-1}\left[\frac{r_1^{\vee}r_1^{i}+r_2^{\vee}r_2^{i}}{r_1+r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{\omega-1}\left[r_1^{\vee}r_1^{i}+r_2^{\vee}r_2^{i}\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[r_1^{\vee}\sum_{i=0}^{\omega-1}\left(r_1^{i}\right)+r_2^{\vee}\sum_{i=0}^{\omega-1}\left(r_2^{i}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{M}[(1+2r_1)(1+r_1+r_1^2+\cdots+r_1^{\omega-1})+(1+2r_2)(1+r_2+r_2^2+\cdots+r_2^{\omega-1})]$$

$$= \frac{1}{M}\left[(1+2r_1)\left(\frac{1-r_1^{\omega}}{1-r_1}\right)+(1+2r_2)\left(\frac{1-r_2^{\omega}}{1-r_2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{(1+2r_1)(1-r_2)(1-r_1^{\omega})+(1+2r_2)(1-r_1)(1-r_2^{\omega})}{1-M+r_1r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{(1-2r_1r_2+2r_1-r_2)(1-r_1^{\omega})+(1-2r_1r_2-r_1+2r_2)(1-r_2^{\omega})}{1-M+r_1r_2}\right]$$

olur. Eş. (2.3) ve (2.4) kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{(1+2^r+2r_1-r_2)(1-r_1^{\omega})+(1+2^r-r_1+2r_2)(1-r_2^{\omega})}{1-2^r-2^{r-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{2+2.2^r+r_1+r_2-(1+2r_1)r_1^{\omega}-(2^r-r_2)r_1^{\omega}-(1+2r_2)r_2^{\omega}-(2^r-r_1)r_2^{\omega}}{1-3.2^{r-1}}\right]$$

bulunur. Eş. (2.3) ve daha önce tanımladığımız $r_1^{\vee}$ ve $r_2^{\vee}$ aracılığıyla

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{2+3.2^r-r_1^{\vee}r_1^{\omega}-(2^r-r_2)r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}-(2^r-r_1)r_2^{\omega}}{1-3.2^{r-1}}\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{2+3.2^{r}-r_1^{\vee}r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}-(2^{r}r_1-r_1r_2)r_1^{\omega-1}-(2^{r}r_2-r_1r_2)r_2^{\omega-1}}{1-3.2^{r-1}}\right]$$

olur. Eş. (2.4) den

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{2+3.2^{r}-r_1^{\vee}r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}-(2^{r}r_1+2^{r-1})r_1^{\omega-1}-(2^{r}r_2+2^{r-1})r_2^{\omega-1}}{1-3.2^{r-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left[\frac{2+3.2^{r}-(r_1^{\vee}r_1^{\omega}+r_2^{\vee}r_2^{\omega})-2^{r-1}(1+2r_1)r_1^{\omega-1}-2^{r-1}(1+2r_2)r_2^{\omega-1}}{1-3.2^{r-1}}\right]$$

bulunur ve $r_1^{\vee}$ ve $r_2^{\vee}$ yerlerine yazılırsa ve Eş. (2.3) den

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{1}{r_1+r_2}\left[\frac{2+3.2^{r}-(r_1^{\vee}r_1^{\omega}+r_2^{\vee}r_2^{\omega})-2^{r-1}r_1^{\vee}r_1^{\omega-1}-2^{r-1}r_2^{\vee}r_2^{\omega-1}}{1-3.2^{r-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{1-3.2^{r-1}}\left[\frac{2+3.2^{r}-(r_1^{\vee}r_1^{\omega}+r_2^{\vee}r_2^{\omega})-2^{r-1}(r_1^{\vee}r_1^{\omega-1}+r_2^{\vee}r_2^{\omega-1})}{r_1+r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{1-3.2^{r-1}}\left[\left(\frac{2+3.2^{r}}{r_1+r_2}\right)-\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega}+r_2^{\vee}r_2^{\omega}}{r_1+r_2}\right)-2^{r-1}\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega-1}+r_2^{\vee}r_2^{\omega-1}}{r_1+r_2}\right)\right]$$

elde edilir. Birinci tip $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü ve (2.3) kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{1}{1-3.2^{r-1}}\left[\frac{2+3.2^{r}}{2^{r}} - Z(r,n) - 2^{r-1}Z(r,n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{1-3.2^{r-1}}\left[2^{1-r} + 3 - Z(r,\omega) - 2^{r-1}Z(r,\omega-1)\right]$$

olur ve buradan da

$$\sum_{i=0}^{\omega-1} Z(r,i)$$

$$= \frac{Z(r,\omega) + 2^{r-1}Z(r,\omega-1) - 2^{1-r} - 3}{3.2^{r-1}-1}$$

bulunur.■

Bu eşitliklere ek olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

4.6 Teorem

İki keyfi tamsayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere

$$\tilde{z}(r,\omega) + \tilde{z}(r,\omega-1) = (1+2^{1-r})\tilde{y}(r,\omega),$$

$$2^{1-r}Y(r,\omega+1) + Y(r,\omega-1) = 2Z(r,\omega),$$

$$2^{1-r}\tilde{y}(r,\omega+1) + \tilde{y}(r,\omega-1) = 2\tilde{z}(r,\omega),$$

$$Z(r,\omega) - Z(r,\omega-1) = 2^{2-r}Y(r,\omega+1) - (3+2^{1-r})Y(r,\omega),$$

$$\tilde{z}(r,\omega) - \tilde{z}(r,\omega-1) = 2^{2-r}\tilde{y}(r,\omega+1) - (3+2^{1-r})\tilde{y}(r,\omega),$$

$$4^{r}[\tilde{z}(r,\omega)]^2 - (4^{r}+2^{r+1})[\tilde{y}(r,\omega)]^2 = (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)+2},$$

$$4^{r}[Z(r,\omega)]^2 + (4^{r}+2^{r+1})[Y(r,\omega)]^2 = 2^{r+1}Z(r,2\omega) + 2^{r+2}Z(r,2\omega+1),$$

$$4^r[\tilde{z}(r,\omega)]^2 + (4^r + 2^{r+1})[\tilde{y}(r,\omega)]^2 = 2^{r+1}\tilde{z}(r,2\omega).$$

dir.

Yukarıda ispatsız olarak verilen eşitliklerle birlikte aşağıdaki özdeşlikler ispatlanarak verilebilir.

4.7 Teorem (Vajda Özdeşliği)

İki keyfi tam sayı $\omega \geq 0$ ve $r \geq 1$ olmak üzere

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega+q) - Y(r,\omega)Y(r,\omega+\mu+q)$$
$$= (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)}\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,q), \tag{4.18}$$

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega+q) - Z(r,\omega)Z(r,\omega+\mu+q)$$
$$= (-1)^{\omega+1}(4^r + 2^{r+1})2^{\omega(r-1)-2r}\,\tilde{y}(r,q)\tilde{y}(r,\mu), \tag{4.19}$$

$$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega+q) - \tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\omega+\mu+q)$$
$$= (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)}\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,q), \tag{4.20}$$

$$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega+q) - \tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\omega+\mu+q)$$
$$= (-1)^{\omega+1}(4^r$$
$$+ 2^{r+1})2^{\omega(r-1)-2r}\,\tilde{y}(r,q)\tilde{y}(r,\mu). \tag{4.21}$$

dir.

İspat.

Birinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega+q) - Y(r,\omega)Y(r,\omega+\mu+q)$$

$$= \left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega+\mu} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+\mu}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega+q} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+q}}{r_1 - r_2}\right)$$
$$- \left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\vee} r_1^{\omega+\mu+q} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+\mu+q}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\left[\left(r_1^{\vee} r_1^{\omega+\mu} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+\mu}\right)\left(r_1^{\vee} r_1^{\omega+q} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+q}\right)\right.$$
$$\left. - \left(r_1^{\vee} r_1^{\omega} - r_2^{\vee} r_2^{\omega}\right)\left(r_1^{\vee} r_1^{\omega+\mu+q} - r_2^{\vee} r_2^{\omega+\mu+q}\right)\right]$$

bulunur. Eş. (2.5) kullanılırsa

$$= \frac{1}{K^2}\left[(r_1^{\vee})^2 r_1^{2\omega+\mu+q} - r_1^{\vee} r_2^{\vee} r_1^{\omega+\mu} r_2^{\omega+q} - r_1^{\vee} r_2^{\vee} r_1^{\omega+q} r_2^{\omega+\mu} + (r_2^{\vee})^2 r_2^{2\omega+\mu+q}\right.$$
$$- \left((r_1^{\vee})^2 r_1^{2\omega+\mu+q} - r_1^{\vee} r_2^{\vee} r_1^{\omega} r_2^{\omega+\mu+q} - r_1^{\vee} r_2^{\vee} r_1^{\omega+\mu+q} r_2^{\omega}\right.$$
$$\left.\left. + (r_2^{\vee})^2 r_2^{2\omega+\mu+q}\right)\right]$$

elde edilir. Lemma 2.2. vasıtasıyla

$$Y(r, \omega+\mu) Y(r, \omega+q) - Y(r, \omega) Y(r, \omega+\mu+q)$$

$$= \frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\omega+\mu} r_2^{\omega+q} - r_1^{\omega+q} r_2^{\omega+\mu} + r_1^{\omega} r_2^{\omega+\mu+q} + r_1^{\omega+\mu+q} r_2^{\omega}\right]$$

$$= \frac{(r_1 r_2)^{\omega}}{K^2}\left[-r_1^{\mu} r_2^{q} - r_1^{q} r_2^{\mu} + r_2^{\mu+q} + r_1^{\mu+q}\right]$$

bulunur ve Eş. (2.4) kullanılarak

$$Y(r, \omega+\mu) Y(r, \omega+q) - Y(r, \omega) Y(r, \omega+\mu+q)$$

$$= \frac{(-2^{r-1})^{\omega}}{K^2}\left[-r_2^{q}\left(r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right) + r_1^{q}\left(r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right)\right]$$

olur. Eş. (2.5) yerine yazıldığında

$$= \frac{(-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)}\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)\left(r_1^{q}-r_2^{q}\right)}{(r_1-r_2)^2}$$

$$= (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)}\left(\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right)\left(\frac{r_1^{q}-r_2^{q}}{r_1-r_2}\right)$$

elde edilir ve ikinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü vasıtasıyla

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega+q)-Y(r,\omega)Y(r,\omega+\mu+q)$$

$$= (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)}\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,q)$$

elde edilir.

Birinci tip r − Pell− Lucas sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega+q)-Z(r,\omega)Z(r,\omega+\mu+q)$$

$$= \left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega+\mu}+r_2^{\vee}r_2^{\omega+\mu}}{r_1+r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega+q}+r_2^{\vee}r_2^{\omega+q}}{r_1+r_2}\right) - \left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega}+r_2^{\vee}r_2^{\omega}}{r_1+r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega+\mu+q}+r_2^{\vee}r_2^{\omega+\mu+q}}{r_1+r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{(r_1+r_2)^2}\Big[(r_1^{\vee})^2r_1^{2\omega+\mu+q}+r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega+q}+r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega+q}r_2^{\omega+\mu}+(r_2^{\vee})^2r_2^{2\omega+\mu+q} - \Big((r_1^{\vee})^2r_1^{2\omega+\mu+q}+r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega}r_2^{\omega+\mu+q}+r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega+\mu+q}r_2^{\omega} + (r_2^{\vee})^2r_2^{2\omega+\mu+q}\Big)\Big]$$

elde edilir. Lemma 2.2. yi kullanılarak ve Eş. (2.3) den

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega+q)-Z(r,\omega)Z(r,\omega+\mu+q)$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega+q}+r_1^{\omega+q}r_2^{\omega+\mu}-r_1^{\omega+\mu+q}r_2^{\omega}-r_1^{\omega}r_2^{\omega+\mu+q}\right]$$

$$= \frac{1}{M^2}(r_1r_2)^{\omega}\left[r_1^{\mu}r_2^{q} + r_1^{q}r_2^{\mu} - r_1^{\mu+q} - r_2^{\mu+q}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[r_1^{\mu}\left(r_2^{q} - r_1^{q}\right) - r_2^{\mu}\left(r_2^{q} - r_1^{q}\right)\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}\left(r_2^{q} - r_1^{q}\right)\left(r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right)}{M^2}$$

bu sonucu verir ki Eş.(2.4) ve (2.3) yardımıyla

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega+q) - Z(r,\omega)Z(r,\omega+\mu+q)$$

$$= -\frac{(-2^{r-1})^{\omega}\left(r_1^{q} - r_2^{q}\right)\left(r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right)}{(2^r)^2}$$

elde edilir ve

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega+q) - Z(r,\omega)Z(r,\omega+\mu+q)$$

$$= (-1)^{\omega+1}2^{\omega(r-1)-2r}\left(r_1^{q} - r_2^{q}\right)\left(r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right)$$

$$= \frac{(r_1 - r_2)^2(-1)^{\omega+1}2^{\omega(r-1)-2r}\left(r_1^{q} - r_2^{q}\right)\left(r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right)}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$= (r_1 - r_2)^2(-1)^{\omega+1}2^{\omega(r-1)-2r}\left(\frac{r_1^{q} - r_2^{q}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\mu} - r_2^{\mu}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= (r_1 - r_2)^2(-1)^{\omega+1}2^{\omega(r-1)-2r}\,\tilde{y}(r,q)\tilde{y}(r,\mu)$$

olur ve Eş.(2.5) den

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega+q) - Z(r,\omega)Z(r,\omega+\mu+q)$$

$$= (-1)^{\omega+1}(4^r + 2^{r+1})2^{\omega(r-1)-2r}\,\tilde{y}(r,q)\tilde{y}(r,\mu)$$

bulunur. İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega+q)-\tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\omega+\mu+q)$

$$=\left[\frac{r_1^{\omega+\mu}-r_2^{\omega+\mu}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega+q}-r_2^{\omega+q}}{r_1-r_2}\right]-\left[\frac{r_1^{\omega}-r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega+\mu+q}-r_2^{\omega+\mu+q}}{r_1-r_2}\right]$$

elde edilir. Eş. (2.5) den

$$=\frac{1}{K^2}\left[\left(r_1^{\omega+\mu}-r_2^{\omega+\mu}\right)\left(r_1^{\omega+q}-r_2^{\omega+q}\right)-\left(r_1^{\omega}-r_2^{\omega}\right)\left(r_1^{\omega+\mu+q}-r_2^{\omega+\mu+q}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[\left(r_1^{2\omega+\mu+q}-r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega+q}-r_1^{\omega+q}r_2^{\omega+\mu}+r_2^{2\omega+\mu+q}\right)\right.$$
$$\left.-\left(r_1^{2\omega+\mu+q}-r_1^{\omega}r_2^{\omega+\mu+q}-r_1^{\omega+\mu+q}r_2^{\omega}+r_2^{2\omega+\mu+q}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega+q}-r_1^{\omega+q}r_2^{\omega+\mu}+r_1^{\omega}r_2^{\omega+\mu+q}+r_1^{\omega+\mu+q}r_2^{\omega}\right]$$

$$=\frac{(r_1r_2)^{\omega}}{K^2}\left[-r_1^{\mu}r_2^{q}-r_1^{q}r_2^{\mu}+r_1^{\mu+q}+r_2^{\mu+q}\right]$$

$$=\frac{(r_1r_2)^{\omega}}{K^2}\left[-r_2^{q}\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)+r_1^{q}\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)\right]$$

olur. Eş.(2.5) kullanıldığında

$$=\frac{(r_1r_2)^{\omega}}{(r_1-r_2)^2}\left[\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)\left(r_1^{q}-r_2^{q}\right)\right]$$

$$=(r_1r_2)^{\omega}\left[\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{q}-r_2^{q}}{r_1-r_2}\right]$$

bulunur. İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü ve (2.4) den

$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega+q)-\tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\omega+\mu+q)$

$$= (-2^{r-1})^{\omega}\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,q)$$

$$= (-1)^{\omega}2^{\omega(r-1)}\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,q)$$

elde edilir. İkinci tip $r -$ Pell−Lucas sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega+q) - \tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\omega+\mu+q) =$$

$$= \left[\frac{r_1^{\omega+\mu}+r_2^{\omega+\mu}}{r_1+r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega+q}+r_2^{\omega+q}}{r_1+r_2}\right] - \left[\frac{r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{r_1+r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega+\mu+q}+r_2^{\omega+\mu+q}}{r_1+r_2}\right]$$

olur. Eş.(2.3) kullanıldığında

$$= \frac{1}{M^2}\left[\left(r_1^{\omega+\mu}+r_2^{\omega+\mu}\right)\left(r_1^{\omega+q}+r_2^{\omega+q}\right) - \left(r_1^{\omega}+r_2^{\omega}\right)\left(r_1^{\omega+\mu+q}+r_2^{\omega+\mu+q}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{M^2}\Big[r_1^{2\omega+\mu+q} + r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega+q} + r_1^{\omega+q}r_2^{\omega+\mu} + r_2^{2\omega+\mu+q} - \left(r_1^{2\omega+\mu+q} + r_1^{\omega}r_2^{\omega+\mu+q} + r_1^{\omega+\mu+q}r_2^{\omega} + r_2^{2\omega+\mu+q}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega+q} + r_1^{\omega+q}r_2^{\omega+\mu} - r_1^{\omega+\mu+q}r_2^{\omega} - r_1^{\omega}r_2^{\omega+\mu+q}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[r_1^{\mu}r_2^{q} + r_1^{q}r_2^{\mu} - r_1^{\mu+q} - r_2^{\mu+q}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[r_1^{\mu}\left(r_2^{q}-r_1^{q}\right) - r_2^{\mu}\left(r_2^{q}-r_1^{q}\right)\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[\left(r_2^{q}-r_1^{q}\right)\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)\right]$$

bulunur. Eş.(2.3) den

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}(r_1-r_2)^2}{(r_1+r_2)^2}\left[\frac{\left(r_2^{q}-r_1^{q}\right)\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)}{(r_1-r_2)^2}\right]$$

olur. Eş.(2.3), (2.4) ve (2.5) yerlerine yazılırsa

$$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega+q)-\tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\omega+\mu+q)$$
$$=-\frac{(-2^{r-1})^{\omega}(4^{r}+2^{r+1})}{(2^{r})^{2}}\left[\frac{r_1^{q}-r_2^{q}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right]$$

bulunur. İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılarak

$$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega+q)-\tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\omega+\mu+q)$$
$$=(-1)^{\omega+1}2^{\omega(r-1)-2r}(4^{r}+2^{r+1})\tilde{p}(r,\mu)\tilde{p}(r,q)$$

elde edilir. ■

Yukarıda ispatı verilen Vajda özdeşliğinde q yerine $-\mu$ alınırsa Catalan özdeşliği elde edilir. Şimdi bu özdeşliğin ispatına yer verelim.

4.8 Teorem (Catalan Özdeşliği)

İki keyfi tam sayı $\omega\ \geq 0$ ve $r\ \geq 1$ olmak üzere

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega-\mu)-[Y(r,\omega)]^{2}$$
$$=(-1)^{\omega-\mu+1}2^{(r-1)(\omega-\mu)}[\tilde{y}(r,\mu)]^{2}, \qquad (4.22)$$

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega-\mu)-[Z(r,\omega)]^{2}$$
$$=(4^{r}+2^{r+1})(-1)^{\omega-\mu}2^{(r-1)(\omega-\mu)-2r}[\tilde{y}(r,\mu)]^{2}, \qquad (4.23)$$

$$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega-\mu)-[\tilde{y}(r,\omega)]^{2}$$
$$=(-1)^{\omega-\mu+1}2^{(r-1)(\omega-\mu)}[\tilde{y}(r,\mu)]^{2}, \qquad (4.24)$$

$$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega-\mu)-[\tilde{z}(r,\omega)]^{2}$$
$$=(-1)^{\omega-\mu}2^{(r-1)(\omega-\mu)-2r}(4^{r}+2^{r+1})[\tilde{y}(r,\mu)]^{2}. \qquad (4.25)$$

dir.

İspat. Birinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega-\mu)-[Y(r,\omega)]^2$$

$$=\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega+\mu}-r_2^{\vee}r_2^{\omega+\mu}}{r_1-r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega-\mu}-r_2^{\vee}r_2^{\omega-\mu}}{r_1-r_2}\right)-\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega}-r_2^{\vee}r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right)^2$$

olur. Eş.(2.5) yerine yazıldığında

$$= \frac{1}{K^2}\Big[(r_1^{\vee})^2r_1^{2\omega}-r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}-\ r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}+\ (r_2^{\vee})^2r_2^{2\omega}$$
$$-\left((r_1^{\vee})^2r_1^{2\omega}+(r_2^{\vee})^2r_2^{2\omega}-\ 2r_1^{\vee}r_2^{\vee}(r_1r_2)^{\omega}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{K^2}\Big[(r_1^{\vee})^2r_1^{2\omega}-r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}-\ r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}+(r_2^{\vee})^2r_2^{2\omega}-(r_1^{\vee})^2r_1^{2\omega}$$
$$-(r_1^{\vee})^2r_2^{2\omega}+2r_1^{\vee}r_2^{\vee}(r_1r_2)^{\omega}\Big]$$

bulunur. Lemma 2.2. den

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega-\mu)-[Y(r,\omega)]^2$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}-r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}+2(r_1r_2)^{\omega}\right]$$

$$=\frac{-(r_1r_2)^{\omega}}{K^2}\left[\frac{r_1^{\mu}}{r_2^{\mu}}+\frac{r_2^{\mu}}{r_1^{\mu}}-2\right]$$

$$=\frac{(-1)(r_1r_2)^{\omega}}{K^2}\left[\frac{r_1^{2\mu}+r_2^{2\mu}-2r_1^{\mu}r_2^{\mu}}{(r_1r_2)^{\mu}}\right]$$

$$=\frac{(-1)(r_1r_2)^{\omega-\mu}}{K^2}\left[r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right]^2$$

olur ve Eş. (2.4) vasıtasıyla

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega-\mu)-[Y(r,\omega)]^2$$

$$= \frac{(-1)(-2^{r-1})^{\omega-\mu}}{K^2}\left[r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right]^2$$

$$= \frac{(-1)^{\omega-\mu+1}2^{(r-1)(\omega-\mu)}}{K^2}\left[r_1^{\mu} - r_2^{\mu}\right]^2$$

bulunur. Eş.(2.5) den

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega-\mu) - [Y(r,\omega)]^2$$

$$= (-1)^{\omega-\mu+1}2^{(r-1)(\omega-\mu)}\left[\frac{r_1^{\mu} - r_2^{\mu}}{r_1 - r_2}\right]^2$$

elde edilir. İkinci tip $r -$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa buradan

$$Y(r,\omega+\mu)Y(r,\omega-\mu) - [Y(r,\omega)]^2$$

$$= (-1)^{\omega-\mu+1}2^{(r-1)(\omega-\mu)}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$$

bulunur.

Birinci tip $r -$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega-\mu) - [Z(r,\omega)]^2$$

$$= \left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega+\mu} + r_2^{\vee}r_2^{\omega+\mu}}{r_1 + r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega-\mu} + r_2^{\vee}r_2^{\omega-\mu}}{r_1 + r_2}\right) - \left(\frac{r_1^{\vee}r_1^{\omega} + r_2^{\vee}r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(r_1 + r_2)^2}\left[\left(r_1^{\vee}r_1^{\omega+\mu} + r_2^{\vee}r_2^{\omega+\mu}\right)\left(r_1^{\vee}r_1^{\omega-\mu} + r_2^{\vee}r_2^{\omega-\mu}\right) - (r_1^{\vee}r_1^{\omega} + r_2^{\vee}r_2^{\omega})^2\right]$$

bulunur. Eş.(2.3) den

$$= \frac{1}{M^2}\Big[(r_1^{\vee})^2 r_1^{2\omega} + r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu} + r_1^{\vee}r_2^{\vee}r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu} + (r_2^{\vee})^2 r_2^{2\omega}$$
$$- ((r_1^{\vee})^2 r_1^{2\omega} + (r_2^{\vee})^2 r_2^{2\omega} + 2r_1^{\vee}r_2^{\vee}(r_1r_2)^{\omega})\Big]$$

elde edilir ve Lemma 2.2. den

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega-\mu)-[Z(r,\omega)]^2 = \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}+r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}-2(r_1r_2)^{\omega}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[\frac{r_1^{\mu}}{r_2^{\mu}}+\frac{r_2^{\mu}}{r_1^{\mu}}-2\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[\frac{\left(r_1^{\mu}\right)^2+\left(r_2^{\mu}\right)^2-2r_1^{\mu}r_2^{\mu}}{(r_1r_2)^{\mu}}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega-\mu}}{M^2}\left[r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right]^2$$

bulunur ki Eş. (2.3) ve (2.4) yardımıyla

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega-\mu)-[Z(r,\omega)]^2$$

$$= \frac{(-2^{r-1})^{\omega-\mu}}{(2^r)^2}\left[r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right]^2$$

$$= (-1)^{\omega-\mu}2^{(r-1)(\omega-\mu)-2r}\left[r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right]^2$$

$$= (r_1-r_2)^2(-1)^{\omega-\mu}2^{(r-1)(\omega-\mu)-2r}\left[\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right]^2$$

olur. İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü ve (2.5) yerlerine yazılırsa

$$Z(r,\omega+\mu)Z(r,\omega-\mu)-[Z(r,\omega)]^2$$

$$= (-1)^{\omega-\mu}(4^r+2^{r+1})2^{(r-1)(\omega-\mu)-2r}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$$

bulunur.

İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega-\mu)-[\tilde{y}(r,\omega)]^2$

$$=\left[\frac{r_1^{\omega+\mu}-r_2^{\omega+\mu}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega-\mu}-r_2^{\omega-\mu}}{r_1-r_2}\right]-\left[\frac{r_1^{\omega}-r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\left[\left(r_1^{\omega+\mu}-r_2^{\omega+\mu}\right)\left(r_1^{\omega-\mu}-r_2^{\omega-\mu}\right)-(r_1^{\omega}-r_2^{\omega})^2\right]$$

elde edilir. Eş.(2.5) den

$$=\frac{1}{K^2}\left[\left(r_1^{2\omega}-r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}-r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}+r_2^{2\omega}\right)-(r_1^{2\omega}+r_2^{2\omega}-2r_1^{\omega}r_2^{\omega})\right]$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}-r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}+2r_1^{\omega}r_2^{\omega}\right]$$

$$=-\frac{(r_1r_2)^{\omega}}{K^2}\left[\frac{r_1^{\mu}}{r_2^{\mu}}+\frac{r_2^{\mu}}{r_1^{\mu}}-2\right]$$

$$=-\frac{(r_1r_2)^{\omega}}{K^2}\left[\frac{r_1^{2\mu}+r_2^{2\mu}-2(r_1r_2)^{\mu}}{(r_1r_2)^{\mu}}\right]$$

bulunur. Eş. (2.5) den

$$=-\frac{(r_1r_2)^{\omega}}{(r_1r_2)^{\mu}}\left[\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right]^2$$

elde edilir. İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega-\mu)-[\tilde{y}(r,\omega)]^2$

$=-(r_1r_2)^{\omega-\mu}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$

olur. Eş.(2.4) yerine yazılırsa buradan

$\tilde{y}(r,\omega+\mu)\tilde{y}(r,\omega-\mu)-[\tilde{y}(r,\omega)]^2$

$= -(-2^{r-1})^{\omega-\mu}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$

$= (-1)^{\omega-\mu+1}2^{(r-1)(\omega-\mu)}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$

bulunur.

İkinci tip $r-$ Pell$-$ Lucas sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega-\mu)-[\tilde{z}(r,\omega)]^2$

$$= \left[\frac{r_1^{\omega+\mu}+r_2^{\omega+\mu}}{r_1+r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega-\mu}+r_2^{\omega-\mu}}{r_1+r_2}\right]-\left[\frac{r_1^{\omega}+r_2^{\omega}}{r_1+r_2}\right]^2$$

$$= \frac{1}{(r_1+r_2)^2}\left[\left(r_1^{\omega+\mu}+r_2^{\omega+\mu}\right)\left(r_1^{\omega-\mu}+r_2^{\omega-\mu}\right)-(r_1^{\omega}+r_2^{\omega})^2\right]$$

bulunur. Eş.(2.3) yerine yazıldığında

$$= \frac{1}{M^2}\left[\left(r_1^{2\omega}+r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}+r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}+r_2^{2\omega}\right)-(r_1^{2\omega}+r_2^{2\omega}+2r_1^{\omega}r_2^{\omega})\right]$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\omega+\mu}r_2^{\omega-\mu}+r_1^{\omega-\mu}r_2^{\omega+\mu}-2r_1^{\omega}r_2^{\omega}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[\frac{r_1^{\mu}}{r_2^{\mu}}+\frac{r_2^{\mu}}{r_1^{\mu}}-2\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega}}{M^2}\left[\frac{r_1^{2\mu}+r_2^{2\mu}-2r_1^{\mu}r_2^{\mu}}{(r_1r_2)^{\mu}}\right]$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega-\mu}}{M^2}\left[r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right]^2$$

$$= \frac{(r_1r_2)^{\omega-\mu}(r_1-r_2)^2}{M^2}\left[\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right]^2$$

elde edilir. İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü ve (2.3), (2.4) ve (2.5) yerlerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yardımıyla

$$\tilde{z}(r,\omega+\mu)\tilde{z}(r,\omega-\mu)-[\tilde{z}(r,\omega)]^2$$

$$=\frac{(-2^{r-1})^{\omega-\mu}(4^r+2^{r+1})}{(-2^r)^2}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$$

bulunur. Buradan

$$=(-1)^{\omega-\mu}(4^r+2^{r+1})2^{(r-1)(\omega-\mu)-2r}[\tilde{y}(r,\mu)]^2$$

elde edilir.■

4.9 Sonuç (Cassini Özdeşliği)

İki keyfi tam sayı $\omega\ \geq 0$ ve $r\ \geq 1$ olmak üzere birinci tip $r-$ Pell sayıları ve $r-$ Pell $-$ Lucas sayılarının, ikinci tip $r-$ Pell sayıları ve $r-$ Pell $-$ Lucas sayılarının Catalan özdeşliklerinde $\mu=1$ alınırsa Cassini özdeşlikleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Y(r,\omega+1)Y(r,\omega-1)-[Y(r,\omega)]^2=(-1)^{\omega}2^{(r-1)(\omega-1)},\ \text{(Brod, 2019)}$$

$$Z(r,\omega+1)Z(r,\omega-1)-[Z(r,\omega)]^2=\ (4^r+2^{r+1})(-1)^{\omega-1}2^{(r-1)(\omega-1)-2r},$$

$$\tilde{y}(r,\omega+1)\tilde{y}(r,\omega-1)-[\tilde{y}(r,\omega)]^2=(-1)^{\omega}2^{(r-1)(\omega-1)},$$

$$\tilde{z}(r,\omega+1)\tilde{z}(r,\omega-1)-[\tilde{z}(r,\omega)]^2=(-1)^{\omega-1}(4^r+2^{r+1})2^{(r-1)(\omega-1)-2r}.$$

dir.

4.10 Teorem (d'Ocagne Özdeşliği)

İki keyfi tam sayı $\omega\ \geq 0$ ve $r\ \geq 1$ olmak üzere

$$Y(r,\mu)Y(r,\omega+1)-Y(r,\omega)Y(r,\mu+1)$$
$$=(-1)^{\mu+1}2^{(r-1)\mu}\tilde{y}(r,\omega-\mu), \tag{4.26}$$

$$Z(r,\mu)Z(r,\omega+1)-Z(r,\omega)Z(r,\mu+1)$$
$$=(-1)^{\mu}(4^{r}+2^{r+1})2^{(r-1)\mu-2r}\tilde{y}(r,\omega-\mu), \tag{4.27}$$

$$\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,\omega+1)-\tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\mu+1)$$
$$=(-1)^{\mu+1}2^{(r-1)\mu}\tilde{y}(r,\omega-\mu), \tag{4.28}$$

$$\tilde{z}(r,\mu)\tilde{z}(r,\omega+1)-\tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\mu+1)$$
$$=(-1)^{\mu}(4^{r}+2^{r+1})2^{(r-1)\mu-2r}\tilde{y}(r,\omega-\mu). \tag{4.29}$$

dir.

İspat. Birinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$Y(r,\mu)Y(r,\omega+1)-Y(r,\omega)Y(r,\mu+1)$$

$$=\left(\frac{r_1^{\nu}r_1^{\mu}-r_2^{\nu}r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\nu}r_1^{\omega+1}-r_2^{\nu}r_2^{\omega+1}}{r_1-r_2}\right)-\left(\frac{r_1^{\nu}r_2^{\omega}-r_2^{\nu}r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right)\left(\frac{r_1^{\nu}r_1^{\mu+1}-r_2^{\nu}r_2^{\mu+1}}{r_1-r_2}\right)$$

$$=\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\left[\left(r_1^{\nu}r_1^{\mu}-r_2^{\nu}r_2^{\mu}\right)\left(r_1^{\nu}r_1^{\omega+1}-r_2^{\nu}r_2^{\omega+1}\right)\right.$$
$$\left.-\left(r_1^{\nu}r_2^{\omega}-r_2^{\nu}r_2^{\omega}\right)\left(r_1^{\nu}r_1^{\mu+1}-r_2^{\nu}r_2^{\mu+1}\right)\right]$$

elde edilir. Eş. (2.5) den

$$=\frac{1}{K^2}\left[(r_1^{\nu})^2r_1^{\mu+\mu+1}-r_1^{\nu}r_2^{\nu}r_1^{\mu}r_2^{\omega+1}-r_1^{\nu}r_2^{\nu}r_1^{\omega+1}r_2^{\mu}+(r_2^{\nu})^2r_2^{\mu+\omega+1}\right.$$
$$\left.-\left((r_1^{\nu})^2r_1^{\mu+\omega+1}-r_1^{\nu}r_2^{\nu}r_1^{\omega}r_2^{\mu+1}-r_1^{\nu}r_2^{\nu}r_1^{\mu+1}r_2^{\omega}+(r_2^{\nu})^2r_2^{\mu+\omega+1}\right)\right]$$

olur. Lemma 2.2. son eşitlikte yerine yazılırsa

$$Y(r,\mu)Y(r,\omega+1)-Y(r,\omega)Y(r,\mu+1)$$

$$= \frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\mu}\ r_2^{\omega+1} - r_1^{\omega+1}\, r_2^{\mu} + r_1^{\omega} r_2^{\mu+1} + r_1^{\mu+1} r_2^{\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\mu} r_2^{\omega}(r_2 - r_1) + r_1^{\omega} r_2^{\mu}(r_2 - r_1)\right]$$

$$= \frac{(r_2 - r_1)\left(r_1^{\omega} r_2^{\mu} - r_1^{\mu} r_2^{\omega}\right)}{K^2}$$

bulunur. Eş. (2.5) yerine yazıldığında

$$= -\frac{r_1^{\omega} r_2^{\mu} - r_1^{\mu} r_2^{\omega}}{r_1 - r_2}$$

$$= -(r_1 r_2)^{\mu}\left[\frac{r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}}{r_1 - r_2}\right]$$

elde edilir ve Eş. (2.4) den

$$Y(r,\mu)Y(r,\omega+1) - Y(r,\omega)Y(r,\mu+1)$$

$$= (-1)^{\mu+1} 2^{(r-1)\mu}\left[\frac{r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}}{r_1 - r_2}\right]$$

bulunur. İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa buradan

$$Y(r,\mu)Y(r,\omega+1) - Y(r,\omega)Y(r,\mu+1)$$

$$= (-1)^{\mu+1} 2^{(r-1)\mu}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

elde edilir.

Birinci tip $r -$ Pell−Lucas sayılarının Binet formülü yerine yazılırsa

$$Z(r,\mu)Z(r,\omega+1) - Z(r,\omega)Z(r,\mu+1) =$$

$$= \left[\frac{r_1^{\nu} r_1^{\mu} + r_2^{\nu} r_2^{\mu}}{r_1 + r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\nu} r_1^{\omega+1} + r_2^{\nu} r_2^{\omega+1}}{r_1 + r_2}\right] - \left[\frac{r_1^{\nu} r_1^{\omega} + r_2^{\nu} r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\nu} r_1^{\mu+1} + r_2^{\nu} r_2^{\mu+1}}{r_1 + r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{(r_1 + r_2)^2}\left[\left(r_1^{\nu} r_1^{\mu} + r_2^{\nu} r_2^{\mu}\right)\left(r_1^{\nu} r_1^{\omega+1} + r_2^{\nu} r_2^{\omega+1}\right) - \left(r_1^{\nu} r_1^{\omega} + r_2^{\nu} r_2^{\omega}\right)\left(r_1^{\nu} r_1^{\mu+1} + r_2^{\nu} r_2^{\mu+1}\right)\right]$$

elde edilir. Eş. (2.3) yerine yazıldığında

$$= \frac{1}{M^2}\left[(r_1^{\nu})^2 r_1^{\mu+\omega+1} + r_1^{\nu} r_2^{\nu} r_1^{\mu} r_2^{\omega+1} + r_1^{\nu} r_2^{\nu} r_1^{\omega+1} r_2^{\mu} + (r_2^{\nu})^2 r_2^{\mu+\omega+1} - (r_1^{\nu})^2 r_1^{\mu+\omega+1} - r_1^{\nu} r_2^{\nu} r_1^{\omega} r_2^{\mu+1} - r_1^{\nu} r_2^{\nu} r_1^{\mu+1} r_2^{\omega} - (r_2^{\nu})^2 r_2^{\mu+\omega+1}\right]$$

olur ve Lemma 2.2. den

$Z(r,\mu)Z(r,\omega+1) - Z(r,\omega)Z(r,\mu+1)$

$$= \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\mu} r_2^{\omega+1} + r_1^{\omega+1} r_2^{\mu} - r_1^{\omega} r_2^{\mu+1} - r_1^{\mu+1} r_2^{\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\mu} r_2^{\omega}(r_2 - r_1) - r_1^{\omega} r_2^{\mu}(r_2 - r_1)\right]$$

$$= \frac{r_2 - r_1}{M^2}\left(r_1^{\mu} r_2^{\omega} - r_1^{\omega} r_2^{\mu}\right)$$

elde edilir. Eş.(2.3) yerine yazıldığında

$$= \frac{(r_1 - r_2)(r_1 r_2)^{\mu}\left(r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}\right)}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$= \left[\frac{(r_1 - r_2)^2 (r_1 r_2)^{\mu}}{(r_1 + r_2)^2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}}{r_1 - r_2}\right]$$

bulunur. İkinci tip r −Pell sayılarının Binet formülü ve (2.3), (2.4) ve (2.5) eşitlikleri kullanılarak

$Z(r,\mu)Z(r,\omega+1)-Z(r,\omega)Z(r,\mu+1)$

$$=\frac{(4^r+2^{r+1})(-2^{r-1})^{\mu}}{(2^r)^2}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

$$=(-1)^{\mu}(4^r+2^{r+1})2^{\mu(r-1)-2r}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

elde edilir.

İkinci tip $r-$ Pell sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,\omega+1)-\tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\mu+1)=$

$$=\left[\frac{r_1^{\mu}-r_2^{\mu}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega+1}-r_2^{\omega+1}}{r_1-r_2}\right]-\left[\frac{r_1^{\omega}-r_2^{\omega}}{r_1-r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\mu+1}-r_2^{\mu+1}}{r_1-r_2}\right]$$

$$=\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\left[\left(r_1^{\mu}-r_2^{\mu}\right)(r_1^{\omega+1}-r_2^{\omega+1})-(r_1^{\omega}-r_2^{\omega})\left(r_1^{\mu+1}-r_2^{\mu+1}\right)\right]$$

bulunur. Eş.(2.5) yerine yazıldığında

$$=\frac{1}{K^2}\left[\left(r_1^{\mu+\omega+1}-r_1^{\mu}r_2^{\omega+1}-r_1^{\omega+1}r_2^{\mu}+r_2^{\mu+\omega+1}\right)\right.$$
$$\left.-\left(r_1^{\mu+\omega+1}-r_1^{\omega}r_2^{\mu+1}-r_1^{\mu+1}r_2^{\omega}+r_2^{\mu+\omega+1}\right)\right]$$

olur. Buradan

$$=\frac{1}{K^2}\left[-r_1^{\mu}r_2^{\omega+1}-r_1^{\omega+1}r_2^{\mu}+r_1^{\omega}r_2^{\mu+1}+r_1^{\mu+1}r_2^{\omega}\right]$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[r_1^{\mu}r_2^{\omega}(r_1-r_2)-r_1^{\omega}r_2^{\mu}(r_1-r_2)\right]$$

$$=\frac{r_1-r_2}{K^2}\left[r_1^{\mu}r_2^{\omega}-r_1^{\omega}r_2^{\mu}\right]$$

bulunur. Eş.(2.5) den

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1^{\mu} r_2^{\omega} - r_1^{\omega} r_2^{\mu}\right]$$

$$= -(r_1 r_2)^{\mu}\left[\frac{r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}}{r_1 - r_2}\right]$$

elde edilir. İkinci tip $r -$ Pell sayılarının Binet formülü ve (2.4) yerlerine yazılırsa

$$\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,\omega+1) - \tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\mu+1)$$

$$= -(-2^{r-1})^{\mu}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

olur ve buradan

$$\tilde{y}(r,\mu)\tilde{y}(r,\omega+1) - \tilde{y}(r,\omega)\tilde{y}(r,\mu+1)$$

$$= (-1)^{\mu+1}2^{(r-1)\mu}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

bulunur.

İkinci tip $r -$ Pell$-$Lucas sayılarının Binet formülü kullanılırsa

$$\tilde{z}(r,\mu)\tilde{z}(r,\omega+1) - \tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\mu+1)$$

$$= \left[\frac{r_1^{\mu} + r_2^{\mu}}{r_1 + r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\omega+1} + r_2^{\omega+1}}{r_1 + r_2}\right] - \left[\frac{r_1^{\omega} + r_2^{\omega}}{r_1 + r_2}\right]\left[\frac{r_1^{\mu+1} + r_2^{\mu+1}}{r_1 + r_2}\right]$$

$$= \frac{1}{(r_1 + r_2)^2}\left[\left(r_1^{\mu} + r_2^{\mu}\right)\left(r_1^{\omega+1} + r_2^{\omega+1}\right) - \left(r_1^{\omega} + r_2^{\omega}\right)\left(r_1^{\mu+1} + r_2^{\mu+1}\right)\right]$$

bulunur. Eş. (2.3) den

$$= \frac{1}{M^2}\left[\left(r_1^{\mu+\omega+1} + r_1^{\mu} r_2^{\omega+1} + r_1^{\omega+1} r_2^{\mu} + r_2^{\mu+\omega+1}\right) - \left(r_1^{\mu+\omega+1} + r_1^{\omega} r_2^{\mu+1} + r_1^{\mu+1} r_2^{\omega} + r_2^{\mu+\omega+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[r_1^{\mu} r_2^{\omega+1} + r_1^{\omega+1} r_2^{\mu} - r_1^{\omega} r_2^{\mu+1} - r_1^{\mu+1} r_2^{\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[-r_1^{\mu} r_2^{\omega}(r_1 - r_2) + r_1^{\omega} r_2^{\mu}(r_1 - r_2)\right]$$

elde edilir. Eş.(2.5) yerine yazıldığında

$$= \frac{K}{M^2}\left[-r_1^{\mu} r_2^{\omega} + r_1^{\omega} r_2^{\mu}\right]$$

$$= \frac{K(r_1 r_2)^{\mu}}{M^2}\left[r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}\right]$$

$$= \frac{K^2(r_1 r_2)^{\mu}}{M^2}\left[\frac{r_1^{\omega-\mu} - r_2^{\omega-\mu}}{r_1 - r_2}\right]$$

olur. İkinci tip $r-$ Pell$-$Lucas sayılarının Binet formülü ve (2.3), (2.4) ve (2.5) yerlerine yazılırsa buradan

$$\tilde{z}(r,\mu)\tilde{z}(r,\omega+1) - \tilde{z}(r,\omega)\tilde{z}(r,\mu+1)$$

$$= \frac{(4^r + 2^{r+1})(-2^{r-1})^{\mu}}{4^r}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

$$= (-1)^{\mu}(4^r + 2^{r+1})2^{(r-1)\mu-2r}\tilde{y}(r,\omega-\mu)$$

elde edilir.■

5. KAYNAKLAR

Akbaba, Ü. (2023). Some matrix applications on the special integer number sequences. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, *10*(1), 209-216.

Bayrakçı Özsoy, Ö. & Bilgici, G. (2022). Unrestricted Pell and Pell – Lucas 2N-ons. *Kocaeli Journal of Science and Engineering*, 5(2), 112-116.

Brod, D. (2019). On a new one parameter generalization of Pell numbers. *Annales Mathematicae Silesianae*, 33(1), 66-76.

Catarino, P., & Campos, H. (2017). Incomplete k-Pell, k-Pell-Lucas and modified k-Pell numbers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(3), 361-372.

Cerin, Z., & Gianella, G. M. (2006). Formulas for sums of squares and products of Pell numbers. *Atti Della Accademia Delle Scienze Di Torino. Classe Di Scienze Fisiche Matematiche E Naturali*, *140*, 113-122.

Çelik, S., Durukan, İ., & Özkan, E. (2021). New recurrences on Pell numbers, Pell-Lucas numbers, Jacobsthal numbers, and Jacobsthal-Lucas numbers. *Chaos, Solitons & Fractals, 150*, 111173.

Daşdemir, A. (2016). Generalizations of modified Pell and Pell-Lucas sequences and their generating matrices and some sums. *Erzincan University Journal of Science and Technology, 9*(3), 178-184.

Gökbaş, H .(2023). Gaussian-bihyperbolic numbers containing Pell and Pell-Lucas numbers. *Journal of Advanced Research in Natural and Applied Sciences, 9*(1), 183-189.

Gökbaş, H. (2022). Dual-Gaussian Pell and Pell-Lucas numbers. *Cumhuriyet Science Journal*, *43*(4), 665-671.

Halıcı, S., & Daşdemir, A. (2010). Pell, Pell-Lucas ve modified Pell dizileri arasında bazı ilişkiler. *Sakarya University Journal of Science, 14* (2) , 141-145.

Halıcı, S., & Öz, S. (2016). On Some Gaussian Pell and Pell-Lucas numbers. *Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, 6*(1), 8-18.

Karaaslan, N.(2019). A note on modified Pell polynomials. *Aksaray University Journal of Science and Engineering, 3*(1), 1-7.

Koshy, T. (2014). *Pell and Pell – Lucas Numbers with applications*. New York:Springer.

Köken, F. (2019). The properties of the altered Pell and Pell Lucas sequences . *Journal of the Institute of Science and Technology, 9*(3), 1646-1656.

Köken, F. (2020). Special Pell and Pell Lucas matrices of order 3x3 . *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 8(1), 827-838.

Melham, R. (1999). Sums involving Fibonacci and Pell numbers. *Portugaliae Mathematica, 56*(3), 309-318.

Menken, H. & Dişkaya, O. (2019). On the quadra Fibona-Pell and hexa Fibona-Pell-Jacobsthal sequences. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7 (2), 149-160.

Menken, H., & Dişkaya, O. (2019). On the Quadra Fibona-Pell and Hexa Fibona-Pell-Jacobsthal Sequences. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 7*(2), 149-160.

Özkan, E., & Uysal, M. (2022). d-Gaussian Pell-Lucas polynomials and their matrix representations. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 14*(2), 262-270.

Özkoç, A. & Gündüz, E. (2022). Binomial transform for quadra Fibona-Pell sequence and quadra Fibona-Pell quaternion. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 5 (4), 145-155.

Panwar, Y. (2022). Identities of generalized Pell and Pell-Lucas sequences. *Naturengs, 3*(2), 46-55.

Szynal-Liana, A., Wloch, İ., & Liana, M. (2022). On certain bihypernomials related to Pell and Pell-Lucas numbers. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 71*(2), 422-433.

Tokeşer, Ü., Mert, T., Ünal, Z., & Bilgici, G. (2021). On Pell and Pell-Lucas generalized octonions, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 13*(2), 226-233.

Torunbalcı Aydın, F. (2018). On bicomplex Pell and Pell-Lucas numbers. *Communications in Advanced Mathematical Sciences, 1*(2), 142-155.