T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

REYHAN GÖKTEKE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PROF. DR. YAŞAR BOLAT

EYLÜL - 2023
KASTAMONU

TEZ ONAYI

Reyhan GÖKTEKE tarafından hazırlanan "**BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **08.09.2023** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr. Yaşar BOLAT Kastamonu Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Mustafa YILDIZ Bartın Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Murat GEVGEŞOĞLU Kastamonu Üniversitesi	.....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Enstitü Müdürü V. Doç. Dr. Osman ÇİÇEK .....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Reyhan GÖKTEKE

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

REYHAN GÖKTEKE

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN:PROF. DR. YAŞAR BOLAT

Bu tezde, birinci mertebeden gecikmeli lineer fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin davranışı incelenerek çözümlerinin salınımlılığı üzerine bazı yeni sonuçlar verilmiştir.

Tez, beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde, fark denklemlerinin tarihi süreci ve uygulama alanları hakkında bilgi verilmiş ve bu tip denklemlerin salınımlılığının üzerine yapılmış olan temel çalışmalarda elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir. İkinci bölümde, fark denklemleri ve denklemlerin salınımlılığı ile ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölüm, tezin orijinal bölümü olup birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin davranışı üzerine yeni sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölüm, tezin yine orijinal bölümü olup birinci mertebeden gecikmeli neutral fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı incelenmiş ve yeni sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölüm, tartışma ve sonuç bölümü olarak verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fark Denklemleri, Lineer Fark Denklemleri, Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, Gecikmeli Fark Denklemi, Çözümlerin Limit Davranışı, Neutral Fark Denklemleri, Salınımlılık, Çözümlerin Salınımlılığı

Eylül 2023, 67 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF A CLASS OF FIRST-ORDER LINEAR DIFFERENCE EQUATONS

REYHAN GÖKTEKE

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR:PROF. DR. YAŞAR BOLAT

In this thesis, the behavior of the solutions of a class of first-order linear difference equations with delay is investigated and some new results are given on the oscillations of their solutions.

The thesis consist of five chapters. In the first chapter, information about the historical process and application areas of difference equations is given and some results obtained by the main studies on the oscillations of such equations are given. In the second chapter, basic definitions, about the difference equations and their oscillations are given. In the third chapter is the original chapter of this thesis and in there new results on the behavior of the solutions of a class of the first-order linear difference equations with delay are given. The fourth chapter is the original part of the thesis, and the behavior of the solutions of the first order delayed neutral difference equations is examined and new results are given. The fifth chapter is given as the discussion and conclusion part.

KEYWORDS: Difference Equations, Linear Difference Equations, First-Order Linear Difference Equations, Delayed Difference Equation, Limit Behavior of Solutions, Neutral Difference Equations, Oscillation, Oscillatory of Solutions.

September 2023, 67 Page

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Yaşar BOLAT (Kastamonu Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü)'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Her zaman yanımda olan aileme gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

REYHAN GÖKTEKE

Kastamonu, 2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI ..... **ii**
TAAHHÜTNAME ..... **iii**
ÖZET ..... **iv**
ABSTRACT ..... **v**
TEŞEKKÜR ..... **vi**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **viii**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... **ix**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR **28**
2.1 İleri Fark Denklemi 28
2.2 Gecikmeli İleri Fark Denklemi 31
2.3 Salınımlılık 31
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI **36**
3.1 $\{p_n\}$Dizisinin Periyodik ve Salınımlı Olma Durumu 36
3.2 $\{p_n\}$ Dizisinin $p_n p_{n+1} < 0$ Biçiminde Salınımlı Olma Durumu 46
4. BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI **49**
5. TARTIŞMA VE SONUÇ **63**
KAYNAKLAR **64**
ÖZGEÇMİŞ **67**

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1 $\boldsymbol{\tau = 1}$ için $\mathbb{N}_{\mathbf{k_1}}$ ve $\mathbb{N}_{\mathbf{k_2}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu..... 39
Şekil 3.2$\boldsymbol{\tau = 2}$ için $\mathbb{N}_{\mathbf{k_1}}$ ve $\mathbb{N}_{\mathbf{k_2}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu..... 40
Şekil 3.3 $\boldsymbol{\tau = 2}$ için $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_3}}$ ve $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_4}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu..... 43
Şekil 3.4 $\boldsymbol{\tau = 1}$ için $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_5}}$, $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_6}}$ ve $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_7}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu..... 46
Şekil 3.5 $\boldsymbol{\tau = 1}$ için $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_8}}$ ve $\mathbb{N}_{\boldsymbol{k_9}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu..... 48
Şekil 4.1 $\boldsymbol{k = 1}$ ve $\boldsymbol{l = 3}$ için salınımlılık durumu..... 56
Şekil 4.2 $\boldsymbol{k = 4}$ ve $\boldsymbol{l = 2}$ için salınımlılık durumu..... 62

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Δ	: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ şeklinde tanımlı ileri fark operatörü
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar Kümesi
$\forall$	: Her, Bütün, Hepsi
$\exists$	: En az, Bazı
ε	: Epsilon
λ	: Karakteristik Denklemin Kökleri
$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$	: $\{0,1,2, \dots\}$, sıfırdan başlayan doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_{\boldsymbol{n_0}}$	: $\{n_0, n_0+1, \dots\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$'den başlayan doğal sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler teorisi, günlük hayatta meydana gelebilecek olayların durumlarını açıklamada ve bunları matematiksel olarak modellemede önemli bir yere sahiptir. Bu teori 17. yy başlarında Isaac Newton ve Gottfried Leibniz tarafından ortaya atılmıştır. Yaptıkları çalışmalar diğer bilim insanları tarafından kullanılmış ve geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu denklemlerin uygulama alanları matematik, mühendislik, fizik, mekanik gibi birçok bilim dalında önemli bir yere sahiptir. Boucekkine vd. (1997) çalışmalarında bir şehrin ekonomisinin büyümesini etkileyen faktörlerin hesaplanmasında; Driver (2012) yayımlanan kitabındaki çalışmalarda radyoaktif maddenin bozunma hızının hesaplanmasında, mekanik alanlarda nesnelerin yerçekimi etkisi altında hızlarının, hareketlerinin ve konumlarının belirlenmesinde, bir kütlenin basit bir yay üzerindeki salınım hareketinin değişiminin incelemesinde diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemlerini kullanmışlardır.

Gündelik yaşamda birçok durumda gecikme meydana gelmektedir. Bu gecikmeler bazı durumlarda ihmal edildiği gibi bazı zamanlarda da önemli olmaktadır. Bazı durumlarda şimdiki zaman ile geçmişte olan zaman arasında ilişki olabilir. Bu bize geçmişe olan bağlılığın önemini hatırlatır. Bu tarz durumların modellenmesinde gecikmeli diferensiyel denklemler kullanılmaktadır. Örneğin, belirli bir hastalığın tedavisini araştırmak için geçmişe dönük yapılan çalışmaların incelenmesi, bu tür hastalığa karşı zamanla değişim gösteren durumların modellenmesi sonucunda yeni sonuçlara varılması; bir canlı türünün ilerleyen süreçlerde yaşamlarını sürdürebilmesi ve uygun ortamların oluşturulması için oluşabilecek durumları tahmin etme ve hesaplamaların yapılabilmesi için gecikmeli diferensiyel denklemler kullanılmıştır. Baker vd. (1999) çalışmalarında biyolojik olaylarda gecikmenin öneminden bahsederek gecikmeli diferensiyel denklemleri kullanmışlardır. Son yıllarda kanser hastalığının artması sonucunda yapılan çalışmalarda da matematiksel modelleme kullanılmıştır. Villasana ve Radunskaya (2003), yaptıkları çalışmada kanser hücrelerinin bağışıklık sistemine etkisini matematiksel olarak modelleyerek özel olarak üretilen ilaçların bu tümör hücrelerine etkisini incelemişlerdir. Bahsedilen

olaylara benzer durumlarda matematiksel modelleme fizik, tıp, biyoloji, mühendislik gibi birçok bilimsel alanda kullanılmıştır.

Fark denklemleri teorisi de diferensiyel denklemler teorisinin ayrık benzeri (discrete analoque) olarak nitelendirilmektedir. Diferensiyel denklemler teorisi süreklilik kavramı üzerine kurulmuş matematiksel bir modeldir. Bazı olayların takibi, oluşumu bazen süreklilik arz etmez, kesikli (ayrık) olarak da ifade edilebilir. İşte bu durumda devreye fark denklemleri teorisi girmiştir. Yani fark denklemleri, diferensiyel denklemlerin kesikli (discrete) halidir. Diferensiyel denklemlerdeki türev kavramı, fark denklemlerinde fonksiyonun ileri farkı şeklinde tanımlanmaktadır. Son yıllarda fark denklemleri teorisi ile ilgili çalışmaların artması, bu teoriyi daha da önemli hale getirmiştir. Birçok bilimsel alanda kullanımı olayları açıklamada çok önemli bir hale getirmiştir. Goldberg (1958) kitabında ekonomide arz talep ilişkilerini, üretim-tüketim faaliyetlerinin değişimlerini vb. konuları, May (1976)'daki çalışmasında canlı popülasyonlarının gelişimini ve devamlılığını, bunların biyolojik modellemelerini fark denklemleri teorisini kullanarak incelemişlerdir.

Gecikmeli fark denklemleri de zamanın sürekli olmadığı durumlara karşılık gelen denklemlerin incelenmesiyle ortaya çıkmıştır. Yani sürekli olmayan nesillere sahip popülasyonların dinamiklerini modelleyen fark denklemlerini türetmenin yollarından biri, sürekli olan nesillere sahip modellerin uygun modifikasyonlarına dayanır. Li ve Huo (2005), çalışmalarında popülasyon değişimlerini gecikmeler üzerinden modelleyerek incelemişlerdir. Ayrıca bu çalışmada bazı özel gecikme durumları ele alınarak popülasyon modellerine uygulanmış ve bu modellerin periyodik çözümleri elde edilmiştir.

Son yıllarda fark denklemleri üzerine yapılan çalışmalar doğrultusunda bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerine de birçok çalışma yapılmıştır. Elaydi (2000) kitabında bu tür çalışmalara yer vermiştir. Ayrıca Philos (1992)'de periyodik fonksiyonları ele alarak, periyodik katsayılı lineer gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin kalitatif incelemesi üzerine çalışma yapmıştır.

Fark denklemleri, diferensiyel denklemlerin ayrık benzeri olduğu daha öncede belirtilmişti. Neutral gecikmeli fark denklemleri de neutral gecikmeli diferensiyel denklemlerin ayrık benzeridir. Neutral fark denklemleri, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin aynı mertebeden farkını içeren denklemlerdir. Yani fonksiyon sadece n değişkenine bağlı olarak değil, τ kadar önceki zamanlardaki değerlerinin değişimine de bağlıdır. $n-\tau_1$, $n-\tau_2$, ... gibi gecikmelere, aynı anda gecikmesiz terimin birlikte farkına bağlı olarak ifade edilen fark denklemlerine neutral gecikmeli fark denklemi denir.

Genel olarak, k. mertebeden bir adi fark denklemi

$$\Delta^k x_n + f(n, x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n, \dots, \Delta^{k-1} x_n) = 0$$

şeklinde, k. mertebeden bir gecikmeli fark denklemi ise

$$\Delta^k x_n + f\left(n, x_{n-\tau_1}, \Delta x_{n-\tau_2}, \Delta^2 x_{n-\tau_3}, \dots, \Delta^{k-1} x_{n-\tau_k}\right) = 0$$

şeklinde tanımlanırken, k. mertebeden bir neutral gecikmeli fark denklemi

$$\Delta^k (x_n + \rho_n x_{n-\tau}) + f\left(n, x_{n-\tau_1}, \Delta x_{n-\tau_2}, \Delta^2 x_{n-\tau_3}, \dots, \Delta^{k-1} x_{n-\tau_k}\right) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Burada $n \in \mathbb{N}, \tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ lar pozitif tamsayılardır.

Neutral gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin elde edilmesi zordur. Çözümlerin elde edilemediği durumlarda kalitatif incelemeleri yapılmakla beraber bu teoride daha çok salınımlılık ve sınırlılık durumları incelenmektedir. Neutral gecikmeli fark denklemleri popülasyon dinamiğinde, kararlılık teorisinde, çatallanma analizinde vb. birçok alanda kullanılmaktadır. Bu tür denklemlerin uygulamalarına Georgiou vd. (1989), Thandapani vd. (2003), Wei (1999), Yu ve Cheng (1994) gibi çalışmalardan ulaşılabilir.

Yukarıda bahsedilen herhangi bir doğa olayının modellenmesi durumunda fark denklemleri kullanılmış olup bu denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi yeni yeni metotlar bulmayı gerektirdiğinden bu tür denklemlerin çözümlerinin bulunmaya

çalışılması yerine çözümlerinin davranışlarının incelenmesi yani çözümlerin kalitatif olarak incelenmesi büyük önem arz etmektedir. Bu yüzden tezde ele aldığımız denklem tipinde, daha önce ele alınmış pozitif katsayılı, negatif katsayılı ve pozitif periyodik katsayılı denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerine yeni sonuçlar verilmiş olup bazı temel ve önemli sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.1 $r, s \in \mathbb{N}$ ve $i = -r, \dots, s$ için $p_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x_{m+1} - x_m + \sum_{i=-r}^{s} p_i x_{m+i} = 0 \ , m = 0,1,2,.. \tag{1.1}$$

fark denklemini göz önüne alalım. Aşağıdaki durumlar birbirine denktir.

(i) (1.1) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(ii) (1.1) fark denklemine ait

$$\mu - 1 + \sum_{i=-r}^{s} p_i \mu^i = 0$$

karakteristik denkleminin pozitif kökü yoktur (Györi ve Ladas, 1991).

Teorem 1.2 $p \in \mathbb{R}$ ve $\tau \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_{m+1} - x_m + p x_{m-\tau} = 0 \tag{1.2}$$

şeklindeki $(\tau + 1)$. mertebeden fark denklemini göz önüne alalım. (1.2) fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır.

(i) $\tau = -1$ ise $p \leq -1$;

(ii) $\tau = 0$ ise $p \geq 1$;

(iii) $\tau \in \{\dots, -3, -2\} \cup \{1,2,..\}$ ise $p > \frac{\tau^{\tau}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$

(Györi ve Ladas, 1991; Ladas vd. 1989).

Teorem 1.3 $j = 1,2, \dots, s$ için $p_j \in (0, \infty)$ ve $\tau_j \in \{0,1,2, \dots\}$ veya $j = 1,2, \dots, s$ için $p_j \in (-\infty, 0)$ ve $\tau_j \in \{\dots, -3, -2, -1\}$ şartlarından biri ile

$$\sum_{j=1}^{s} p_j \frac{(\tau_j + 1)^{\tau_j+1}}{{\tau_j}^{\tau_j}} > 1 \tag{1.3}$$

sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $m = 0,1,2, \dots$ için

$$a_{m+1} - a_m + \sum_{j=1}^{s} p_j a_{m-\tau_j} = 0 \tag{1.4}$$

denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe ve Zhang, 1989).

$p_n > 0$ ve τ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, sabit katsayılı olmayan

$$y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-\tau} = 0 \tag{1.5}$$

fark denklemlerinin salınımlılığı için bazı şartların verildiği sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.4 $p_n > 0$ ve τ negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \inf p_n = c > 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \sup p_n > 1 - c \tag{1.6}$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

(i) $y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-\tau} \leq 0$ eşitsizliği belli bir yerden sonra pozitif çözüme sahip değildir;

(ii) $y_{n+1} - y_n + p_n y_{n-\tau} \geq 0$ eşitsizliği belli bir yerden sonra negatif çözüme sahip değildir;

(iii) (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Erbe ve Zhang, 1989).

Teorem 1.5 $\{p_n\}$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve τ pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left[\frac{1}{\tau}\sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i\right] > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} \tag{1.7}$$

sağlanır ise (1.5) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır (Ladas vd. 1989).

Teorem 1.6 $p_n > 0$ ve τ negatif olmayan bir tamsayı olsun. Eğer

$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i \leq \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} \tag{1.8}$$

bir yerden sonra sağlanır ise (1.5) denklemi salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir (Ladas, 1990).

Yu vd. (1993), (1.5) denkleminin salınımlılık kriterini geliştirmeye çalıştılar. Bu çalışmada

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{\tau}\sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j$$

ve (1.9)

$$A = \lim_{n\to\infty} \sup \sum_{j=n-\tau}^{n} p_j$$

şeklinde tanımlanan α ve A sayıları kullanılarak (1.5) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğu durumu aşağıdaki teoremde gösterdiler.

Teorem 1.7 $j \to \infty$ iken $n_j \to \infty$, $n_j - 3\tau \leq n \leq n_j$ için $p_n \geq 0$ ve

$n_j - 2\tau \leq n \leq n_j$ için

$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i \geq \alpha > 0$$

olacak biçimde $\{n_j\}$ pozitif tamsayı dizisi olsun. Öyle ki,

$$\lim_{j\to\infty} \sup \frac{1}{\tau}\sum_{j=n_j-2\tau}^{n_j-\tau-1} p_j > 1 - \frac{(\tau\alpha)^2}{4} \tag{1.10}$$

koşulunun sağlandığını kabul edelim. O halde, (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Stavroulakis (1995), aşağıdaki salınım kriterini geliştirmiştir.

$$\lim_{n\to\infty} \sup\ p_n > 1 - \frac{(\tau\alpha)^2}{4}. \tag{1.11}$$

Teorem 1.8 $\{p_n\}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi, τ pozitif bir tamsayı olsun. Ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty} \inf \sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i > M$$

ve

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \sup p_n > 1 - \left(\frac{M}{2}\right)^2$$

olacak şekilde $M > 0$ olduğunu kabul edelim. O halde,

(i) $\Delta x_n + p_n x_{n-k} \leq 0, n = 0,1,2,\ldots$ eşitsizliğinin belli bir yerden sonra pozitif çözümü yoktur;

(ii) $\Delta x_n + p_n x_{n-k} \geq 0, n = 0,1,2,\ldots$ eşitsizliğinin belli bir yerden sonra negatif çözümü yoktur;

(iii) $\Delta x_n + p_n x_{n-k} = 0, n = 0,1,2,\ldots$ denklemi sadece salınımlı çözümlere sahiptir.

Chen ve Yu (1995), yaptıkları çalışmada α sayısını ve $\{b_s\}$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayarak takip eden sonuçları vermişlerdir.

$0 < \alpha \leq \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\tau+1}$ olmak üzere

$$\sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i \geq \alpha$$

ve $\{b_s\}$ pozitif reel sayıların bir dizisini

$$b_1 = \frac{1}{4}a^2, b_s = b_{s-1}^2 + ab_{s-1} + \frac{1}{2}a^2, s = 2,3,\ldots \tag{1.12}$$

olacak biçimde tanımlayalım. Aşağıdaki lemma, Yu ve Wang (1992) makalesinden alınmıştır.

Lemma 1.1

$$\lim_{s\to\infty} b_s = \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}$$

olacak şekilde $\{b_s\}$ dizisi sınırlı ve artandır.

Teorem 1.9

$$a_0 = \lim_{n\to\infty} \inf \sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j \leq \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\tau+1}$$

olsun ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n} p_j > 1 - \frac{1 - a_0 - \sqrt{1 - 2a_0 - {a_0}^2}}{2} \tag{1.13}$$

sağlansın. O halde, (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Tang (1998), (1.7) yi geliştirerek, aşağıdaki teoremi oluşturmuştur.

Teorem 1.10 $p_n > 0$ ve τ negatif olmayan bir tamsayı olsun. Yeteri kadar büyük her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j \geq \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\tau+1} \tag{1.14}$$

ve

$$\sum_{n=\tau}^{\infty} p_n \left[\sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j - \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\tau+1}\right] = \infty \tag{1.15}$$

koşulları sağlanıyorsa, (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Aşağıdaki teorem, (1.14) ve (1.15) koşullarını geliştirmeyi amaçlamıştır. Bu teoremde kullanılacak iki çift dizi tanımlanmıştır:

$$p_n^1 = \sum_{j=n+1}^{n+k} p_j$$

ve

$$p_n^{i+1} = \sum_{j=n+1}^{n+k} p_j \; p_j^i, \qquad i = 1,2,3, \dots .$$

Teorem 1.11

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[\left(\frac{\tau+1}{\tau} \right)^s (p_n^s)^{\frac{1}{\tau+1}} - 1 \right] = \infty \tag{1.16}$$

koşulu sağlanacak biçimde $s \geq 1$ tamsayısının olduğunu kabul edelim. O halde (1.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Tang ve Yu, 1999a).

Tang ve Yu (1999b), yeni bir teknik geliştirerek, (1.5) denkleminin tüm çözümlerinin salınım yapacağını garanti eden aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 1.12 Eğer,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=n}^{n+\tau} p_j \ln \left(\sum_{j=n}^{n+\tau} p_j + 1 - sign \sum_{j=n}^{n+\tau} p_j \right) - \sum_{j=n+1}^{n+\tau} p_j \ln \left(\sum_{j=n+1}^{n+\tau} p_j + 1 - sign \sum_{j=n+1}^{n+\tau} p_j \right) \right] = \infty \tag{1.17}$$

sağlanıyorsa, o zaman (1.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Tang ve Yu (2000), aşağıdaki teoremde (1.13) koşulunu geliştirdiler.

$0 < \alpha \leq \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ durumunda,

$$A > \lambda_2^\tau \, (1 - \tau \ln \lambda_2) - \frac{1}{2} \, (1 - \tau\alpha - \sqrt{1 - 2\tau\alpha - (\tau\alpha)^2}) \tag{1.18}$$

koşulunu oluşturdular. Bu koşulda verilen λ_2 ,

$$\lambda^\tau (1 - \lambda) = \alpha \tag{1.19}$$

cebirsel denkleminin iki kökünden büyük olanıdır. Burada $f(\alpha) = \frac{k}{(k+1)\alpha}$ ve $A(\alpha)= \frac{1-\alpha-\sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}$ şeklindedir.

Teorem 1.13 $0 \leq \alpha \leq \frac{\tau^{\tau+1}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ olduğunu kabul edelim. Eğer,

$$\limsup_{n\to\infty} p_n > \frac{1}{f(\alpha)} - A(\alpha) \tag{1.20}$$

koşulu sağlanıyorsa, (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Bu çalışmada $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau}\sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i = \alpha$ limitinin var olduğu ve $0 < \alpha \leq \frac{\tau^{\tau}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ koşulunun sağlandığı durumda, eğer $\lim_{n\to\infty} p_n$ limiti mevcut değilse, (1.5) denkleminin her çözümünün hala salınım yapmasının mümkün olduğu belirtilmiştir. Bu çalışmada ve Yu vd. (1994) makalesinde duruma yönelik örneklere yer verilmiştir. Bu p_n in kendisinin, (1.5) denkleminin her çözümünün salınımını birçok durumda

$$\sum_{i=n-\tau}^{n-1} p_i \quad ve \quad \sum_{i=n-\tau}^{n} p_i$$

lardan daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Tang ve Yu (2000), aşağıdaki teoremde (1.11) koşulunda elde edilen durumu

$$\limsup_{n\to\infty} p_n > \lambda_2^{\tau} - \frac{1}{2}\left(1 - \tau\alpha - \sqrt{1 - 2\tau\alpha - (\tau\alpha)^2}\right) \tag{1.21}$$

koşuluyla iyileştirmişlerdir ve bu koşul (1.18) koşulundan bağımsızdır.

Teorem 1.14 $0 \leq \alpha \leq \frac{\tau^{\tau+1}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ olsun. Eğer,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n} p_j \prod_{i=j-\tau}^{n-\tau-1} (1 - p_i f(\alpha))^{-1} > \frac{1 - \alpha - \sqrt{1 - 2\alpha - \alpha^2}}{2}$$

sağlanıyorsa, o zaman (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Aşağıdaki makalenin amacı, (1.21) koşulunu

$$\lim_{n\to\infty} \sup \; p_n > \lambda_2^{\tau}(1-\mu_1) \tag{1.22}$$

koşulu ile daha da iyileştirmeye çalışmaktır. Burada μ değeri, $\mu(1-\mu^{\tau}) = \tau\alpha$ cebirsel denkleminin iki kökünden küçük olanıdır.

Teorem 1.15 $0 < \alpha \leq \frac{\tau^{\tau}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$, $2(\tau-1)(\lambda_2-\lambda_1) \leq \lambda_1$ ve

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sup \; p_n > \propto +\lambda_2^{\tau}\sqrt{\lambda_2-\lambda_1} \;\; [\, 2\sqrt{2(\tau-1)\lambda_1} \\ -(2\tau-3)\sqrt{\lambda_2-\lambda_1} \;\;] \end{aligned} \tag{1.23}$$

sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde (1.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Tang ve Zhang, 2001).

(1.23) koşulunda λ_1, (1.19) denkleminin köklerinden küçük olanı; λ_2 bu iki kökten büyük olanıdır. $\alpha = \frac{\tau^{\tau}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ olduğunda, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\tau}{\tau+1}$ olur.

Bu durum, (1.23) koşulunu

$$\lim_{n\to\infty} \sup p_n > \frac{\tau^{\tau}}{(\tau+1)^{\tau+1}} \tag{1.24}$$

duruma indirger. Bu, Erbe ve Zhang (1989) makalesindeki iyileştirilemeyen en iyi sonuçtur. Yani (1.24) koşulu, bundan sonra yapılan çalışmalarda daha ileriye götürülemeyen bir koşuldur. $\tau = 1$ olduğunda (1.22) ve (1.23) koşullarındaki iki durum da

$$\lim_{n\to\infty} \sup \; p_n > \left(\frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}\right)^2 \tag{1.25}$$

koşuluna indirgenmiş olur. Bu (1.22) koşulunun kullanılabilir en iyi koşul olduğunu gösterir.

Teorem 1.16 $0 < \alpha \leq \frac{\tau^{\tau+1}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ olduğunu varsayalım.

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j > 1 - \alpha^{\tau} \tag{1.26}$$

ya da

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j > 1 - \frac{\alpha^2}{4} \tag{1.27}$$

koşullarından herhangi biri sağlanırsa (1.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Stavroulakis, 2004).

Chatrazakis ve Stavroulakis (2006), aşağıdaki lemma ve teoremde, (1.26) ve (1.27) koşullarını iyileştirerek,

$$0 < \alpha := \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j \leq \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\tau+1}$$

ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j > 1 - \frac{\alpha^2}{4}$$

koşullarının olması gereken doğru salınım koşulları olduğunu göstermişlerdir.

Lemma 1.2 $\{y_n\}$, (1.5) denkleminin bir yerden sonra pozitif çözümü olsun ve yeteri kadar büyük her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j \geq M > 0$$

denkleminin bir yerden sonra pozitif çözümü olsun ve tanımlayalım. Ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksik sağlandığını kabul edelim. Böylece,

$$y_n > \frac{M^2}{2(2-M)} y_{n-\tau} \tag{1.28}$$

sağlanmış olur.

Teorem 1.17 $0 < \alpha \leq \frac{\tau^{\tau+1}}{(\tau+1)^{\tau+1}}$ ve

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n-\tau}^{n-1} p_j > 1 - \frac{\alpha^2}{2(2-\alpha)} \tag{1.29}$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim. O zaman, (1.5) fark denkleminin her çözümü salınımlıdır Chatrazakis vd. (2008),

$$\Delta u_k + p_k u(\tau_k) = 0, k \in \mathbb{N} \tag{1.30}$$

gecikmeli argümanlı birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin tüm uygun çözümlerinin salınımlılığı için esnek koşulları sunmaktadır. Burada

$$p: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, \tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$$

dur. (1.30) denklemine olan ilgi, $p(t) \geq 0, \tau(t) \leq t, t > 0$ olmak üzere

$$x'(t) + p(t)x\big(\tau(t)\big) = 0$$

gecikmeli diferensiyel denklemin discrete analoğunu temsil ettiği gerçeğinden kaynaklanmaktadır.

Aşağıda verilen lemma ve teoremlerde, (1.30) denkleminin olası salınımlı olmayan u çözümleri için $\frac{u(\tau_k)}{u(k+1)}$ oranının üst sınırını iyileştirip bazı şartların verildiği yeni salınım koşullarını türettiler.

$$\Delta u_k + q_k u(\sigma_k) \leq 0, k \in \mathbb{N} \tag{1.31}$$

fark eşitsizliğini ele alalım. Burada, $q: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ve $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \infty$ dır.

Lemma 1.3 $k \in \mathbb{N}$ *için,*

$$\sigma_k \leq \tau_k \leq k-1, p_k \leq q_k, \tag{1.32}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \inf \sum_{i=\tau_k}^{k-1} p_i = \alpha > 0 \tag{1.33}$$

koşulları sağlansın. Belirli bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $u: \mathbb{N}_{n_0} \to (0, \infty)$, (1.31) denkleminin uygun pozitif bir çözümü olsun. O zaman, $k \in \mathbb{N}_{n_1}$ için $0 < u_*(k) \leq u(k)$ ve $n_1 > n_0$ yeterince büyük doğal sayılar olmak üzere; $u_*: \mathbb{N}_{n_1} \to (0, \infty)$, (1.30) denkleminin uygun bir çözümüdür.

Teorem 1.18 $\tau_k \leq k-1$ ve

$$\sigma_k = \max\{ \tau_s: 1 \leq s \leq k, s \in N\} \tag{1.34}$$

koşullarının sağladığını kabul edelim. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sum_{i=\sigma_k}^{k} p_i > 1 \tag{1.35}$$

sağlanırsa, o zaman (1.30) denkleminin her uygun çözümü salınımlıdır.

Teorem 1.19 $\tau_k \leq k-1$ olacak şekilde,

$$\lim_{k\to\infty} \inf \sum_{i=\tau_k}^{n-1} p_i = \alpha \in (0,1] \tag{1.36}$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sum_{i=\sigma_k}^{k} p_i > 1-(1-\sqrt{1-\alpha})^2 \tag{1.37}$$

koşulları sağlansın. O zaman, (1.30) denkleminin her uygun çözümü salınımlıdır.

Bunlara ek olarak; yeteri kadar büyük k değerleri için $p_k \geq 1-\sqrt{1-\alpha}$ ve

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sum_{i=\sigma_k}^{k} p(i) > 1-\alpha\frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}} \tag{1.38}$$

sağlanmış olur. O halde, (1.30) denkleminin her uygun çözümü salınımlıdır.

Chatrazakis vd. (2008), lineer gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki teoremi oluşturmuşlardır. Bu çalışmada,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \inf \sum_{j=\tau_n}^{n-1} p_j \tag{1.39}$$

olarak ele alınmıştır.

Teorem 1.20 $(\tau_n)_{n\geq 0}$ dizisinin artan olduğunu kabul edelim ve (1.39) koşulundaki α tanımını ele alalım.

(i) Eğer $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ ise,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=\tau_n}^{n} p_j > 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1-2\alpha}) \tag{1.40}$$

koşulu, (1.30) gecikmeli fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter şarttır.

(ii) $0 < \alpha \leq 6 - 4\sqrt{2}$ ise ve $p_n \geq \frac{\alpha}{2}$, yeteri kadar büyük k değerleri için sağlanırsa,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=\tau_n}^{n} p_j > 1 - \frac{1}{4}(2 - 3\alpha - \sqrt{4 - 12\alpha + \alpha^2}) \tag{1.41}$$

koşulu, (1.30) gecikmeli fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter şarttır.

Teorem 1.21

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\mu\geq 1} \left\{ \frac{1}{\mu} \prod_{j=n-\tau}^{n} [1 + \mu p(j)] \right\} > 1$$

koşulunun sağlandığını kabul edelim. O halde (1.5) denkleminin her çözümü salınımlıdır (Karpuz, 2017).

Teorem 1.22 $\mu_0 \geq 1$ ve yeteri kadar büyük *n* ler için

$$\frac{1}{\mu_0} \prod_{j=n-\tau}^{n} [1 + \mu_0 p(j)] \leq 1$$

koşulu sağlansın. O halde, (1.5) denklemi salınımlı olmayan çözüme sahiptir (Karpuz, 2017).

Teorem 1.23 $\liminf_{n\to\infty} \beta_s(n) > 1$ koşulunu sağlayacak şekilde $s \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Burada

$$\beta_k(n) := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \inf_{\mu\geq 1}\left\{\frac{1}{\mu}\prod_{j=n-\tau}^{n}[1+\mu\,\beta_{k-1}(j)p(j)]\right\} > 1, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

koşulları sağlansın. O halde (1.5) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Karpuz ve Özsever, 2022).

Philos (1992) de yukarıda ele alınan denklemlerdeki p_n katsayısını periyodik fonksiyon olarak göz önünde bulundurmuş ve aşağıdaki lineer fark denkleminin çözümlerinin salınımlı olma davranışını incelemiştir.

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{k=0}^{m} p_k(n)x_{n-l_k} = 0 \tag{1.42}$$

denklemini ele alalım. Burada m pozitif bir tamsayı, $(p_k(n))_{n\geq 0}(k = 0,1,\dots,m)$ negatif olmayan sayıların dizisi ve $l_k(k = 0,1,\dots,m)$ $0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_m$ olacak şekilde tamsayılar olsun. $(p_k(n))_{n\geq 0}(k = 0,1,\dots,m)$ dizilerinin aynı şekilde sıfır olmadıklarını kabul edelim. Ayrıca $(p_k(n))_{n\geq 0}(k = 0,1,\dots,m)$ dizileri ortak L (L pozitif tamsayı) periyoduna sahip diziler olsun ve $v_1,\dots,v_m$ pozitif tamsayılar olmak üzere,

$$l_1 = v_1 L,\dots,l_m = v_m L$$

olduğu kabul edilecektir. n_0 negatif olmayan tamsayı ve $\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0+1,\dots\}$ olsun. (1.42) fark denkleminin $\mathbb{N}_{n_0}$ üzerinde çözümü ile her $n \geq n_0$ için (1.42)

denklemini karşılayan bir $(x_n)_{n\geq n_0-l_m}$ dizisi anlaşılacaktır. Burada (1.42) denklemiyle ilişkili

$$\lambda^L - \prod_{r=0}^{L-1}\left(1 - \sum_{k=0}^{m} p_k(r)\lambda^{-l_k}\right) = 0 \tag{1.43}$$

denklemi tanımlanıyor ve aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 1.24

(i) (1.42) nin tüm çözümlerinin salınımlılığı için gerekli koşul, özellikle (1.43) ile verilen denklemin (0,1) aralığında λ_0 kökünün olmamasıdır. Eğer $L > 1$ ise

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(r){\lambda_0}^{-l_k} < 1 \ (r = 1, \dots, L-1)$$

olmasıdır.

(ii) (1.42) nin tüm çözümlerinin salınımı için yeter koşul, (1.43) denkleminin (0,1) aralığında hiçbir kökünün olmamasıdır.

Teoremin ispatından önce (1.42) fark denkleminin özel hali olan aşağıdaki (1.44) sabit katsayılı denklem göz ününe alınmaktadır.

$$x_{n+1} - x_n + \sum_{k=0}^{m} P_k x_{n-l_k} = 0 \tag{1.44}$$

Burada $P_0 \geq 0, P_1 > 0, \dots, P_m > 0$ olacak şekilde $P_k (k = 0,1, \dots, m)$ reel sayıları var olsun. Bu durumda L periyodu 1'e eşittir ve (1.43) denklemi

$$\lambda - 1 + \sum_{k=0}^{m} P_k \lambda^{-l_k} = 0 \tag{1.45}$$

olur. (1.45) denklemi (1.44) denkleminin karakteristik denklemidir. Dolayısıyla teorem, (1.44) fark denklemine uygulanarak (1.44) fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı ispatlanabilir. (1.44) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul, (1.45) karakteristik denkleminin (0,1) aralığında köklerinin olmamasıdır.

Georgiou vd. (1989) da

$$\Delta(A_n + pA_{n-\tau}) + qA_{n-\sigma} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.46}$$

fark denkleminin salınımlı olması durumlarını ele almışlardır. Burada $p, q \in \mathbb{R}$ ve $\tau, \sigma \in \mathbb{Z}$ dir.

Teorem 1.25 $q\tau \geq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman aşağıdaki koşulların her biri (1.46) denkleminin salınımlı olması için yeter koşuldur.

(i) $p = -1$;

(ii) $\tau = \sigma$ ve $\frac{q}{1+p} \geq 1$;

(iii) $\tau = \sigma + 1$ ve $\frac{q}{1+p} \leq 1$;

(iv) $\frac{q}{1+p}\frac{(\sigma-\tau+1)^{\sigma-\tau+1}}{(\sigma-\tau)^{\sigma-\tau}} > 1$.

Teorem 1.26 $p \geq 0$ ve $\tau \leq 0 < q$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki koşullardan her biri (1.46) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeter koşudur.

(i) $\sigma = 0$ ve $\frac{q}{1+p} \geq 1$;

(ii) $\sigma = -1$ ve $\frac{q}{1+p} \leq -1$;

(iii) $\sigma \in \mathbb{Z} - \{-1,0\}$ ve $\frac{q}{1+p}\frac{(\sigma+1)^{\sigma+1}}{\sigma^{\sigma}} > 1$.

Lalli vd. (1991) de neutral fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ve pozitif çözümlerinin varlığı üzerine çalışmalar yapmışlardır ve

$$\Delta(x_n + cx_{n-m}) + p_n x_{n-k} = 0, \quad n = 0,1,2, \ldots \tag{1.47}$$

denklemini ele almışlardır. Burada c ve p_n reel sayılar, $M = max\{m, k\}$ olmak üzere, k ve m negatif olmayan tamsayılardır. O halde, (1.47) denkleminin çözümü ile $n \geq -M$ için tanımlanan ve $n = 0,1,2, \ldots$ için (1.47) yi sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisini amaçlıyoruz.

(1.47) denklemi,

$$x_n = A_n, \qquad n = -M, \ldots, -1,0 \tag{1.48}$$

şeklinde verilen başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözüme sahiptir. Burada p_n, belli bir yerden sonra özdeş sıfır olamaz. Bu makalede, denklemin salınımlı olması ve olmaması için yeter koşullar elde edilmiştir. (1.47) denkleminin çözümlerinin davranışı c parametresine bağlı olarak verilmiştir.

Teorem 1.27

(i) $c = -1$;

(ii) $n = 1,2, \ldots$ için $p_n \geq 0$ ve $\sum_{n=N}^{\infty} p_n = \infty$, burada N pozitif tamsayıdır.

durumlarının olduğunu kabul edelim. O halde (1.47) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 1.28

(i) $-1 < c < 0, k > m$;

(ii) her büyük n sayısı için $p_n \geq p_{n-m}$;

(iii) $\frac{1}{(1+c)} \lim_{n\to\infty} \inf\ p_n > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$

koşulları sağlansın.

O halde (1.47) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 1.29

(i) $-1 < c < 0, m > k$;

(ii) her büyük n sayısı için $p_n \geq 0$ ve $p_n \geq p_{n-m}$;

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ p_n > F(l) \equiv \frac{(l-1)(1+cl^m)}{l^{k+1}}$$

koşulları sağlansın.

$$1 + cl^m = (l-1)[k + kcl^m - cml^m]$$

denkleminin $l \in (1,(-c)^{1/m})$ olacak şekilde tek reel köküdür.

O halde (1.47) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 1.30

(i) $c > 0, k > m$;

(ii) $p_n \geq p_{n-m}$ ve

$$\frac{1}{(1+c)} \lim_{n\to\infty} \inf p_n > \frac{(k-m)^{k-m}}{(k-m+1)^{k-m+1}}$$

koşulları sağlansın.

O halde (1.47) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Lalli ve Zhang (1992) de,

$$\Delta(y_n + cy_{n-m}) + p_n y_{n-k} = 0, \quad n = 0,1,2, \ldots \tag{1.49}$$

neutral fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için koşullar geliştirmişlerdir.

Teorem 1.31 $-1 < c \leq 0,\ p_n > 0$ olduğunu kabul edelim. (1.49) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta(y_n + cy_{n-m}) + p_n y_{n-k} \leq 0$$

eşitsizliğinin bir yerden sonra pozitif çözümünün olmamasıdır.

Chen vd. (1995) te

$$\Delta(y_n - p_n y_{n-k}) + q_n y_{n-l} = 0, \qquad n = 0,1, \ldots \tag{1.50}$$

neutral fark denklemini ele almışlardır. Burada $p_n \geq 0, q_n \geq 0$ olacak şekilde reel sayılar, k ve l negatif olmayan tamsayılardır.

Bu bölümdeki teoremlerde aşağıdaki koşullar kullanılmıştır.

(A_1)

$$p_{n^*+ik} \leq 1, \qquad i = 0,1,2, \ldots$$

olacak şekilde n^* pozitif tamsayı vardır.

(A_2)

$$H_{j,n} = \sum_{i=n}^{\infty} i q_i \, H_{j-1,i}\,, \qquad j = 1,2, \ldots, s$$

dizileri olacak şekilde s negatif olmayan tamsayısı vardır.

Teorem 1.32 (A_1) ve (A_2) nin geçerli olduğu ve

$$p_{n-l}q_n \geq q_{n-k}, \qquad n \geq m \; için$$

koşulları sağlansın.

O halde (1.50) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Teorem 1.33 (A_2) ve $n = 0,1, \ldots p_n \geq 1$ koşullarına ek olarak

$$p_{n-l}q_n \leq q_{n-k}, \qquad n \geq m \; için$$

şartlar sağlansın.

O halde (1.50) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Kordonis ve Philos (1997) de,

$$\Delta(A_n + cA_{n-k}) + \sum_{j=0}^{N} p_{j_n} A_{n-l_j} = 0 \tag{1.51}$$

fark denklemini ele almışlardır. Burada c reel sayı, k pozitif tamsayı, $\{p_{j_n}\}_{n\geq 0}$

$(j = 0,1, \ldots, N)$, $N \geq 1$ olacak şekilde negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve l_j, $0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_N$ olacak şekilde tamsayılardır. $\{p_{j_n}\}_{n\geq 0}(j = 1, \ldots, N)$ dizisinin özdeş sıfır olmadığı varsayılmaktadır. Ayrıca, $\{p_{j_n}\}_{n\geq 0}(j = 0,1, \ldots, N)$ nin ortak periyodu L (burada L pozitif tamsayıdır) olan periyodik dizilerdir, burada u ve $v_j(j = 1,2, \ldots, N)$ pozitif tamsayılar ve $k = uL$ ve $l_j = v_j L,\ j = 1,2, \ldots, N$ dir. Eğer n_0 negatif olmayan tamsayıysa, (1.51) denkleminin $\mathbb{N}_{n_0}$ üzerinde $\{A_n\}_{n\geq n_0 - \max\{k, l_N\}}$ reel sayıların dizisi olmak üzere bir çözümü olduğunu gösterir ve tüm $n \geq n_0$ için (1.51) sağlanır.

$$\lambda^L - \prod_{r=0}^{L-1}\left(1 - \frac{1}{1+c\lambda^{-k}}\sum_{j=0}^{N} p_{j_\tau}\lambda^{-l_j}\right) = 0 \qquad (1.52)$$

denklemi (1.51) denkleminin karakteristik denklemidir.

Teorem 1.34

(i) (1.51) fark denkleminin salınımı için gerekli koşul, (1.52) nin λ_0 pozitif kökü olmasıdır; $L > 1$ ise,

$$\frac{1}{1+c{\lambda_0}^{-k}}\sum_{j=0}^{N} p_{j_\tau}{\lambda_0}^{-l_j} < 1$$

olmasıdır.

(ii) $-1 < c \leq 0$ olsun. O halde (1.51) denkleminin salınımlı olması için yeter koşul, (1.52) nin $\left((-c)^{1/k}, 1\right)$ aralığında hiçbir kökü olmamasıdır.

Thandapani vd. (2002) de

$$\Delta(y_n + h_n y_{n-k}) + \delta q_n y_{n-l}^{\alpha} = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1.53)$$

neutral gecikmeli fark denklemini ele almışlardır, burada $\delta \pm 1$, α tek pozitif tamsayıların oranı ve aşağıdaki (c_1) ve (c_2) koşullarının geçerli olduğu kabul edilir.

(c_1) $\{h_n\}$ pozitif reel sayıların dizisi ve k pozitif tamsayı,

(c_2) $\{q_n\}$ pozitif reel sayıların dizisi ve l herhangi bir tamsayı.

Eğer $\alpha = 1$ ise, (1.53) denklemi

$$\Delta(y_n + h_n y_{n-k}) + \delta q_n y_{n-l} = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1.54)$$

lineer denklemine indirgenir.

(1.53) denklemi, bazı $N > 0$ tamsayıları için $n \geq N$, denklem (1.53) ü karşılayan gerçek bir $\{y_n\}$ dizisini ifade ediyoruz. (1.53) denkleminin $\{y_n\}$ çözümü, bir yerden sonra negatif ya da pozitif değilse salınımlı, aksi takdirde salınımlı değildir.

Bu makalenin amacı, Agarwal (2000) ve Györi ve Ladas (1991) kaynaklarındaki bazı makalelerde kabul edildiği gibi $\{h_n\}$ üzerindeki kısıtlayıcı koşul veya $\{q_n\}$ üzerindeki periyodiklik koşulu olmaksızın (1.53) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter koşul elde etmektir.

Teorem 1.35 (c_1) ve (c_2) koşullarının sağlandığı ve

(i) $\delta = 1, 0 < \alpha < 1$ ve $l > k$;

(ii) $\delta = -1$, $\alpha > 1$ ve l negatif bir tamsayı.

olmak üzere yukarıdaki iki durumdan birinin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} min\left\{\frac{q_n}{(1+h_{n-l+k}^{\alpha})}, \frac{q_{n-k}}{(1+h_{n-l}^{\alpha})}\right\} = \infty,$$

ise (1.53) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Yukarıdaki çalışmalardan da görüleceği üzere, ele alınan tüm birinci mertebeden gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin kalitatif incelenmesinde, denklemin tek katsayısı olan p_n dizisinin, her çalışmada pozitif veya pozitif-periyodik olduğu göz önüne alınmıştır. Bu tezde birinci mertebeden lineer fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin davranışı hakkında kalitatif inceleme yapılırken p_n dizisinin hiç göz önüne alınmamış olan salınımlı ve periyodik-salınımlı bir dizi olması durumu göz önüne alınmış olup yeni orijinal sonuçlar verilmiştir. Ayrıca neutral fark denklemleri de ele alınarak katsayıların periyodikliği ile ilgili çalışma yapılmıştır. Tezde elde edilmeye çalışılmış yeni sonuçları ve şimdiye kadar elde edilmiş sonuçları daha ileri

götürmek, geliştirmek veya elde edilen sonuçlardaki koşulları daha hafifletmek için yeni araştırmacılara kaynak oluşturacağı düşünülmektedir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1 İleri Fark Denklemi

Tanım 2.1.1 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere x_n, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}$$

ifadelerini içeren eşitliklere (özdeşlik değil) k. mertebeden bir fark denklemi denir. Bir fark denklemi $k, s \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere,

$$F\left(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, x_{n-1,} \dots, x_{n-s}\right) = 0$$

şeklinde ifade edilebilir (Agarwal, 2000).

Tanım 2.1.2 Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkı alınarak bulunur. Örneğin; $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 3x_n = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir (Agarwal, 2000).

Tanım 2.1.3 Bir fark denklemi,

$$\sum_{j=0}^{k} a_{jn} x_{n+j} = b_n \qquad (2.1.1)$$

formunda verilirse bu fark denklemine k. mertebeden lineer fark denklemi denir.

Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için, $b_n \equiv 0$ ise (2.1.1) fark denklemine homojen lineer fark denklemi, $b_n \not\equiv 0$ ise (2.1.1) fark denklemine homojen olmayan lineer fark denklemi denir (Agarwal, 2000).

Örnek 2.1.1 $x_{n+5} - 5x_{n+4} + 7x_{n+3} + 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$ denklemi beşinci mertebeden lineer homojen bir fark denklemidir.

Örnek 2.1.2 $x_{n+3} - 6x_{n+1} + x_n = 2^n$ denklemi üçüncü mertebeden lineer homojen olmayan bir fark denklemidir.

Tanım 2.1.4 k. basamaktan

$$\Delta^k x_n + f\left(n, x_{n,} \Delta x_n, \Delta^2 x_n \dots, \Delta^{k-1} x_n\right) = 0$$

adi fark denklemi ve $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_{0,} \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ reel sabitler olmak üzere,

$$x_{n_0+j} = \alpha_{j,} \quad 0 \le j \le k-1$$

başlangıç koşullarının oluşturduğu probleme başlangıç değer problemi denir (Agarwal, 2000).

Tanım 2.1.5 k. basamaktan

$$x_{m+k} = f\left(m, x_{m,} x_{m+1}, \dots, x_{m+k-1}\right), \qquad m = 0,1,2, \dots$$

fark denklemi ve

$$x_0 = \alpha_0, x_1 = \alpha_1, \dots, x_{m-1} = \alpha_{m-1}$$

başlangıç koşulları verilsin.

f fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlerin bütün değerlerine göre tanımlı ise, o zaman yukarıda verilen ifadelere göre başlangıç değer probleminin çözümü vardır (Agarwal, 2000).

Tanım 2.1.6 $p_k \neq 0$ ve p_i ler sabit olmak üzere k. mertebeden

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + \cdots + p_k x_n = 0 \qquad (2.1.2)$$

fark denklemini ele alalım. (2.1.2) denklemi sabit katsayılı bir denklem olduğundan bu denklem için $x_n = \lambda^n \neq 0$ biçiminde çözüm aranır. Denklemde yerine yazılırsa,

$$\lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k\lambda^n = 0$$

elde edilir. λ^n ortak parantezine alınırsa,

$$\lambda^n(\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k) = 0$$

bulunur. Burada

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0 \qquad (2.1.3)$$

olur. Bu denklem, (2.1.2) denkleminin karakteristik denklemidir ve burada belirtilen λ değerlerine(köklerine) de karakteristik kökler denir. (2.1.2) denkleminin çözümü, karakteristik denklemin kökleri kullanılarak bulunur (Elaydi, 1999).

Örnek 2.1.3 $x_{n+3} - 7x_{n+2} + 16x_{n+1} - 12x_n = 0,\ x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm Denklemde $x_n = \lambda^n \neq 0$ yazılırsa,

$$\lambda^{n+3} - 7\lambda^{n+2} + 16\lambda^{n+1} - 12\lambda^n = 0$$

elde edilir. λ^n ortak parantezine alınırsa,

$$\lambda^n(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12) = 0$$

bulunur. Burada

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

denklemin karakteristik denklemidir ve karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ olarak bulunur. Böylece denklemin genel çözümü

$$x_n = (c_0 + nc_1)2^n + c_2 3^n$$

şeklinde yazılır. Başlangıç koşulları bu denklemde yerine yazılırsa, $c_0 = 2, c_1 = \frac{3}{2}$ ve $c_2 = -2$ bulunur. Böylece başlangıç değerlerini sağlayan çözüm

$$x_n = \left(2 + \frac{3}{2}n\right)2^n - 23^n$$

olur.

2.2 Gecikmeli İleri Fark Denklemi

Tanım 2.2.1 s pozitif tamsayı, $j = 1,2, \dots, s$ için $\{p_{j_k}\}_{k=0}^{\infty}$ reel değerli bir dizi ve $n_j \in \mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1, \dots\}$ olmak üzere,

$$y_{k+1} - y_k + \sum_{j=1}^{s} p_{j_k} y_{k-n_j} = 0 \tag{2.2.1}$$

biçimindeki fark denklemi göz önüne alınsın.

$$n = max\{0, n_1, \dots, n_s\}, l = max\{1, -n_1, \dots, -n_s\}$$

olsun. (2.2.1) denklemi $(n + l)$. mertebeden bir denklemdir. Eğer $l = 1$ ve $n \geq 0$ ise (2.2.1) denklemine gecikmeli fark denklemi denir (Györi ve Ladas, 1991).

Örnek 2.2.1 $x_{k+1} - x_k + p_k x_{k-3} = 0$ biçimindeki fark denklemi, birinci mertebeden gecikmeli fark denklemidir.

2.3 Salınımlılık

Tanım 2.3.1 Her N pozitif tamsayısı ve $n \geq N$ için $x_n x_{n+1} \leq 0$ ise x_n aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Diğer durumlarda x_n çözümü salınımlı olmayan çözümdür. Yani, bir x_n çözümü belli bir yerden (n_0 teriminden itibaren) sonra daima pozitif ya da daima negatif olmuyorsa sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal, 2000; Elaydi, 1999; Györi ve Ladas, 1991).

Örnek 2.3.1 $\left\{sinn\frac{\pi}{2}\right\}, (n = 1,2,3, \dots)$ için değerler; $\{1,0,-1,0,1,0,-1,0, \dots\}$ şeklindedir.

Sıfır etrafında salınımlı dizi örneklerini aşağıdaki gibi isimlendiririz.

Örnek 2.3.2 $\{(-1)^n\} = -1, +1, -1, +1, \dots$ şeklinde alterne salınımlıdır.

Örnek 2.3.3 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}, (n = 1,2,3, \dots)$ sönümlü salınımlıdır.

Örnek 2.3.4 $\{(-2)^n\}, (n = 1,2,3, . .)$ sıçramalı salınımlıdır.

Tanım 2.3.2 Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(y_{k_n} - a)(y_{k_n+1} - a) \leq 0 \tag{2.3.1}$$

olacak şekilde artan bir $\{k_n\}_{k=1}^{\infty}$ tamsayı dizisi varsa $\{y_k\}$ dizisi a $(a \in \mathbb{R})$ etrafında salınımlıdır denir. Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ için, $(y_{k+1} - a)(y_k - a) < 0$ ise $\{y_k\}$ dizisi a etrafında kesin salınımlıdır denir (Agarwal, 2000).

Örnek 2.3.5 $y_k = (-1)^k + 2, (k = 1,2,3, \dots)$ için, $y = 2$ doğrusu etrafında kesin salınımlıdır. Gerçekten

$y_k = (-1)^k + 2$ ve $y_{k+1=}(-1)^{k+1} + 2$ olduğundan

$$(y_{k+1} - 2)(y_k - 2) = [(-1)^{k+1} + 2 - 2]\,[(-1)^k + 2 - 2\,]$$
$$= (-1)^{k+1}(-1)^k < 0$$

olur.

Tanım 2.3.3 Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(y_{k_n} - x_{k_n})(y_{k_n+1} - x_{k_n+1}) \leq 0$$

olacak şekilde artan bir $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ pozitif tamsayı dizisi varsa $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$dizisi etrafında salınımlıdır denir. Eğer $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ etrafında salınımlı ise $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi de $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ etrafında salınımlıdır. Buna göre her $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi kendi etrafında salınımlıdır (Agarwal, 2000).

Örnek 2.3.6 Homojen denklemin çözümü $y_k^h = \left(-\frac{1}{3}\right)^k$, homojen olmayan denklemin özel çözümü $y_k^p = 3k$ ise genel çözüm, $y_k = cy_k^h + y_k^p = c\left(-\frac{1}{3}\right)^k + 3k$ şeklinde yazılabilir. Bu y_k genel çözümü, y_k^p özel çözümü etrafında salınımlıdır.

Tanım 2.3.4 Bir fark denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, bu fark denklemine salınımlıdır denir. Aksi taktirde fark denklemi salınımlı değildir (Agarwal, 2000).

Örnek 2.3.7 $x_{n+3} + 9x_{n+2} + 26x_{n+1} + 24x_n = 0$ fark denkleminin çözümünün davranışını inceleyelim.

Çözüm Denklemde $x_n = \lambda^n \neq 0$ yazılırsa,

$$\lambda^{n+3} + 9\lambda^{n+2} + 26\lambda^{n+1} + 24\lambda^n = 0$$

elde edilir. λ^n ortak parantezine alınırsa,

$$\lambda^n(\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24) = 0$$

bulunur. Burada

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0$$

denklemin karakteristik denklemidir ve karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -4$ olarak bulunur. Denklemin çözümleri $x_n^1 = (-2)^n, x_n^2 = (-3)^n$, $x_n^3 = (-4)^n$ olup denklemin genel çözümü

$$x_n = c_0(-4)^n + c_1(-3)^n + c_2(-2)^n$$

şeklinde yazılır. Burada (x_n^1, x_n^2, x_n^3) çözümleri salınımlı olduğundan denklem de salınımlıdır.

Örnek 2.3.8 $x_{n+3} - 3x_{n+2} - 10x_{n+1} + 24x_n = 0$ fark denkleminin çözümünün davranışını inceleyelim.

Çözüm Denklemde $x_n = \lambda^n \neq 0$ yazılırsa,

$$\lambda^{n+3} - 3\lambda^{n+2} - 10\lambda^{n+1} + 24\lambda^n = 0$$

elde edilir. λ^n ortak parantezine alınırsa,

$$\lambda^n(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24) = 0$$

bulunur. Burada

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

denklemin karakteristik denklemidir ve karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = -3$,

$\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ olarak bulunur. Denklemin çözümleri $x_n^1 = (-3)^n, x_n^2 = 2^n$, $x_n^3 = 4^n$ olup denklemin genel çözümü

$$x_n = c_0(-3)^n + c_1 2^n + c_2 4^n$$

şeklinde yazılır. Burada (x_n^2, x_n^3) çözümleri salınımlı olmadığından denklem de salınımlı değildir.

Tanım 2.3.5 $A \subseteq \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olmak üzere, $\forall x \in A$ için $x + T \in A$ ve $f(x + T) = f(x)$ şartlarını sağlayan $T \neq 0$ olacak şekilde bir reel sayı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. T sayısına da $f(x)$ fonksiyonunun bir periyodu denir (Aydın, 1999).

Örnek 2.3.9 $f(x) = sin\frac{\pi}{2}x$ fonksiyonunu ele alalım. Periyodik fonksiyon olduğunu gösterelim.

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\sin\frac{\pi}{2}(x+T) = sin\frac{\pi}{2}x$$

$$sin\frac{\pi}{2}x\, cos\frac{\pi}{2}T + cos\frac{\pi}{2}x\, sin\frac{\pi}{2}T = sin\frac{\pi}{2}x$$

şeklinde yazılır. Eşitlik $T = 4$ durumunda sağlanır. O halde $f(x)$ fonksiyonu 4 periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

Tanım 2.3.6 Fark denklemlerinde, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin aynı mertebeden farkını içeren denklemlere neutral tipten fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Örnek 2.3.10 $\Delta(x_n + p_n x_{n-3}) + q_n x_{n-4} = 0$ biçimindeki denklem neutral tipten bir fark denklemidir.

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Bu bölüm tezin orijinal bölümüdür. Bu bölümde birinci mertebeden gecikmeli lineer fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin davranışı incelenmekte ve bazı yeni sonuçlar verilmektedir.

3.1 $\{p_n\}$ Dizisinin Periyodik ve Salınımlı Olma Durumu

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-\tau} = 0 \tag{3.1.1}$$

denklemini ele alalım. Burada τ pozitif tamsayı olmak üzere; $p_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı, periyodik ve salınımlı bir dizidir.

Teorem 3.1.1 p_n, periyodik ve periyodu $(\tau+1)$ olacak şekilde salınımlı bir dizi olsun. Eğer,

(C_1) $\mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (\tau+1)k - \tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_1}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_1}$ için $p_n < 0$;

(C_2) $\mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (\tau+1)k, k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_2}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_2}$ için $p_n > 0$;

(C_3) $a = \min\limits_{n \in \mathbb{N}_{k_2}} \{p_n\}$ ve $b = -\min\limits_{n \in \mathbb{N}_{k_1}} \{p_n\}, (b > 0)$ olmak üzere,

$$\frac{a-b}{2} > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}}$$

koşulları sağlansın. O zaman (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Aksini kabul edelim. Genelliği bozmadan, $x_n: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+ (\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^-$ olabilir) (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani $n \geq n_1$ için $x_n > 0, x_{n-\tau} > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ olduğunu kabul edelim.

İlk olarak, $n \in \mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (\tau+1)k - \tau + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n < 0$ durumunu ele alalım. Burada $\underset{n \in \mathbb{N}_{k_1}}{min} \{p_n\} = -b$ ise, (3.1.1) den,

$$0 = x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-\tau} \geq x_{n+1} - x_n - b x_{n-\tau}$$

ya da

$$x_{n+1} - x_n - b x_{n-\tau} \leq 0 \tag{3.1.2}$$

yazılabilir.

İkinci olarak, $n \in \mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (\tau+1)k, k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n > 0$ durumunu ele alalım. Burada $\underset{n \in \mathbb{N}_{k_2}}{min} \{p_n\} = a$ ise, (3.1.1) den,

$$0 = x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-\tau} \geq x_{n+1} - x_n + a x_{n-\tau}$$

ya da

$$x_{n+1} - x_n + a x_{n-\tau} \leq 0 \tag{3.1.3}$$

yazılabilir.

(3.1.2) ve (3.1.3) taraf tarafa toplanırsa,

$$x_{n+1} - x_n + \frac{a-b}{2} x_{n-\tau} \leq 0 \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

(3.1.4) eşitsizliğinin karakteristik denklemi

$$\lambda^{n+1} - \lambda^n + \frac{a-b}{2}\lambda^{-\tau} \leq 0$$

yazılabilir. Burada $m = \frac{a-b}{2}$ denilirse,

$$\lambda^{n+1} - \lambda^n + m\lambda^{-\tau} \leq 0 \tag{3.1.5}$$

olur. Eğer $f(\lambda) = \lambda^{n+1} - \lambda^n + m\lambda^{-\tau}$ olarak alırsak, f minimum değerini $\lambda = \frac{\tau}{\tau+1}$ de alır ve

$$f_{min}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right) = -\frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} + m$$

elde edilir. (3.1.5) ten,

$$-\frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} + m \leq 0$$

ya da

$$\frac{a-b}{2} \leq \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}}$$

elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla x_n çözümü salınımlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.1.1 $\tau = 1$ olmak üzere, periyodik salınım katsayılı birinci mertebeden

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-1} = 0 \tag{3.1.6}$$

gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\{p_n\} = \begin{cases} -1, & n = 2k-1, \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ için} \\ 3, & n = 2\text{k}, \quad k = 1,2,3,\ldots \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde $\tau + 1 = 2$ periyotlu bir dizi olsun.

$(C_1)\ p_n < 0, n \in \mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (\tau+1)k - \tau + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\} = \{1,3,5, \dots\}$

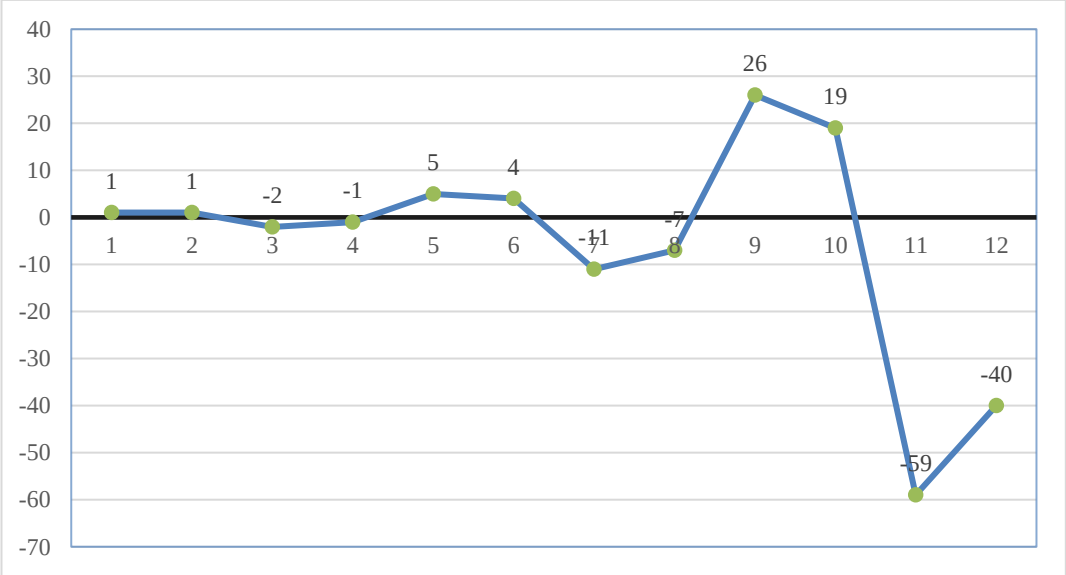
$(C_2)\ p_n > 0, n \in \mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (\tau+1)k, k \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6, \dots\}$

$(C_3)\ \underset{n\in\mathbb{N}_{k_1}}{min}\{p_n\} = -1\,,\ \underset{n\in\mathbb{N}_{k_2}}{min}\{p_n\} = 3$ ve $\frac{a-b}{2} = \frac{3-1}{2} > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} = \frac{1}{4}$ koşulları sağlanır.

$\{p_n\}$, 2 periyotlu periyodik bir dizi olduğundan $p_n = p_{n+2}$ olur ve

$p_n p_{n+1} = p_1 p_2 = p_2 p_3 = \cdots = -3 < 0$ olduğundan salınımlıdır.

Teorem 3.1.1 in tüm koşullarının sağlandığı, (3.1.6) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 3.1'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.1 $\boldsymbol{\tau = 1}$ için $\mathbb{N}_{\mathbf{k_1}}$ ve $\mathbb{N}_{\mathbf{k_2}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu

Örnek 3.1.2 $\tau = 2$ olmak üzere, periyodik salınım katsayılı birinci mertebeden

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-2} = 0 \tag{3.1.7}$$

gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\{p_n\} = \begin{cases} -1, & n = 3k-2, \quad k = 1,2,\dots \\ -2, & n = 3k-1, \quad k = 1,2,\dots \\ 3, & n = 3k, \quad k = 1,2,\dots \end{cases}$$

şeklinde $\tau + 1 = 3$ olup $\{p_n\}$, 3 periyotlu dizisini tanımlayalım.

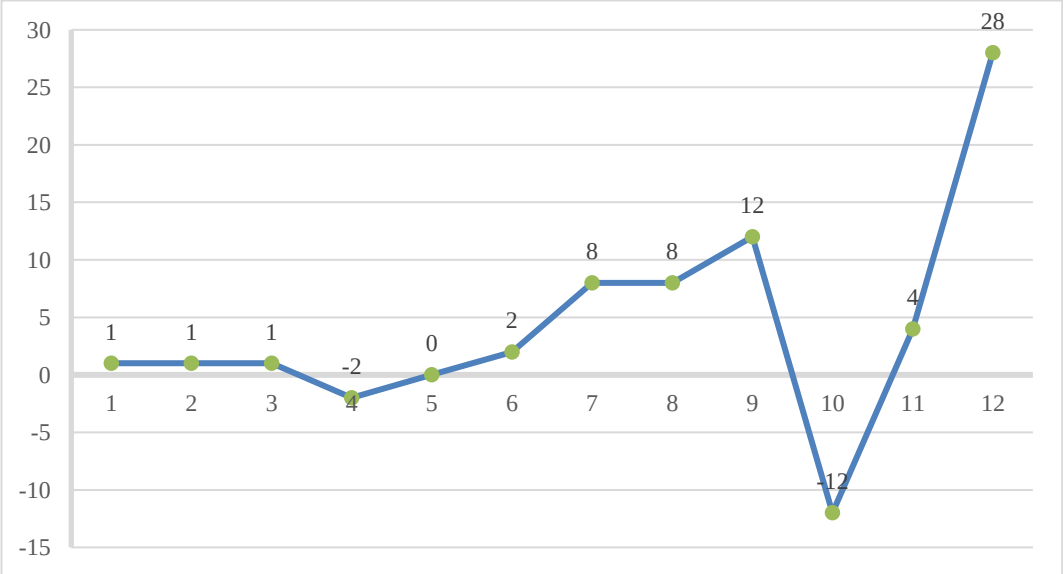
$(C_1)\ p_n < 0, n \in \mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (\tau+1)k - \tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\} = \{1,2,4,5,\dots\}$

$(C_2)\ p_n > 0, n \in \mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (\tau+1)k, k \in \mathbb{N}\} = \{3,6,9,12,\dots\}$

$(C_3)\ \min_{n\in\mathbb{N}_{k_1}} \{p_n\} = -2\,,\ \min_{n\in\mathbb{N}_{k_2}} \{p_n\} = 3, \tau = 2$ için $\frac{a-b}{2} = \frac{3-2}{2} > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} = \frac{4}{27}$ koşulları sağlanır.

$p_{\mathbb{N}_{k_1}} p_{\mathbb{N}_{k_2}} = p_1 p_3 = -3 < 0$, $p_{\mathbb{N}_{k_1}} p_{\mathbb{N}_{k_2}} = p_2 p_3 = -6 < 0$ olup $\{p_n\}$ salınımlıdır.

Teorem 3.1.1'in tüm koşullarının sağlandığı, (3.1.7) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 3.2'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.2 $\boldsymbol{\tau = 2}$ için $\mathbb{N}_{\mathbf{k_1}}$ ve $\mathbb{N}_{\mathbf{k_2}}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu

Sonuç 3.1.1 p, $(\tau+1)$ periyotlu, periyodik ve salınımlı bir dizi olsun. Eğer,

(K_1) $n \in \mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (\tau+1)k - \tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n > 0$;

(K_2) $n \in \mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (\tau+1)k, k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n < 0$;

(K_3) $a = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_2}}{min}\{p_n\}$ ve $b = -\underset{n\in\mathbb{N}_{k_1}}{min}\{p_n\}, (b > 0)$ olarak tanımlarsak,

$$\frac{a-b}{2} > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}}$$

sağlanırsa, o zaman (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: İspatı, Teorem 3.1.1 in ispatındaki benzer işlemler yapılarak tamamlanabilir.

Teorem 3.1.2 p, periyodik hızlı salınımlı bir dizi, yani $p_n p_{n+\tau} < 0$ olacak şekilde 2τ periyotlu olsun.

(C_4) $\mathbb{N}_{k_3} = \{n: n = 2\tau k - (2\tau-1) + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_3}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_3}$ için $p_n < 0$;

(C_5) $\mathbb{N}_{k_4} = \{n: n = 2\tau k - (\tau-1) + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_4}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_4}$ için $p_n > 0$;

(C_6) $c = -\underset{n\in\mathbb{N}_{k_3}}{min}\{p_n\}, (c > 0)$ ve $d = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_4}}{min}\{p_n\}$ olmak üzere,

$$\frac{d-c}{2} > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}}$$

koşulları sağlansın. O zaman (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat: İspatı, Teorem 3.1.1 in ispatına benzerdir.

Örnek 3.1.3 $\tau = 2$ olmak üzere, periyodik salınım katsayılı birinci mertebeden

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-2} = 0 \tag{3.1.8}$$

gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\{p_n\} = \begin{cases} -2, & n = 4k-3, \quad k = 1,2,\dots \\ -1, & n = 4k-2, \quad k = 1,2,\dots \\ 3, & n = 4k-1, \quad k = 1,2,\dots \\ 4, & n = 4k, \quad k = 1,2,\dots \end{cases}$$

şeklinde $2\tau = 4$ periyotlu $\{p_n\}$ dizisini tanımlayalım.

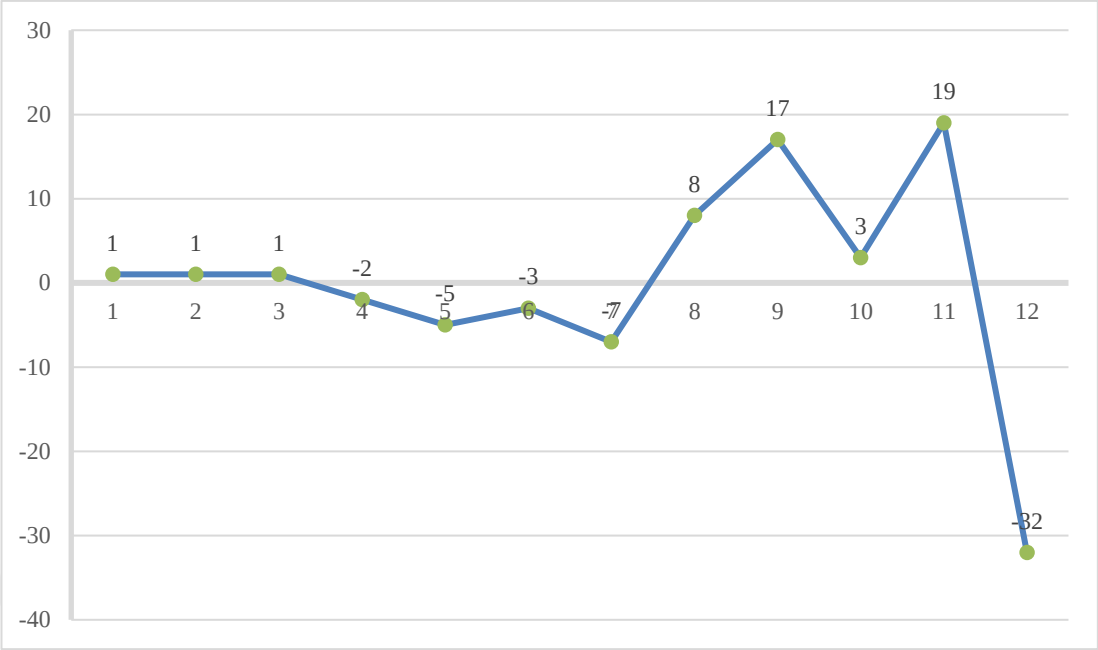
$(\mathrm{C}_4)\ p_n < 0,\ n \in \mathbb{N}_{k_3} = \{n : n = 2\tau k - (2\tau - 1) + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\} = \{1,2,5,6,\dots\}$

$(\mathrm{C}_5)\ p_n > 0, n \in \mathbb{N}_{k_4} = \{n : n = 2\tau k - (\tau - 1) + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\} = \{3,4,7,8,\dots\}$

$(\mathrm{C}_6)\ -c = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_3}}{min}\{p_n\} = -2, d = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_4}}{min}\{p_n\} = 3$ ve $\frac{d-c}{2} = \frac{3-2}{2} > \frac{\tau^\tau}{(\tau+1)^{\tau+1}} = \frac{4}{27}$ olur.

$p_n p_{n+\tau} = p_n p_{n+2} = p_1 p_3 = -6 < 0,\ p_2 p_4 = -4 < 0$ olup $\{p_n\}$ salınımlıdır.

Teorem 3.1.2'nin tüm koşullarının sağlandığı, (3.1.8) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 3.3'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.3 $\boldsymbol{\tau = 2}$ için $\mathbb{N}_{k_3}$ ve $\mathbb{N}_{k_4}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu

Teorem 3.1.3 p, periyodik salınımlı bir dizi, $p_n p_{n+\tau+1} \leq 0$ olacak şekilde $(2\tau+1)$ periyotlu olsun. Eğer,

(C_7) $\mathbb{N}_{k_5} = \{n: n = (2\tau+1)\,k - 2\tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_5}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_5}$ için $p_n < 0$;

(C_8) $\mathbb{N}_{k_6} = \{n: n = (2\tau+1)k - \tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_6}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_6}$ için $p_n = 0$;

(C_9) $\mathbb{N}_{k_7} = \{n: n = (2\tau+1)k - (\tau-1) + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_7}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_7}$ için $p_n > 0$;

(C_{10}) $\delta = -\min_{n \in \mathbb{N}_{k_5}} \{p_n\}, (\delta > 0)$ ve $\beta = \min_{n \in \mathbb{N}_{k_7}} \{p_n\}$ olmak üzere $\beta - \delta \geq 2$

koşulları sağlanıyorsa, o zaman (3.1.1) denkleminin her sınırlı çözümü ya salınımlıdır ya da $n \to \infty$ için sıfıra gider.

İspat Aksini kabul edelim. Genelliği bozmadan, $x_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ (\mathbb{N} \to \mathbb{R}^-$ olabilir) (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani $n \geq n_1$ için $x_n > 0, x_{n-\tau} > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ olduğunu kabul edelim.

İlk olarak, $\mathbb{N}_{k_5} = \{n: n = (2\tau + 1)\,\mathrm{k} - 2\tau + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n < 0$ durumunu ele alalım. (3.1.1) den,

$$x_{n+1} - x_n = -p_n x_{n-\tau} > 0$$

olduğundan x_n artandır. (3.1.1) den,

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_n < 0$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten ve $\delta = -\underset{n \in \mathbb{N}_{k_5}}{min}\{p_n\}$ kabulünden,

$$x_{n+1} - x_n - \delta x_n < 0$$

ya da

$$x_{n+1} - (1 + \delta)x_n < 0 \tag{3.1.9}$$

elde edilir.

İkinci olarak, $\mathbb{N}_{k_7} = \{n: n = (2\tau + 1)\mathrm{k} - (\tau - 1) + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n > 0$ durumunu ele alalım. (3.1.1) den,

$$x_{n+1} - x_n = -p_n x_{n-\tau} < 0$$

olduğundan x_n azalandır. (3.1.1) den,

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_n < 0$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten ve $\beta = \underset{n \in \mathbb{N}_{k_7}}{min}\{p_n\}$ kabulünden,

$$x_{n+1} - x_n + \beta x_n < 0$$

ya da

$$x_{n+1} + (\beta - 1)x_n < 0 \tag{3.1.10}$$

elde edilir.

(3.1.9) ve (3.1.10) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$x_{n+1} + \left(\frac{\beta - \delta - 2}{2}\right)x_n < 0 \tag{3.1.11}$$

olur. (3.1.11) den $\beta - \delta - 2 < 0$ olur. Bu ise $\beta - \delta \geq 2$ olması kabulüyle çelişir.

Son olarak, $\mathbb{N}_{k_6} = \{n: n = (2\tau + 1)\mathrm{k} - \tau + [0, \tau - 1], k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n = 0$ durumunu ele alalım. (3.1.1) den,

$$x_{n+1} - x_n = 0$$

elde edilir. Buradan $x_n = c$ (c sabit) olduğu görülür. $n \to \infty$ için x_n sıfıra yakınsamadığından kabulümüzle çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.1.4 $\tau = 1$ olmak üzere, periyodik salınım katsayılı birinci mertebeden

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-1} = 0 \tag{3.1.12}$$

gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

$$\{p_n\} = \begin{cases} -1, & n = 3k - 2, & k = 1,2, \dots \\ 0, & n = 3k - 2, & k = 1,2, \dots \\ 3, & n = 3k, & k = 1,2, \dots \end{cases}$$

şeklinde $2\tau + 1 = 3$ periyotlu $\{p_n\}$ dizisini tanımlayalım.

$(C_7)\ p_n < 0,\ n \in \mathbb{N}_{k_5} = \{n: n = (2\tau+1)k - 2\tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\} = \{1,4,7, \dots\}$

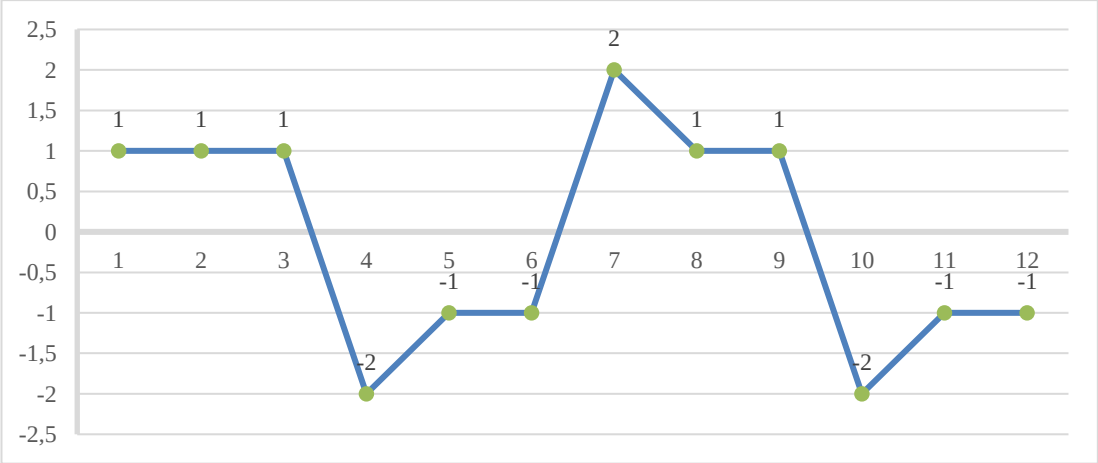
$(C_8)\ p_n = 0,\ n \in \mathbb{N}_{k_6} = \{n: n = (2\tau+1)k - \tau + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\} = \{2,5,8, \dots\}$

$(C_9)\ p_n > 0,\ n \in \mathbb{N}_{k_7} = \{n: n = (2\tau+1)k - (\tau-1) + [0, \tau-1], k \in \mathbb{N}\} = \{3,6,9, \dots\}$

$(C_{10})\ -\delta = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_5}}{min}\{p_n\} = -1$ ve $\beta = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_7}}{min}\{p_n\} = 3$ ve $\beta - \delta = 3 - 1 \geq 2$ olur.

$p_n p_{n+\tau+1} = p_n p_{n+2} = p_1 p_3 = -3 \leq 0$, $p_2 p_3 = 0 \leq 0$ olup $\{p_n\}$ salınımlıdır.

Teorem 3.1.3'ün tüm koşullarının sağlandığı, (3.1.12) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 3.4'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.4 $\boldsymbol{\tau = 1}$ için $\mathbb{N}_{k_5}, \mathbb{N}_{k_6}$ ve $\mathbb{N}_{k_7}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu

3.2 $\{p_n\}$ Dizisinin $p_n p_{n+1} < 0$ Biçiminde Salınımlı Olma Durumu

Bu bölümde $\{p_n\}$ dizisinin $p_n p_{n+1} < 0$ biçimindeki salınımlılık durumunda (3.1.1) denkleminin salınımlılığının verildiği sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.2.1 $\{p_n\}$ dizisi hızlı salınımlı bir dizi, yani $p_n p_{n+1} < 0$ olsun. Eğer,

$(H_1)\ n \in \mathbb{N}_{k_8} = \{n: n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n < 0$,

(H_2) $n \in \mathbb{N}_{k_9} = \{n: n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n > 0$,

$(H_3) - \sigma = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_8}}{max}\{p_n\}, (\sigma > 0)$ ve $\rho = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_9}}{min}\{p_n\}, (\rho > 0)$,

koşulları sağlanır ise, (3.1.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Aksini kabul edelim. Genelliği bozmadan, $x_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ (\mathbb{N} \to \mathbb{R}^-$ olabilir) (3.1.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. Yani $n \geq n_1$ için $x_n > 0, x_{n-\tau} > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ olduğunu kabul edelim.

İlk olarak, $n \in \mathbb{N}_{k_8} = \{n: n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n < 0$ durumunu ele alalım. (3.1.1) denkleminde, $\sigma > 0$ olmak üzere $\underset{n\in\mathbb{N}_{k_8}}{max}\{p_n\} = -\sigma < 0$ yazılırsa

$$0 = x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-\tau} < x_{n+1} - x_n - \sigma x_{n-\tau}$$

ya da

$$x_{n+1} - x_n - \sigma x_{n-\tau} > 0 \tag{3.2.1}$$

olur.

İkinci olarak, $n \in \mathbb{N}_{k_9} = \{n: n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ için $p_n > 0$ durumunu ele alalım. (3.1.1) denkleminde $\underset{n\in\mathbb{N}_{k_9}}{min}\{p_n\} = \rho > 0$ yazılırsa

$$0 = x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-\tau} > x_{n+1} - x_n + \rho x_{n-\tau}$$

ya da

$$x_{n+1} - x_n + \rho x_{n-\tau} < 0 \tag{3.2.2}$$

elde edilir. (3.2.1) den (3.2.2) çıkarılırsa,

$$x_{n+1} - x_n - \sigma x_{n-\tau} - (x_{n+1} - x_n + \rho x_{n-\tau}) = -(\rho + \sigma) x_{n-\tau} > 0$$

elde edilmiş olup burada $\rho + \sigma < 0$ olmaktadır. Bu ise $\rho + \sigma > 0$ kabulüyle çelişir. Dolayısıyla x_n çözümü salınımlıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1 $\tau = 1$ olmak üzere, hızlı salınım katsayılı birinci mertebeden

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-1} = 0 \tag{3.2.3}$$

gecikmeli fark denklemini göz önüne alalım.

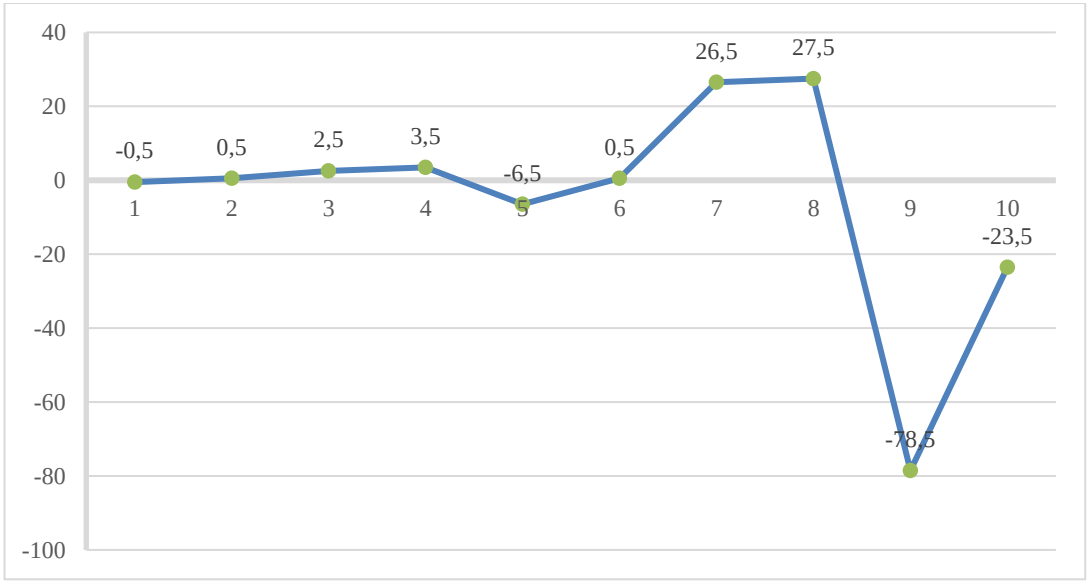
$(\mathrm{H}_1)\ p_n < 0, n \in \mathbb{N}_{k_8} = \{n: n = 2\mathrm{k} - 1,\ k \in \mathbb{N}\} = \{1,3,5, \dots\}$

$(\mathrm{H}_2)\ p_n > 0,\ n \in \mathbb{N}_{k_9} = \{n: n = 2\mathrm{k},\ k \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6, \dots\}$

$(\mathrm{H}_3)\ -\sigma = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_8}}{max}\{p_n\} = -2$ ve $\rho = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_9}}{min}\{p_n\} = 4$ olur.

$\{p_n\} = (-2)^n$ dizisini ele alalım. $p_n p_{n+1} = -2(-2)^{2n} < 0$ olup $\{p_n\}$ salınımlıdır.

Teorem 3.2.1'in tüm koşullarının sağlandığı, (3.2.3) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 3.5'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.5 $\boldsymbol{\tau = 1}$ için $\mathbb{N}_{k_8}$ ve $\mathbb{N}_{k_9}$ kümeleri üzerinde salınımlılık durumu

4. BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Bu bölüm de tezin orijinal bölümüdür. Bu bölümde birinci mertebeden gecikmeli neutral fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin davranışı incelenmekte ve bazı yeni sonuçlar verilmektedir.

$$\Delta(x_n + p_n x_{n-k}) + q_n x_{n-l} = 0 \tag{4.1}$$

birinci mertebeden neutral denklemini ele alalım. Burada l ve k pozitif tamsayıdır.

Lalli vd. (1991) de neutral fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ve pozitif çözümlerinin varlığı üzerinde yaptığı çalışma referans alınarak geliştirilmeye çalışılmış ve aşağıdaki yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1 $\{p_n\}$, periyodik salınımlı bir dizi ve periyodu $(k+1)$ olsun.

(C_1) $\mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (k+1)m - k + [0, k-1], m = 1,2, \dots\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_1}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_1}$ için,

(i) $-1 < p_n \leq a < 0, l > k$;

(ii) her büyük n sayısı için, $q_n \geq 0$ ve $q_n \geq q_{n-k}$;

(iii) $\frac{1}{(1+a)} \lim\limits_{n\to\infty} inf\ q_n > \frac{l^l}{(l+1)^{l+1}}$

(C_2) $\mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (k+1)m, m = 1,2, \dots\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_2}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_2}$ için,

(iv) $b \geq p_n > 0, l > k$;

(v) her büyük n sayısı için, $q_n \geq 0$ ve $q_n \geq q_{n-k}$;

(vi) $\frac{1}{(1+b)} \lim_{n\to\infty} \inf q_{n-k} \geq \frac{(k-l)^{k-l}}{(k-l+1)^{k-l+1}}$

koşulları sağlansın.

O zaman (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Aksini kabul edelim. Genelliği bozmadan $\{x_n\}$, bir yerden sonra (4.1) denkleminin pozitif çözümü olsun (negatif için de aynısı geçerlidir). Yani her

$n \geq n_1$ için $x_n > 0,\ x_{n-k} > 0, x_{n-l} > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ var olsun.

(4.1) denkleminde $z_n = x_n + p_n x_{n-k}$ tanımlayalım. O halde (4.1) denkleminde (ii) koşulu uygulanırsa,

$$\Delta z_n = -q_n x_{n-l} \leq 0$$

olur, yani z_n artmayandır.

İlk olarak, (C_1) ve (i) koşullarını ele alalım. Burada $z_n > 0$ veya $z_n < 0$ olmalıdır.

$z_n < 0$ olduğunu göz önüne alırsak, her $n \geq N$ sayısı için,

$$z_n \leq z_N < 0$$

olur.

$z_n = x_n + p_n x_{n-k}$ ifadesinde $z_n \leq z_N$ yazılırsa,

$$z_N = x_N + p_N x_{N-k}$$

veya

$$x_N = z_N - p_N x_{N-k}$$

olacaktır. O halde

$$x_{N+nk} \leq z_N - p_{N+nk}x_{N+(n-1)k} \tag{4.2}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} x_{N+(n-1)k} &\leq z_N - p_{N+(n-1)k}x_{N+(n-1)k-k} \\ &= z_N - p_{N+(n-1)k}x_{N+(n-2)k} \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir.

(4.3), (4.2) de yerine yazılırsa ve $-1 < p_{N+nk} < 0$ olduğundan $-p_{N+nk} > 0$ olur ve

$$x_{N+nk} \leq z_N + \left(z_N + x_{N+(n-2)k}\right)$$

şeklinde elde edilir. Bu iterasyona devam edilirse

$$x_{N+nk} \leq z_N + \left(z_N + x_{N+(n-2)k}\right) \leq \cdots \leq nz_N + x_N$$

olur. Bu ise, $n \to \infty$ için, x_{N+nk} in negatif olduğunu gösterir ve bu kabulümüz ile çelişir. O halde $z_n > 0$ dır.

$$x_n > z_n > 0 \tag{4.4}$$

olacaktır.

$$w_n = z_n + p_n z_{n-k}$$

olarak tanımlayalım. İleri fark özelliğinden, (i) ve (ii) koşullarından,

$$\Delta w_n = \Delta(z_n + p_n z_{n-k})$$

$$= \Delta z_n + \Delta(p_n z_{n-k})$$

$$\leq \Delta z_n + a\Delta z_{n-k}$$

$$= -q_n x_{n-l} - aq_{n-k} x_{n-k-l}$$

$$\leq -q_n x_{n-l} - aq_n x_{n-k-l}$$

$$= -q_n(x_{n-l} + ax_{n-k-l})$$

$$\leq -q_n z_{n-l}$$

$$\leq 0 \qquad (4.5)$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} z_n = c \geq 0$ vardır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} w_n = c + cp_n = (1 + p_n)c \geq 0$$

yazılabilir. Öyleyse, her büyük n sayısı için $w_n > 0$ olur.

Öte yandan z_n artmayan olduğundan,

$$w_n = z_n + p_n z_{n-k} \leq (1 + p_n) z_n$$

ya da

$$z_n \geq \frac{w_n}{1 + a} \qquad (4.6)$$

yazılabilir.

(4.5) ve (4.6) dan,

$$\Delta w_n \leq -q_n z_{n-l} \leq -\frac{q_n}{(1+a)} w_{n-l} \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada

$$\Delta w_n + \frac{q_n}{(1+a)} w_{n-l} \leq 0$$

olur ve bu eşitsizlik (iii) koşulundan ve Teorem 1.4 gereği pozitif çözüme sahip olmadığından kabulümüz ile çelişir.

İkinci olarak, (C_2) ve (iv) koşullarını ele alalım.

$z_n = x_n + p_n x_{n-k}$ tanımından,

$$z_n > x_n > 0 \tag{4.8}$$

olur. (4.1) denkleminde (v) koşulu uygulanırsa $\Delta z_n = -q_n x_{n-l} \leq 0$ olur, yani z_n artmayandır.

$$w_n = z_n + p_n z_{n-k}$$

ve ileri fark özelliğinden, (iv) ve (v) koşullarından;

$$\begin{aligned}
\Delta w_n &= \Delta z_n + \Delta(p_n z_{n-k}) \\
&\leq \Delta z_n + b\Delta z_{n-k} \\
&= -q_n x_{n-l} + b(-q_{n-k} x_{n-k-l}) \\
&\leq -q_{n-k} x_{n-l} - b q_{n-k} x_{n-k-l} \\
&= -q_{n-k}(x_{n-l} + b x_{n-k-l}) \\
&\leq -q_{n-k} z_{n-l}
\end{aligned}$$

$$\leq 0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Öte yandan z_n artmayan olduğundan ve (iv) koşulundan,

$$z_{n-l} + bz_{n-l} \geq z_{n-l} + p_n z_{n-l} \geq w_n = z_n + p_n z_{n-k}$$

olur. Buradan

$$z_{n-l} \geq \frac{w_n}{(1+b)} \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) dan,

$$\Delta w_n + q_{n-k} z_{n-k} \leq \Delta w_n + q_{n-k} z_{n-l} \leq 0$$

ya da

$$\Delta w_n + q_{n-k} z_{n-k} \leq 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\boldsymbol{z_{n-k}} \geq \frac{w_{n-k+l}}{(1+b)}$$

yazılabilir. (4.9) dan,

$$\Delta w_n + \frac{q_{n-k}}{(1+b)} w_{n-k+l} \leq 0$$

olur. Bu eşitsizlik (vi) koşulundan ve Teorem 1.4 gereği pozitif çözüme sahip olmadığından kabulümüz ile çelişir.

Örnek 4.1 $k = 1$ ve $l = 3$ için, birinci mertebeden

$$\Delta(x_n + p_n x_{n-1}) + q_n x_{n-3} = 0 \tag{4.11}$$

gecikmeli neutral fark denklemini ele alalım. Burada

$$\{p_n\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & n = 2m-1, \quad m = 1,2,\dots \\ 2, & n = 2m, \quad m = 1,2,\dots \end{cases}$$

ve

$$\{q_n\} = n + 2$$

dizilerini tanımlayalım.

(C_1) $n \in \mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (k+1)m - k + [0, k-1], m = 1,2,\dots\} = \{1,3,5,\dots\}$ için,

(i) $-1 < p_n \leq a < 0$, $a = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_1}}{max}\{p_n\} = -\frac{1}{2}$,

(ii) $q_n = n + 2 \geq q_{n-1} = n + 1$ ve $q_n = n + 2 \geq 0$,

(iii) $\frac{1}{(1+a)} \underset{n\to\infty}{lim\ inf}\ (n+2) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} . 3 = 6 > \frac{l^l}{(l+1)^{l+1}} = \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{256}$ olur.

(C_2) $n \in \mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (k+1)m, m = 1,2,\dots\} = \{2,4,6,\dots\}$ için,

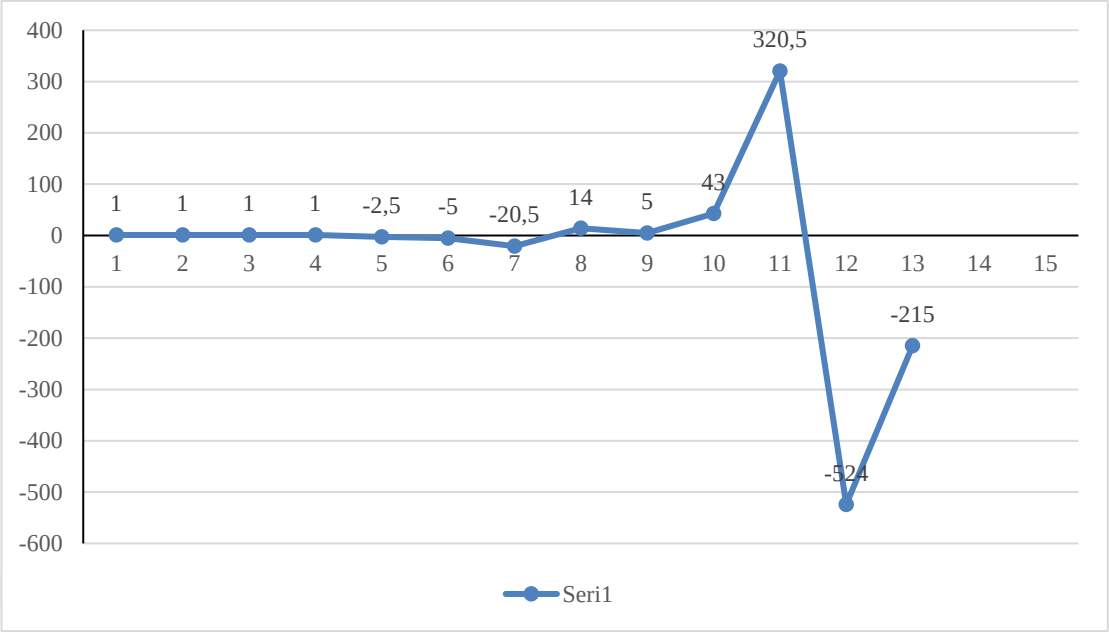
(iv) $b \geq p_n > 0$, $b = \underset{n\in\mathbb{N}_{k_2}}{max}\{p_n\} = 2$,

(v) $q_n = n + 2 \geq q_{n-1} = n + 1$ ve $q_n = n + 2 \geq 0$,

(vi) $\frac{1}{(1+b)} \underset{n\to\infty}{lim\ inf}\ q_{n-1} = \frac{1}{1+2} . 3 = 1 \geq \frac{(k-l)^{k-l}}{(k-l+1)^{k-l+1}} = \frac{(1-3)^{1-3}}{(1-3+1)^{1-3+1}} = \frac{(-2)^{-2}}{(-1)^{-1}} = -\frac{1}{4}$

olur.

Teorem 4.1'in tüm koşullarının sağlandığı, (4.11) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 4.1'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1 $\boldsymbol{k = 1}$ ve $\boldsymbol{l = 3}$ için salınımlılık durumu

Teorem 4.2 $\{p_n\}$, periyodik salınımlı bir dizi ve periyodu $(k+1)$ olsun.

(C_3) $\mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (k+1)m - k + [0, k-1], m = 1,2, \dots\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_1}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_1}$ için,

(vii) $-1 < p_n < 0, k > l$ ve $\underset{n \in \mathbb{N}_{k_1}}{max}\{p_n\} = p$;

(viii) her büyük n sayısı için, $q_n \geq 0$ ve $q_n \geq q_{n-k}$;

$$\lim_{n \to \infty} inf\ q_n > F(d) = \frac{(d-1)(1+pd^k)}{d^{l+1}}$$

ve

$$1 + pd^k = (d-1)[pkl + l - pkd^k]$$

burada, $d \in (1, (-p)^{1/k})$ denklemin tek reel köküdür.

(C_4) $\mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (k+1)m, m = 1,2, \dots\}$ olacak şekilde öyle bir $\mathbb{N}_{k_2}$ sayı dizisi kümesi vardır ki $n \in \mathbb{N}_{k_2}$ için,

(ix) $p_n > 0, k > l$ ve $\underset{n\in\mathbb{N}_2}{max}\{p_n\} = t$;

(x) her büyük n sayısı için, $q_n \geq 0$ ve $q_n \geq q_{n-k}$;

(xi) $\frac{1}{(1+t)} \underset{n\to\infty}{lim\ inf}\ q_{n-k} \geq \frac{(l-k)^{l-k}}{(l-k+1)^{l-k+1}}$

koşulları sağlansın. O zaman (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Aksini kabul edelim. Genelliği bozmadan $\{x_n\}$, bir yerden sonra (4.1) denkleminin pozitif çözümü olsun (negatif için de aynısı geçerlidir). Yani her $n \geq n_1$ için $x_n > 0,\ x_{n-k} > 0, x_{n-l} > 0$ olacak şekilde $n_1 \geq n_0$ var olsun.

İlk olarak, (C_3), (vii) ve (viii) koşullarını ele alalım.

$z_n = x_n + p_n x_{n-k}$ tanımlayalım. Burada $x_n > z_n > 0$ ve $\Delta z_n = -q_n x_{n-l} \leq 0,$ yani z_n artmayandır. $w_n = z_n + p_n z_{n-k}$ tanımlayalım. (4.5) ten,

$$\Delta w_n \leq -q_n z_{n-l}$$

$$\Delta w_n + q_n z_{n-l} \leq 0$$

$$\Delta(z_n + p_n z_{n-k}) + q_n z_{n-l} \leq 0$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten,

$$z_{n+1} - z_n + p_{n+1} z_{n-k+1} - p_n z_{n-k} + q_n z_{n-l} \leq 0 \qquad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) de her iki tarafı z_n e bölersek,

$$\frac{z_{n+1} - z_n + p_{n+1} z_{n-k+1} - p_n z_{n-k} + q_n z_{n-l}}{z_n} \leq 0$$

yazılabilir. Burada $r_n = \frac{z_{n-1}}{z_n}$ olarak alalım. Her büyük n için, $r_n \geq 1$ dir.

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} - \frac{z_n}{z_n} + p_{n+1}\frac{z_{n-k+1}}{z_n} - p_n\frac{z_{n-k}}{z_n} + q_n\frac{z_{n-l}}{z_n} \leq 0$$

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} \leq 1 + p_n\left(\frac{z_{n-k}}{z_n} - \frac{z_{n-k+1}}{z_n}\right) - q_n\frac{z_{n-l}}{z_n}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_{n+1}} &\leq 1 + p_n(r_{n-k+1}\dots r_{n-1}r_n - r_{n-k+2}\dots r_{n-1}r_n) - q_n r_{n-l+1}\dots r_n \\ &= 1 + p_n[r_{n-k+2}\dots r_{n-1}r_n(r_{n-k+1} - 1)] - q_n r_{n-l+1}\dots r_n\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Yukarıda r_n sınırlıdır. $\lim_{n\to\infty} r_n = d \geq 1$ vardır. O zaman d sonludur.

(4.13) den,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{1}{d} \leq 1 + p_n d^{k-1}(d-1) - d^l \lim_{n\to\infty} \inf\, q_n$$

yazılabilir. Son eşitsizlikten,

$$\lim_{n\to\infty} \inf\, q_n \leq \frac{d - 1 + p_n d^k(d-1)}{d^{l+1}}$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty} \inf\, q_n \leq \frac{(d-1)(1 + p_n d^k)}{d^{l+1}}$$

elde edilir. Burada,

$$F(d) = \frac{(d-1)(1 + p_n d^k)}{d^{l+1}}$$

dersek, $F'(d) = 0$ dan

$$1 + pd^k + (d-1)[pkd^k - l(1 + pd^k)] = 0$$

elde edilir. Burada d nin $[1,\infty)$ da reel kökü vardır. $F(d)$ maksimum değerini $[1,\infty)$ da alır. Bu da

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ q_n \le F(d)$$

olur ve (viii) koşulu ile çelişir.

İkinci olarak, (C_4), (ix) ve (x) koşullarını ele alalım.

$z_n = x_n + p_n x_{n-k}$ tanımlayalım. Burada $z_n > x_n > 0$ ve $\Delta z_n = -q_n x_{n-l} \le 0,$ yani z_n artmayandır.

$w_n = z_n + p_n z_{n-k}$ tanımlayalım. İleri fark özelliğinden, (ix) ve (x) koşullarından,

$$\begin{aligned}
\Delta w_n &= \Delta z_n + \Delta(p_n z_{n-k}) \\
&\le -q_n x_{n-l} + t\Delta z_{n-k} \\
&= -q_n x_{n-l} + t(-q_{n-k} x_{n-k-l}) \\
&\le -q_{n-k} x_{n-l} - t q_{n-k} x_{n-k-l} \\
&= -q_{n-k}(x_{n-l} + t x_{n-k-l}) \\
&= -q_{n-k} z_{n-l} \\
&\le 0 \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

olur, yani

$$\Delta w_n \le -q_{n-k} z_{n-l}$$

$$\Delta w_n + q_{n-k} z_{n-l} \le 0$$

elde edilir.

Öte yandan

$$z_{n-k} + tz_{n-k} \geq z_{n-k} + p_n z_{n-k} \geq w_n = z_n + p_n z_{n-k}$$

olur. Buradan

$$z_{n-k} \geq \frac{w_n}{(1+t)} \tag{4.15}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$z_{n-l} \geq \frac{w_{n+k-l}}{(1+t)} \tag{4.16}$$

yazılabilir.

(4.14) ve (4.16) dan,

$$\Delta w_n \leq -q_{n-k} z_{n-l} \leq -q_{n-k} \frac{w_{n+k-l}}{(1+t)}$$

ya da

$$\Delta w_n + \frac{q_{n-k}}{(1+t)} w_{n+k-l} \leq 0$$

olur ve bu eşitsizlik (xi) koşulundan ve Teorem 1.4 gereği pozitif çözüme sahip olmadığından kabulümüz ile çelişir.

Örnek 4.2 $k = 4$ ve $l = 2$ için, birinci mertebeden

$$\Delta(x_n + p_n x_{n-4}) + q_n x_{n-2} = 0 \tag{4.17}$$

gecikmeli neutral fark denklemini ele alalım. Burada

$$\{p_n\} = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & n = 5m-4, \quad m = 1,2,\dots \\ -\frac{1}{2}, & n = 5m-3, \quad m = 1,2,\dots \\ -\frac{2}{3}, & n = 5m-2, \quad m = 1,2,\dots \\ -\frac{1}{5}, & n = 5m-1, \quad m = 1,2,\dots \\ 3, & n = 5m, \quad m = 1,2,\dots \end{cases}$$

ve

$$\{q_n\} = 3n+1$$

dizilerini tanımlayalım.

(C_3) $n \in \mathbb{N}_{k_1} = \{n: n = (k+1)m - k + [0, k-1], m = 1, \dots\} =$ $\{1,2,3,4,6,7,8,9, \dots\}$ için,

(vii) $p = \max\limits_{n\in\mathbb{N}_{k_1}} \{p_n\} = -1/5,$

(viii) $q_n = 3n+1 \geq q_{n-4} = 3n-11$ ve $q_n = 3n+1 \geq 0,$

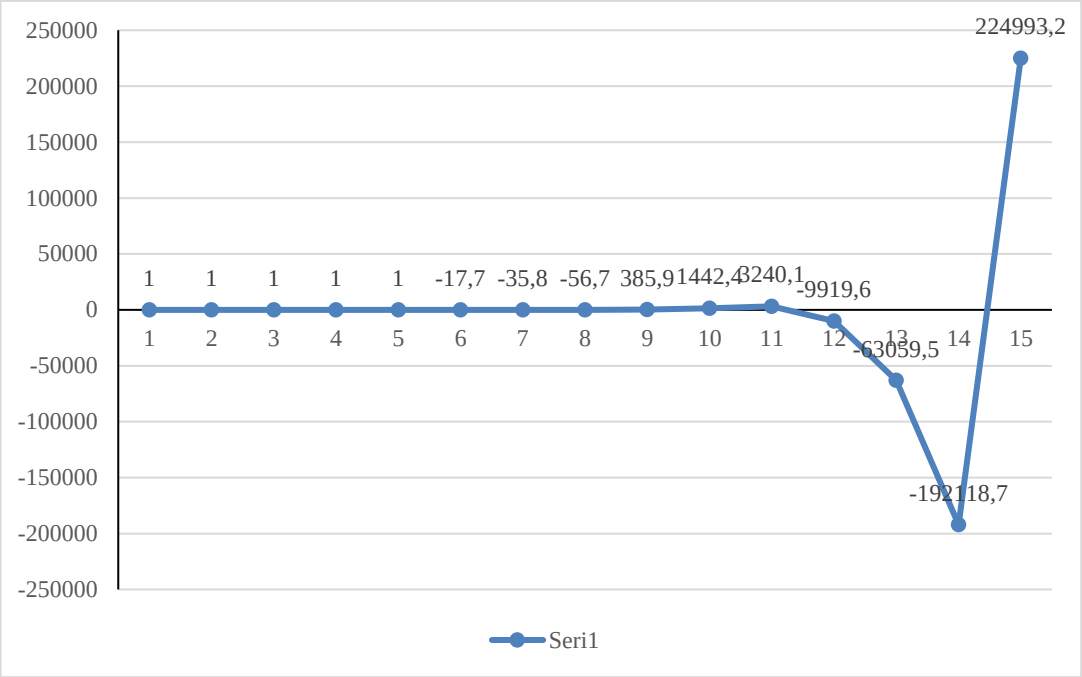
(C_4) $n \in \mathbb{N}_{k_2} = \{n: n = (k+1)m, m = 1,2, \dots\} = \{5,10,15,20, \dots\}$ için

(ix) $p_n > 0,\ t = \max\limits_{n\in\mathbb{N}_{k_2}} \{p_n\} = 3,$

(x) $q_n = 3n+1 \geq q_{n-4} = 3n-11$ ve $q_n = 3n+1 \geq 0,$

(xi) $\frac{1}{(1+t)} \lim\limits_{n\to\infty} inf\ q_{n-4} = \frac{1}{1+3}.4 = 1 \geq \frac{(l-k)^{l-k}}{(l-k+1)^{l-k+1}} = \frac{(2-4)^{2-4}}{(2-4+1)^{2-4+1}} = \frac{(-2)^{-2}}{(-1)^{-1}} = -\frac{1}{4}$ olur.

Teorem 4.2'nin tüm koşullarının sağlandığı, (4.17) denkleminin tüm çözümlerinin negatif ve pozitif değerler aldığı, dolayısıyla Şekil 4.2'deki gibi salınımlı olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2 $\boldsymbol{k = 4}$ ve $\boldsymbol{l = 2}$ için salınımlılık durumu

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bir denklemin çözümlerinin davranışı en çok denklemin katsayılarına bağlıdır. Bu nedenle nitel analizler yapılırken koşulların katsayılara yerleştirilmesi kaçınılmaz bir gerçektir. Bu çalışmada ele aldığımız tipteki denklemler birçok yazar tarafından dikkate alınmış ve giriş kısmında bahsedildiği gibi çok sayıda çalışma yapılmıştır. Şimdiye kadar yapılan tüm çalışmalarda, katsayı fonksiyonu her zaman pozitif değerli bir fonksiyon olarak kabul edilmiştir (örneğin; pozitif sabit, pozitif sınırlı veya sınırsız fonksiyon, pozitif salınımlı veya periyodik fonksiyon vb.). Bu çalışmada, burada tartışılan katsayı fonksiyonunun pozitif değerli bir fonksiyon olması gerekmediği gösterilmiştir. Katsayı fonksiyonunun periyodik ve sıfır etrafında salınımlı (pozitif veya negatif değerli) hatta doğrudan salınımlı bir fonksiyon olarak ele alınması bu çalışmayı diğer çalışmalardan daha ilgi çekici kılmaktadır. Ayrıca elde edilen sonuçların şartlarının ağır olmaması ve ispatının çok karışık olmayacak şekilde yapılmış olması bu çalışmayı diğer çalışmalardan ayıran önemli bir özelliktir. Elde edilen sonuçların ispatlarında, bir fonksiyonun maksimum ve minimum özellikleri ile eşitsizlikler hakkındaki bilgiler kullanılarak çok basit ve anlaşılır bir ispat yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçların doğruluğunu göstermek için her teoremin sonunda teoremin koşullarının sağlandığı ve istenilen sonucu veren örnekler verilmiştir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P. (2000). *Difference Equations and Inequalities,Theory, Methods and Applications*. New York: Marcel Dekker.

Aydın, S. (1999). *Analize giriş- cilt 1*. (7. Baskı), İstanbul: Beta Yayınları.

Baker, C. T., Bocharov, G. A., & Rihan, F. A. (1999). A report on the use of delay differential equations in numerical modelling in the biosciences.

Boucekkine, R., Licandro, O., & Paul, C. (1997). Differential-difference equations in economics: on the numerical solution of vintage capital growth models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *21*(2-3), 347-362.

Bozkurt, V.K. (2016). Neutral gecikmeli fark denklemleri üzerine (doktora tezi). *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara Üniversitesi.

Chatzarakis, G. E., & Stavroulakis, I. P. (2006). Oscillations of first order linear delay difference equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, *3*(1), 1-11.

Chatzarakis, G. E., Koplatadze, R., & Stavroulakis, I. P. (2008). Oscillation criteria of first order linear difference equations with delay argument. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *68*(4), 994-1005.

Chatzarakis, G. E., Philos, C. G., & Stavroulakis, I. P. (2008). On the oscillation of the solutions to linear difference equations with variable delay. *Electronic Journal of Differential Equations.* 1-15.

Chen, M. P., & Yu, J. S. (1995). Oscilations of delay difference equations with variable coefficients. S.N. Elaydi (Eds.), In *Proceedings of the First International Conference on Difference Equations* (p. 105-114). Gordon and Breach.

Chen, M. P., Lalli, B. S., & Yu, J. S. (1995). Oscillation in neutral delay difference equations with variable coefficients. *Computers & Mathematics with Applications*, *29*(3), 5-11.

Driver, R. D. (2012). *Ordinary and delay differential equations* (Vol. 20). Springer Science & Business Media.

Elaydi, S. (1999). *An Introduction to Difference Equations.* Third Edition. USA: Springer.

Elaydi, S., (2000), An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York.

Erbe, L., & Zhang,B.G. (1989). Oscillation of discrete analogues of delay equations. *Differential and Integral Equations.* 2, 300-309.

Georgiou, D. A., Grove, E. A., & Ladas, G. (1989). Oscillations of neutral difference equations. *Applicable Analysis*, *33*(3-4), 243-253.

Goldberg, S. (1958). *Introduction to Difference Equations*. New York: John Wiley and Sons,Inc.

Györi, I., & Ladas, G. (1991). Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Oxford: Clarendon Press.

Karpuz, B. (2017). Sharp oscillation and nonoscillation tests for linear difference equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, *23*(12), 1929-1942.

Karpuz, B., & Özsever, Z. (2022). An iterative oscillation test for delay difference equations. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *51*(1), 74-82.

Kordonis, I. G., & Philos, C. G. (1997). Oscillation of neutral difference equations with periodic coefficients. *Computers & Mathematics with Applications*, *33*(7), 11-27.

Ladas, G., Philos, C., & Sficas,Y. (1989). Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, *J. Appl. Math. Simulation*, 2, 101-112.

Ladas,G. (1990). Recent developments in the oscillation of delay difference equations. *International Conference on Differential Equations: Stability and control*, 321-332.

Lalli, B. S., & Zhang, B. G. (1992). Oscillation and comparison theorems for certain neutral difference equations. *The ANZIAM Journal*, *34*(2), 245-256.

Lalli, B. S., Zhang, B. G., & Li, J. Z. (1991). On the oscillation of solutions and existence of positive solutions of neutral difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *158*(1), 213-233.

Li, W. T., & Huo, H. F. (2005). Positive periodic solutions of delay difference equations and applications in population dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *176*(2), 357-369.

May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, *261*(5560), 459-467.

Philos, C. G. (1992). Oscillations in difference equations with periodic coefficients. *Archiv der Mathematik*, *58*, 453-461.

Stavroulakis, I. P. (1995). Oscillations of delay difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, *29*(7), 83-88.

Stavroulakis, I.P. (2004). Oscillation critera for first order delay difference equations. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *1*(2), 231-240.

Tang, X. H. (1998). Oscillations of delay difference equations with variable coefficients. *J. Central South Univ. of Technology, 29,* 287-288.

Tang, X. H., & Yu, J. S. (1999a). Oscillation of delay difference equation. *Computers & Mathematics with Applications, 37*(7), 11-20.

Tang, X. H., & Yu, J. S. (1999b). A further result on the oscillation of delay difference equations. *Computers & Mathematics with Applications, 38*(11-12), 229-237.

Tang, X. H., & Yu, J. S. (2000). Oscillations of delay difference equations. *Hokkaido Mathematical Journal, 29*(1), 213-228.

Tang,X.H.,& Zhang,R.Y. (2001). New oscillation criteria for delay difference equations. *Computers & Mathematics with Applications, 42*(10-11),1319-1330.

Thandapani, E., Arul, R., & Raja, P. S. (2003). Oscillation of first order neutral delay difference equations. *Appl. Math. E-Notes, 3*, 88-94.

Villasana, M., & Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *Journal of mathematical biology, 47*, 270-294.

Wei, G. (1999). Oscillation of solutions of impulsive neutral delay difference equations. *Mathematical Theory and Applications*, *19*(2), 119-121.

Yu, J. S., & Cheng, S. S. (1994). A stability criterion for a neutral difference equation with delay. *Applied Mathematics Letters, 7*(6), 75-80.

Yu, J. S., Zhang, B. G., & Qian, X. Z. (1993). Oscillations of delay difference equations with oscillating coefficients. *Journal of mathematical analysis and applications*, *177*(2), 432-444.

Yu, J. S., Zhang, B. G., & Wang, Z. C. (1994). Oscillation of delay difference equations. *Applicable Analysis, 53*(1-2), 117-124.