T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KEYFİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

MURAT GEVGEŞOĞLU

DOKTORA TEZİ

PROF. DR. YAŞAR BOLAT

HAZİRAN - 2022
KASTAMONU

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Murat GEVGEŞOĞLU

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KEYFİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

MURAT GEVGEŞOĞLU

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN: PROF. DR. YAŞAR BOLAT

Bu tezde keyfi (fractional) mertebeden fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin davranışı incelenmiştir. Tez beş bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş için ayrılmıştır. Bu bölümde kısa bir literatür taraması yapılmış, çalışmanın amacı, önemi ve kaynakların özeti sunulmuştur.
İkinci bölümde tez boyunca gerekli temel tanım, teoremler ve lemmalar verilmiştir.
Üçüncü bölümde birden fazla değişken gecikmeli terim içeren keyfi mertebeden fark denklemlerinin bir sınıfının çözümlerinin kararlılığı ele alınmış ve elde edilen bazı yeni sonuçlar verilmiştir.
Dördüncü bölümde Nicholson kurt sineği modeli (Nicholson's blowflies model) tipindeki keyfi mertebeden geri fark denkleminin çözümlerinin kararlılığı ele alınmış ve elde edilen bazı yeni sonuçlar verilmiştir.
Son bölümde ise Volterra tipindeki keyfi mertebeden lineer fark denkleminin bir sınıfının kararlılık kriteri ile asimptotik özellikleri incelenmiş ve Volterra tipindeki keyfi mertebeden lineer fark sisteminin asimptotik davranışı ele alınarak elde edilen bazı yeni sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta teoremi, kararlılık, asimptotik kararlılık, keyfi mertebeden (fractional order) fark denklemleri, keyfi mertebeden geri fark denklemi, keyfi mertebeden Volterra fark denklemi.

Haziran 2022, 74 Sayfa

ABSTRACT

PH.D THESIS

ON THE BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF A CLASS OF ARBITRARY ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

MURAT GEVGEŞOĞLU

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR: PROF. DR. YAŞAR BOLAT

In this thesis, the behaviour of solutions of a class of fractional difference equations is examined. The thesis consist of five chapter.
The first chapter is reserved for introduction. In this chapter, a brief literature review has been made, the purpose and importance of the study and the summary of the references are presented.
In the second chapter, fundamental definitions, theorems and lemmas required throughout the thesis have been given.
In the third chapter, the stability of the solutions of a class of fractional difference equations containing more than one variable delay term is discussed and some new results are given.
In the fourth chapter, stability of Nicholson's blowflies model nabla fractional difference equations is discussed and certain new results are given.
In the last chapter, stability and asymptotic behaviour of a class of Volterra type linear nabla fractional difference equation is examined and asymptotic behaviour of Volterra type linear nabla fractional system is discussed.

KEYWORDS: Fixed point theorem, stability, asymptotic stability, fractional difference equations, nabla fractional difference equation, Volterra fractional difference equation.

June 2022, 74 Page

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan ve desteğini her zaman hissettiğim değerli hocam Sayın Prof. Dr. Yaşar BOLAT (Kastamou Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'a, beni yönlendiren ve değerli vakitlerini bana ayıran kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Ayşe Feza GÜVENİLİR (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e, desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet DAŞDEMİR (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)'e ve her zaman yanımda olan eşim ve biricik kızıma gösterdikleri özveri ve desteklerinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Murat GEVGEŞOĞLU

Kastamonu, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI ..... **ii**
TAAHHÜTNAME ..... **iii**
ÖZET ..... **iv**
ABSTRACT ..... **v**
TEŞEKKÜR ..... **vi**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... **viii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER **7**
3. BİRDEN FAZLA DEĞİŞKEN GECİKMELİ TERİM İÇEREN KEYFİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI **26**
4. NICHOLSON KURT SİNEĞİ MODELİ TİPİNDEKİ KEYFİ MERTEBEDEN GERİ FARK DENKLEMİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI **41**
5. VOLTERRA TİPİNDEKİ KEYFİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNİN BAZI SINIFLARININ KARARLILIK KRİTERİ **52**
5.1 $\nabla_{-1}^{\upsilon} x(t) = \lambda x(t)$ Biçimindeki Keyfi Mertebeden Geri Fark Denkleminin Çözümlerinin Kararlılığı 52
5.2 $\nabla_{-1}^{\upsilon} x(t) = \lambda x(t)$ Biçimindeki Keyfi Mertebeden Geri Fark Denkleminin Çözümlerinin Ayrık Mittag-Leffler Fonksiyonu ile İlişkisi ve Çözümlerinin Asimptotik Davranışı 58
5.3 $\nabla^{\nu} x(t) = Ax(t) + p(t)$ Biçimindeki Keyfi Mertebeden Geri Fark Sisteminin Çözümlerinin Ayrık Mittag-Leffler Fonksiyonu ile İlişkisi ve Çözümlerinin Asimptotik Davranışı 63
6. SONUÇ VE ÖNERİLER **69**
KAYNAKLAR **70**
ÖZGEÇMİŞ **73**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
D^{α}	: α-inci mertebeden türev operatörü
$D^{-\alpha}$	: α-inci mertebeden integral operatörü
$\Delta^{-\nu}$	: ν-inci mertebeden keyfi toplam operatörü
Δ^{μ}	: μ-inci mertebeden Riemann-Liouville benzeri keyfi ileri fark operatörü
Δ_{*}^{μ}	: μ-inci mertebeden Caputo benzeri keyfi ileri fark operatörü
$x^{(k)}$	: x in k yıncı faktöriyel polinomu
$\lceil . \rceil$	: Sayının tavanı (kendisinden büyük veya eşit en küçük tamsayı)
∇	: Geri (Nabla) fark operatörü
$t^{\overline{\alpha}}$	: Herhangi bir α reel sayısı için artan faktöriyel fonksiyonu
$\nabla_{a}^{-\alpha}$	: α-inci mertebeden a dan başlayan keyfi geri toplam operatörü
$\nabla_{a^{*}}^{\alpha}$	: α -inci mertebeden a dan başlayan Caputo keyfi geri fark operatörü
∇_{a}^{α}	: α-inci mertebeden a dan başlayan Riemann-Liouville keyfi geri fark operatörü
$\tilde{x}(z)$	: $x(t)$ dizisinin Z-dönüşümü
$x(t) * y(t)$	: $x(t)$ ve $y(t)$ dizilerinin konvolüsyonu
$\mathcal{L}x(s)$	: x fonksiyonunun ayrık(discrete) Laplace dönüşümü
$E_{\alpha,\beta}$	: 2 parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}^{\lambda}$	: Ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu

1. GİRİŞ

Tamsayı olmayan mertebeden türevin tarihi, 1695'te ünlü matematikçi L'Hospital'in Leibniz'e yazdığı mektupta 1/2. mertebeden türevin anlamını sormasıyla başlamıştır. Leibniz'in yanıtı: "Bu durum şu anda bir paradoks gibi gözükse de bir gün çok kullanışlı sonuçları ortaya çıkacak" şeklinde olmuştur. Daha sonraları keyfi mertebeden türev ve integral adlandırmasının daha doğru olacağı fark edilse de konunun ismi L'Hospital'den günümüze kadar keyfi mertebeden (fractional) analiz olarak gelmiştir. Keyfi mertebeden analiz ismi kesirlerin analizi anlamına gelmemektedir. Bu isim ne türevin, ne integralin ne de değişkenler analizinin bir kesri anlamına gelmektedir. Keyfi mertebeden analiz keyfi mertebeden türev ve keyfi mertebeden integralin adıdır ve tamsayı mertebeden türev ile *n*-katlı integrali birleştirir ve genelleştirir (Podlubny, 1999).

1832'de Liouville ile birlikte keyfi mertebeden analiz ile ilgili çalışmaların sistematik olarak başladığı söylenebilir. Liouville, öncelikle $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ şeklindeki üstel fonksiyonların keyfi mertebeden türevinin α keyfi bir kompleks sayı olmak üzere

$$D^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k {a_k}^{\alpha} e^{a_k x}$$

olduğunu göstermiştir. Daha sonra bir fonksiyonun herhangi bir mertebeden integralinin

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{(-1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} f(x+t) t^{\alpha-1} dt, \; -\infty < x < \infty, Re(\alpha) > 0$$

biçiminde olduğunu göstermiştir. 1847'de Riemann tarafından Liouville'nin çalışmaları geliştirilerek keyfi mertebeden integralin en temel tanım olan

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > 0$$

Riemann- Liouville tanımı ortaya konulmuştur (Butzer ve Westphal, 2000).

1967 yılında Caputo tarafından fiziksel uygulamalarda sıkça kullanılan

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)}\int_{a}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\, d\tau, \quad (n-1 \leq \alpha \leq \mathrm{n})$$

keyfi mertebeden türevi ortaya konulmuştur (Dalir ve Mashaur, 2010).

Görüldüğü üzere keyfi mertebeden analiz 300 yılı aşkın süredir araştırılmakta ve gelişmekte olan bir konudur. Ancak karmaşık bir konu olması nedeniyle bu araştırmaların modern matematikte anlamlı ve uygun seviyeye gelmesi çok eski değildir. Konunun diğer bilim dallarına uygulanabilir olgunluğa erişip başarılı sonuçlar vermeye başlamasıyla geçtiğimiz yüzyılda önemi giderek artmıştır (Podlubny, 1999).

Keyfi (fractional) mertebeden diferensiyel denklemlerle ilgili olarak son yıllarda geniş bir literatür oluşmuştur. Bunlardan temel çalışmalar sayılabilecek bazıları için, Miller ve Ross (1993), Podlubny (1999), Oldham ve Sapanier (2002), Kilbas ve Srivastava (2006) Sabatiyer vd. (2007), Zou (2014) incelenebilir. Keyfi mertebeden diferensiyel denklemlerin son yıllarda önemini arttırmasının en büyük sebebi bu denklemlerin birçok farklı alanda kullanım imkanı olmasıdır. Keyfi mertebeden analizin bazı kullanım alanları viskoelastisite, kapasitör teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya, nöroloji, kontrol teorisi ve istatistik olarak verilebilir.

Keyfi mertebeden diferensiyel denklemlerin ayrık (discrete) hali olan keyfi mertebeden (fractional) fark denklemleri de son zamanlarda geniş bir araştırmacı kitlesinin ilgisini çekmektedir.

Atıcı ve Eloe (2009) da , $v > 0$ ve $\sigma(s) = s + 1$ olmak üzere f nin $v - inci$ mertebeden keyfi toplamı

$$\Delta^{-v}f(t,a) = \frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a}^{t-v}\big(t-\sigma(s)\big)^{(v-1)}\, f(s)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\mathbb{N}_t = \{t, t+1, \dots\}$ olmak üzere f, $s = a \ mod(1)$ için ve $\Delta^{-v} f$, $t = a + v \ mod(1)$ için tanımlı olup Δ^{-v}, $\mathbb{N}_a$ da tanımlı fonksiyonları $\mathbb{N}_{a+v}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlara dönüştürür.

Atıcı ve Eloe (2009) keyfi mertebeden toplam ve keyfi mertebeden fark operatörleri için değişme özelliğini geliştirdiler.

Atıcı ve Şengül (2010) ayrık keyfi mertebeden analizin temel formüllerinden olan Leibniz kuralını ve kısmi toplam formülünü verdiler.

Anastassiou (2009) Caputo benzeri ayrık fark operatörünü tanımlamış ve bu operatörü daha önceden tanımlanan Riemann- Liouville ayrık fark operatörü ile karşılaştırarak, ayrık Ostrowski, Poincare ve Sobolev tipindeki eşitsizlikler elde etmiştir.

Atıcı ve Eloe (2009) ayrık keyfi mertebeden analizde geri fark operatörünün temel özelliklerini, kuvvet ve çarpım kuralını ve bunların ileri fark operatörü ile olan ilişkisini elde etmiştir. Ayrıca aynı çalışmada tam sayıların zaman skalası üzerinde geri ∇ türevinin Laplace dönüşüm özelliklerini ve dönüşüm metodu yardımı ile keyfi mertebeden sonlu fark denkleminin çözümlerini elde etmişlerdir.

Atıcı ve Eloe (2015) konvolüsyonu tanımlamış ve *R*-dönüşümü için konvolüsyon teoremini elde etmiştir. Aynı çalışmada dönüşüm metodunu kullanılarak

$$-\Delta^{v} y(t) + \lambda y(t+v-1) = h(t+v-2), \ \ 1 < v \leq 2$$

denklemi için parametrelerin değişimi formülü elde edilmiştir.

Mohan ve Deekshitulu (2012) keyfi mertebeden fark denklemlerinin birçok sınıfı için varlık ve teklik teoremlerini vermiştir.

Klasik analizde bir fonksiyonun türevi geometrik olarak yorumlanabilmesine rağmen keyfi mertebeden analizde keyfi mertebeden türevin geometrik yorumunun tam olarak yapılamamasından dolayı keyfi mertebeden diferensiyel denklemlerin ve keyfi mertebeden fark denklemlerinin kararlılık analizi üzerine çok az sayıda çalışma

bulunmaktadır. Lokal asimptotik kararlılık, Mittag-Leffler kararlılığı ve lineer matris eşitsizliği kararlılığı üzerine yapılmış çalışmalardan bazıları için, Li vd. (2009), Li vd. (2010), Sabatier vd. (2010), Chen ve Zhou (2011) incelenebilir. Chen ve Zou (2011) Schauder sabit nokta teoremi kullanarak keyfi mertebeden fonksiyonel diferensiyel denklemlerin atraktifliğini ele almışlardır.

Deng (2010) daralma dönüşümü kullanarak lineer olmayan keyfi mertebeden diferensiyel denklemin atraktifliğini ele almıştır.

Chen (2011) Schauder sabit nokta teoremi ve ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremini kullanarak

$$\Delta_*{}^{\alpha}x(t) = f\big(t+\alpha, x(t+\alpha)\big), t \in \mathbb{N}_{1-\alpha}, 0 < \alpha \leq 1,$$
$$x(0) = x_0$$

biçimindeki lineer olmayan keyfi mertebeden fark denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı incelemiştir. Burada $f: [0,\infty] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t ve x e göre sürekli bir fonksiyon ve $\mathbb{N}_t = \{t, t+1, \dots\}$ dir.

Boulares vd. (2017) Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremini kullanarak

$$\Delta_*{}^{\alpha}[x(t) - g(t, x(t-\tau(t)))] = f\big(t+\alpha, x(t+\alpha), x(t+\alpha-\tau(t+\alpha))\big), t \in \mathbb{N}_{1-\alpha}$$
$$x(t) = \phi(t), t \in [m_0, 0] \cap \mathbb{N}_{m_0}$$

biçimindeki lineer olmayan nötral tipten keyfi mertebeden fark denkleminin asimptotik kararlılığını incelemişlerdir. Burada, $m_0 = inf_{t\in\mathbb{N}_0}\{t-\tau(t)\}$, $\mathbb{N}_t = \{t, t+1, \dots\}$, $\tau: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $t \to \infty$ iken $t-\tau(t) \to \infty$, $f: [0,\infty] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x ve y'ye göre sürekli ve $g: [0,\infty] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x e göre Lipschitz süreklidir.

Chen ve Liu (2012) Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremini kullanarak

$$\Delta^{\alpha}x(t) = f\big(t+\alpha, x(t+\alpha)\big), t \in \mathbb{N}_0, 0 < \alpha \leq 1$$
$$\Delta^{\alpha-1}x(t)_{|t=0} = x_0$$

biçimindeki lineer olmayan keyfi mertebeden fark denkleminin asimptotik karalılığını incelemişlerdir. Burada $f: [0,\infty] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t ve x e göre sürekli bir fonksiyon ve $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, \dots\}$ dir.

Cermak vd. (2012) $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1, \lambda \neq 1$ olmak üzere

$${}_0\nabla^{\alpha}y(n) = \lambda y(n)$$

biçimindeki iki terimli keyfi mertebeden lineer geri (nabla) fark denkleminin kalitatif özelliklerini incelemiştir. Bunun için öncelikle bu denklemin konvolüsyon tipinde bir Volterra denklemi olduğunu göstermişler, Volterra fark denklemlerinde kullanılan standart yöntemleri kullanarak çalışılan denklem için asimptotik kararlılık koşullarını ortaya koymuşlardır.

Mohan vd. (2014) sabit nokta teoremini kullanarak lineer olmayan

$$\nabla_{a-1}^{\alpha}u(t) = f\big(t, u(t)\big), t \in \mathbb{N}_{a+1}$$

$$\nabla_{a-1}^{-(1-\alpha)}u(t)\big|_{t=a} = u(a) = u_0$$

tipindeki Riemann-Liouville ve

$$\nabla_{a*}^{\alpha}u(t) = f\big(t, u(t)\big), t \in \mathbb{N}_{a+1}$$
$$u(a) = u_0$$

biçimindeki Caputo fark denklemlerinin asimptotik kararlılıklarını incelemişlerdir.

Yukarıda incelenen çalışmalardan da görüleceği üzere keyfi mertebeden fark denklemlerinin çözümlerinin davranışlarının incelenmesi gün geçtikçe birçok araştırmacının ilgisini çekmekte ve bu sebeple keyfi mertebeden fark denklemlerine

ait literatür gün geçtikçe zenginleşmektedir. Yukarıda verilen çalışmalar temel alınarak bu tez çalışmamızda keyfi mertebeden fark denklemlerinin bazı sınıflarının çözümlerinin davranışı incelenmiştir. Bunun için kararlılık incelemesinde Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremi kullanılacaktır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, keyfi mertebeden ileri ve geri fark operatörü ve bunların elde edilişi ile ilgili bazı temel bilgiler, özellikler, tanımlar, teoremler ve kararlılık ve asimptotik kararlılık tanımları ile ilgili bazı temel teoremlere yer verilmektedir.

Tanım 2.1 $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ integrali ile tanımlı olup bu integral $Re(z) > 0$ için yakınsaktır (Podlubny, 1999).

Gamma fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. $n = 1,2,\ldots$ için $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$.
4. $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu $z = -n, n = 0,1,2,\ldots$ noktalarında basit kutuplara sahiptir.
5. $\Gamma(z)$ Gamma fonksiyonu
   $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}$$
   limit gösterimine sahiptir (Podlubny, 1999).

Tanım 2.2 $x^{(k)}$ faktöriyel polinomu veya faktöriyel kuvveti x in $k-yıncı$ faktöriyel polinomu veya faktöriyel kuvveti olarak okunur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

(a) $k \in \mathbb{Z}^+$ için $x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$,

(b) $k = 0$ için $x^{(0)} = 1$,

(c) $k \in \mathbb{Z}^-$ için $x^{(k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}$,

(d) $k \notin \mathbb{Z}$ için $x^{(k)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$.

Uyarı 2.1 $x = n \in \mathbb{Z}^+$ve $n \geq k$ için,

$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$, $n^{(n)} = n!$ dir. Burada $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ binom katsayısı ile $n^{(k)}$ faktöriyel kuvveti arasında $\binom{n}{k} = \frac{n^{(k)}}{\Gamma(k+1)}$ ilişkisi vardır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Örnek 2.1 $(a)\left(\frac{4}{5}\right)^{(3)} = \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}-1\right)\left(\frac{4}{5}-2\right) = \frac{32}{125}$,

$(b)\left(\frac{4}{5}\right)^{(-3)} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}+1\right)\left(\frac{4}{5}+2\right)\left(\frac{4}{5}+3\right)} = \frac{125}{2394}$,

$(c)\ 2^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}$.

Uyarı 2.2 $x^{(k)}$ fonksiyonundaki x ve k değerleri Tanım 2.2 deki formüller anlamlı olacak şekilde seçilirler. Örneğin $(-2)^{(-3)}$ tanımlı değildir. Çünkü bu durumda (c) deki formülün paydasında sıfır ortaya çıkar. Ayrıca, $(\frac{1}{2})^{(\frac{3}{2})}$ anlamlı değildir. Çünkü bu durumda $\Gamma(0)$ bulunur ve bu ise tanımsızdır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 2.1 Aşağıdaki faktöriyel fonksiyonlarının iyi tanımlı olduklarını kabul edelim. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır (Atıcı ve Eloe, 2007).

$(i)\ \Delta t^{(\nu)} = \nu t^{(\nu-1)}$.

$(ii)\ (t-\mu)t^{(\mu)} = t^{(\mu+1)}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

$(iii)\ \mu^{(\mu)} = \Gamma(\mu+1)$.

(iv) Herhangi $\nu > r$ için $t \leq r$ ise $t^{(\nu)} \leq r^{(\nu)}$dir.

$(v)\ 0 < \nu < 1$ ise $t^{(\alpha\nu)} \geq \left(t^{(\alpha)}\right)^{\nu}$ dir.

$(vi)\ t^{(\alpha+\beta)} = (t-\beta)^{\alpha}t^{(\beta)}$

Teorem 2.2 Bir $f(n)$ fonksiyonu $n \geq 0$ için tanımlı ise, bu durumda

$\Delta^{-1}f(t) = \sum_{i=0}^{t-1} f(i) + c$ dir. Burada c keyfi bir sabittir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 2.3

$$\Delta^n u(t) = f(t) \qquad t = a, a+1,. \tag{2.1}$$

$$u(a+j-1) = 0, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{2.2}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(t) = \Delta^{-n} f(t) = \sum_{s=a}^{t-1} \frac{\big(t-\sigma(s)\big)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(s)$$

biçimindedir (Atıcı ve Eloe, 2007).

Tanım 2.3 $\nu > 0$ olsun. $\sigma(s) = s+1$ olmak üzere f nin ν-inci mertebeden keyfi toplamı

$$\Delta^{-\nu} f(t,a) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} \big(t-\sigma(s)\big)^{(\nu-1)} f(s)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, a+2, \dots\}$ olmak üzere f fonksiyonu, $s = a \bmod(1)$ ve $\Delta^{-\nu} f$, $t = a+\nu \bmod(1)$ için tanımlı olup, buradaki $\Delta^{-\nu}$ ters fark operatörü $\mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı fonksiyonları $\mathbb{N}_{a+\nu}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlara dönüştürür (Atıcı ve Eloe, 2009).

Teorem 2.4 $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $\mu, \nu > 0$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^{-\nu}[\Delta^{-\mu} f(t)] = \Delta^{-(\nu+\mu)} f(t) = \Delta^{-\mu}[\Delta^{-\nu} f(t)]$$

eşitliği sağlanır (Atıcı ve Eloe, 2009).

Lemma 2.1 $\mu \neq -1$ ve $\mu + \nu + 1$ pozitif olmayan bir tamsayı olmasın (yani $\mu + \nu + 1 \neq \cdots, -2, -1, 0$). Bu durumda

$$\Delta^{-\nu} t^{(\mu)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} t^{(\mu+\nu)}$$

dir (Atıcı ve Eloe, 2009).

Teorem 2.5 $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Herhangi $\nu > 0$ için

$$\Delta^{-\nu}\Delta f(t) = \Delta\Delta^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a)^{(\nu-1)}}{\Gamma(\nu)} f(a) \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanır (Atıcı ve Eloe, 2009).

Uyarı 2.3 (2.3) de ν yerine $\nu + 1$ yazıp Teorem 2.4 kullanılırsa

$$\Delta^{-\nu-1}\Delta f(t) = \Delta^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)} f(a)$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \Delta^{-\nu-1}\Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+1)} f(a)$$

bulunur (Atıcı ve Eloe, 2009).

Uyarı 2.4 p pozitif bir tamsayı olmak üzere $p - 1 < \nu < p$ olsun. Teorem 2.5 den

$$\Delta\Delta^{\nu} f(t) = \Delta\Delta^{p}\left(\Delta^{-(p-\nu)} f(t)\right) = \Delta^{p+1}\left(\Delta^{-(p-\nu)} f(t)\right) = \Delta^{p}\left(\Delta\Delta^{-(p-\nu)} f(t)\right)$$

$$= \Delta^{p}\left(\Delta^{-(p-\nu)}\Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(p-\nu-1)}}{\Gamma(p-\nu)} f(a)\right)$$

$$= \Delta^p \Delta^{-(p-\nu)} \Delta f(t) + \Delta^p \frac{(t-a)^{(p-\nu-1)}}{\Gamma(p-\nu)} f(a)$$

$$= \Delta^\nu \Delta f(t) + \frac{(t-a)^{(-\nu-1)}}{\Gamma(-\nu)} f(a)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.3) herhangi ν reel sayısı için geçerlidir (Atıcı ve Eloe, 2009).

Teorem 2.6 $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olmak üzere herhangi ν reel sayısı ve p pozitif tamsayısı için

$$\Delta^{-\nu} \Delta^p f(t) = \Delta^p \Delta^{-\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{(\nu-p+k)}}{\Gamma(\nu+k-p+1)} \Delta^k f(a) \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanır (Atıcı ve Eloe, 2009).

Uyarı 2.5 (2.4)'de ν yerine $\nu + p$ yazılıp Teorem 2.4 uygulanırsa,

$$\Delta^{-\nu} f(t) = \Delta^{-\nu-p} \Delta^p f(t) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(t-a)^{(\nu+k)}}{\Gamma(\nu+k+1)} \Delta^k f(a)$$

elde edilir (Atıcı ve Eloe, 2009).

Teorem 2.7 p pozitif bir tamsayı ve $\nu > p$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta^p [\Delta^{-\nu} f(t)] = \Delta^{-(\nu-p)} f(t)$$

dir (Atıcı ve Eloe, 2009).

Tanım 2.4 $\mu > 0$, m pozitif bir tamsayı, $\lceil . \rceil$ sayının tavanı(kendisinden büyük veya eşit en küçük tamsayı) olmak üzere $m-1 < \mu < m$, $\lceil \mu \rceil = m$ olsun. $\nu = m - \mu$ diyelim. f nin μ*-inci* mertebeden Caputo benzeri keyfi farkı

$$\Delta_*^{\mu} f(t) = \Delta^{-\nu}(\Delta^m f(t))$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} (\Delta^m f)(s)\,,\ \forall t \in \mathbb{N}_{a+\nu} \qquad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır. Burada Δ^m, *m-inci* mertebeden ileri fark operatörü olup

$$(\Delta^m f)(s) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} f(s+k)$$

dir (Atıcı ve Eloe, 2009).

Uyarı 2.6 $\mu > 0$, m pozitif bir tamsayı olmak üzere $m-1 < \mu < m,\ \lceil \mu \rceil = m$ olsun. Bu durumda $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olmak üzere Teorem 2.6 dan

$$\Delta^{-\nu} \Delta^m f(t) = \Delta^m \Delta^{-\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(\nu-m+k)}}{\Gamma(\nu+k-m+1)} \Delta^k f(a)$$

dir

Böylece $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olmak üzere

$$\Delta_*^{\mu} f(t) = \Delta^m \Delta^{-\nu} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(\nu-m+k)}}{\Gamma(\nu+k-m+1)} \Delta^k f(a)$$

$$\Delta^m \Delta^{-\nu} f(t) = \ \Delta_*^{\mu} f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(\nu-m+k)}}{\Gamma(\nu+k-m+1)} \Delta^k f(a) \qquad (2.6)$$

eşitliği ispatlanmış olur.

Tanım 2.5 $\mu > 0,\ m$ pozitif tamsayı ve $m-1 < \mu < m,\ -\nu = \mu - m$ olmak üzere f nin μ-inci keyfi mertebeden Riemann-Liouville benzeri keyfi farkı

$$\Delta^{\mu} f(t) = \Delta^{m-\nu} f(t) = \Delta^m \big(\Delta^{-\nu} f(t)\big)$$

biçiminde tanımlanır (Anastassiou, 2009).

Uyarı 2.7 (2.5) den

$$\Delta^{\mu} f(t) = \Delta_{*}^{\mu} f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(\nu-m+k)}}{\Gamma(\nu+k-m+1)} \Delta^{k} f(a) \tag{2.7}$$

elde edilir (Anastassiou, 2009).

Teorem 2.8 (Ayrık Taylor Formülü)

$u(k), \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}_a$ ve $n \geq 1$ için

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^{k} u(a) + \frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=a}^{t-n} (t-s-1)^{(n-1)} \Delta^{n} u(s) \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır (Agarval, 2000).

Teorem 2.9 $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı ve $a \in \mathbb{Z}^{+}$, $\mathbb{Z}^{+} = \{0,1,2, \dots\}$ olmak üzere $\mu > 0$, μ tamsayı olmasın, $\lceil \mu \rceil = m$, $\nu = m - \mu$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{N}_{a+m}$ için

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{k!} \Delta^{k} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu} (t-s-1)^{(\mu-1)} \left(\Delta_{*}^{\mu} f\right)(s) \tag{2.9}$$

sağlanır.

Özel olarak $a = 0$ ve $0 < \mu < 1$ alınırsa

$$f(t) = f(0) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=1-\mu}^{t-\mu} (t-s-1)^{(\mu-1)} (\Delta_{*}^{\mu} f)(s) \tag{2.10}$$

eşitliği sağlanır. Burada f , $\mathbb{N}_1$ üzerinde, $\Delta_{*}^{\mu} f$ ise $\mathbb{N}_{1-\mu}$ üzerinde tanımlıdır (Anastassiou, 2009).

Uyarı 2.8 (Teorem 2.6 için) $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mu > p$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta^{p} \left[\Delta^{-\mu} \Delta_{*}^{\mu} f(t)\right] = \Delta^{-(\mu-p)} \Delta_{*}^{\mu} f(t)$$

dir (Anastassiou, 2009).

Teorem 2.10 (Ayrık Caputo tipinde genişletilmiş Taylor formülü)

$f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı, $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p \in \mathbb{N}$, $\mu > p$, $\mu \notin \mathbb{Z}$, $\lceil \mu \rceil = m$ ve $\nu = m - \mu$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{N}_{a+m-p}$ için

$$\Delta^p f(t) = \sum_{k=p}^{m-1} \frac{(t-a)^{(k-p)}}{(k-p)!} \Delta^k f(a) + \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu+p} (t-s-1)^{(\mu-p-1)} \left(\Delta_*^{\mu} f\right)(s) \qquad (2.11)$$

dir (Anastassiou, 2009).

Uyarı 2.9 f nin $[a, b]$ üzerinde tanımlı olduğunu kabul edersek bu durumda $a + m - p < b$ olmak üzere (2.11) sadece $[a + m - p, b]$ için tanımlı olur. (2.8) de $p = 0$ alınırsa (2.9) elde edilir (Anastassiou, 2009).

Önerme 2.1 $\mu > 0$, $\mu \notin \mathbb{Z}$, $\lceil \mu \rceil = m$, $\nu = m - \mu$, $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı, $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $k = 0,1, \dots, m-1$ için $\Delta^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{N}_{a+m}$ için

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu} (t-s-1)^{(\mu-1)} \left(\Delta_*^{\mu} f\right)(s)$$

dir (Anastassiou, 2009).

Önerme 2.2 $\mu > 0$, $\mu \notin \mathbb{Z}$, $\lceil \mu \rceil = m$, $\nu = m - \mu$, $f, \mathbb{N}_a$ üzerinde tanımlı, $a \in \mathbb{Z}^+$ ve $k = p, p+1, \dots, m-1$ için $\Delta^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{N}_{a+m-p}$ için

$$\Delta^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu+p} (t-s-1)^{(\mu-p-1)} \left(\Delta_*^{\mu} f\right)(s)$$

dir (Anastassiou, 2009).

Uyarı 2.10

$$\sum_{s=a+\nu}^{t-\mu} (t-s-1)^{(\mu-1)} = \frac{(t-a-\nu)^{(\mu)}}{\mu}$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 2.2 $a, \nu \in \mathbb{R},\ a, \nu > -1, a > \nu$ ve $a \leq b$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{r=a}^{b} r^{(\nu)} = \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{\Gamma(b+2)}{\Gamma(b-\nu+1)} - \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\nu)}\right) = \left(\frac{(b+1)^{(\nu+1)} - a^{(\nu+1)}}{\nu+1}\right)$$

dir (Anastassiou, 2009).

Lemma 2.3. İki Gamma fonksiyonunun oranının açılımının sonsuzdaki değeri:

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\left[1 + O(\frac{1}{z})\right], (|\arg(z+a)| < \pi, |z| \to \infty)$$

dir (Kilbas vd. 2006).

Lemma 2.4 $\beta < 1,\ \gamma > 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$\left[t^{(-\gamma)}\right]^{\beta} < \frac{\Gamma(1+\beta\gamma)}{\Gamma^{\beta}(1+\gamma)} t^{(-\beta\gamma)}$$

dir (Chen, 2011).

Lemma 2.5 Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} = \frac{\Gamma(t+\nu)}{\nu\Gamma(t)}$$

(Chen vd. 2011).

$l_{n_0}^{\infty}$ uzayı, $\mathbb{Z}_{n_0}$kümesi üzerinde tanımlı $\|x\|_{\infty} = sup_{n=n_0}^{\infty}|x_n|$ supremum normuna göre sınırlı bütün reel dizilerin uzayı olsun. Bu durumda $\left(l_{n_0}^{\infty}, \|.\|_{\infty}\right)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6 Ω, $l_{n_0}^{\infty}$ uzayındaki dizilerin bir kümesi olsun. Verilen $\forall\varepsilon > 0$ ve Ω daki herhangi $x = \{x(n)\}$ için $i, j > N$ alındığında $\left|x_i - x_j\right| < \varepsilon$ kalacak şekilde

N tamsayısı varsa Ω kümesine düzgün Cauchy ya da eş-Cauchy denir (Cheng ve Patula, 1993).

Teorem 2.11 (Ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremi) Ω, $l_{n_0}^{\infty}$ kümesinin sınırlı ve düzgün Cauchy alt kümesi ise Ω göreceli (rölatifli) kompakttır (Cheng ve Patula, 1993).

*Teorem 2.*12 (Krasnoselskii sabit nokta teoremi) Ω, $(S, \|.\|)$ Banach uzayının boş olmayan kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. T_1 ve T_2, Ω yı S ye dönüştüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan iki dönüşüm olsun:

i) $\forall x, y \in \Omega$ için $T_1 x + T_2 y \in \Omega$,

ii) T_1 sürekli ve $T_1\Omega$, S nin kompakt bir alt kümesi tarafından kapsanan bir küme,

iii) T_2, sabiti 1'den küçük bir daralma dönüşüdür.

Bu durumda $T_1 x + T_2 x = x$ olacak şekilde bir $x \in \Omega$ mevcuttur.

Tanım 2.7 Herhangi bir $f: \mathbb{N}_a \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için ∇ geri fark operatörü

$$(\nabla f)(t) \coloneqq f(t) - f(t-1), t \in \mathbb{N}_{a+1}$$

biçiminde tanımlanır (Goodrich ve Peterson, 2015).

Tanım 2.8

(i) m tamsayısı için t nin artan m faktöriyeli

$$t^{\overline{m}} = \prod_{k=0}^{m-1} (t+k), \qquad t^{\overline{0}} = 1,$$

(ii) Herhangi bir α reel sayısı için artan faktöriyel fonksiyonu

$$t^{\overline{\alpha}} = \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)}, t \in \mathbb{R} - \{\ldots -2, -1, 0\}, 0^{\overline{0}} = 1 \quad (2.12)$$

biçiminde tanımlanır (Abdeljavad ve Atıcı, 2012).

Tanım 2.9 $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $\alpha > 0$ olsun. $\rho(s) = s - 1$ olmak üzere f nin α*-inci* mertebeden keyfi toplamı

$$\nabla_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{\alpha-1}} f(s), t \in \mathbb{N}_a \quad (2.13)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\rho(s) = s - 1$ olup $\nabla_a^{-0} f(t) = f(t)$'dir (Abdeljavad ve Atıcı, 2012).

Tanım 2.10 $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ olsun ve N sayısı $N - 1 < \alpha \leq N$ sağlanacak şekilde seçilsin. Bu durumda f nin α-inci mertebeden Caputo anlamında keyfi geri farkı

$$\nabla_{a^*}^{\alpha} f(t) = \nabla_a^{-(N-\alpha)} [\nabla^N f(t)], t \in \mathbb{N}_{a+N} \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlanır. $\alpha = 0$ için $\nabla_{a^*}^{0} f(t) = f(t), t \in \mathbb{N}_a$'dir (Thabet, 2011).

Tanım 2.11 $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}_{a+N}$ ve $\alpha > 0$ olsun. Ayrıca $N \in \mathbb{N}$ sayısı $N - 1 < \alpha < N$ koşulu sağlanacak şekilde seçilmiş olsun. Bu durumda f nin α-inci mertebeden Riemann-Liouville keyfi geri farkı

$$\nabla_a^{\alpha} f(t) = \nabla^{N} \nabla_a^{-(N-\alpha)} f(t) \quad (2.15)$$

biçiminde tanımlanır. $\alpha = 0$ durumunda $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\nabla_a^{0} f(t) = f(t)$$

dir (Thabet, 2011).

Tanım 2.12 $f: \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{N}_1$ ve $0 < v < 1$ olsun. Bu durumda f nin v-inci mertebeden Riemann-Liouville keyfi geri farkı

$$\nabla^{v} f(t) = \nabla\left(\nabla^{-(1-v)}\right) f(t) \tag{2.16}$$

özelliğine sahiptir. $v = 0$ durumunda $t \in \mathbb{N}_1$ için $\nabla_a^0 f(t) = f(t)$ dir.

(2.16) düzenlenirse

$$\nabla^{v} f(t) = \nabla^{-(1-v)} f(t) - \nabla^{-(1-v)} f(t-1) \tag{2.17}$$

elde edilir.

Tanım 2.13 $f: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ olsun. Ayrıca N sayısı $N - 1 < \alpha \leq N$ sağlanacak şekilde seçilmiş olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_{a+N}$ olmak üzere f nin α*-inci* mertebeden keyfi geri farkı

$$\nabla_a^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{-\alpha-1}} f(s), & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \nabla_a^{N} f(t), & \alpha = N \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.18}$$

biçimindedir (Shobanadevi, 2014).

Lemma 2.6 $\alpha > 0$ ve $\mu > -1$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\nabla_a^{-\alpha} (t-a)^{\overline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} (t-a)^{\overline{\alpha+\mu}}$$

dir (Abdeljavad ve Atıcı, 2012).

Lemma 2.7 Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{\alpha-1}} = \frac{\Gamma(t-a+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(t-a)}$$

(Ardjouni vd. 2018).

Lemma 2.8 $h: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $x: \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ dizisinin

$$\nabla_{a^*}^{\alpha} x(t) = h(t), t \in \mathbb{N}_{a+1}, \tag{2.19}$$

$$x(a) = x_0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart x'in

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{\alpha-1}} f(s)\,, t \in \mathbb{N}_a \tag{2.20}$$

biçiminde olmasıdır (Abdeljavad ve Atıcı, 2012).

Tanım 2.14 $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\binom{t}{n}$ genişletilmiş binom katsayısı

$$\binom{t}{n} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-n+1)\Gamma(n+1)} \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 2.9 $m \in \mathbb{N}_1, p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\binom{m-p-1}{m} = (-1)^m \binom{p}{m} \tag{2.22}$$

dir. (Cermak vd. 2012).

Tanım 2.15 $A \in \mathbb{R}$ ve $B: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ bir dizi olmak üzere

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{j=0}^{t} B(t-j)x(j) \tag{2.23}$$

biçimindeki denkleme konvolüsyon tipinde bir Volterra denklemi adı verilir (Elaydi, 2005).

(2.23) denkleminde $x(0)$ başlangıç koşulu bilindiğinde iterasyon ile $x(1), x(2), \ldots$ değerleri bulunabilir. (2.23) denkleminde $x(t+1)$ değeri sadece $x(t)$ değerine bağlı olmayıp, bütün diğer $x(t-1), x(t-2), \ldots, x(0)$ değerlerine de bağlıdır. Bu tür sistemler literatürde kalıtsal(hereditery) sistemler olarak da bilinir.

Tanım 2.16 $x(0) = \phi_0$ başlangıç koşulu ile verilen (2.23) denklemini ele alalım.

(i) Verilen herhangi bir $\phi_0 \in \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{N}_1$için $|x_t| < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ bulunabiliyorsa (2.23) denklemi kararlıdır denir.

(ii) Verilen herhangi bir $\phi_0 \in \mathbb{R}$ için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ ise (2.23) denklemi asimptotik kararlıdır denir.

(Cermak vd. 2012).

Tanım 2.17 m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $t = 0,1, \dots, m$ olmak üzere $x(t) = \phi_t$ başlangıç koşulu ile verilen (2.23) denklemini ele alalım.

(i) $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $t = 0,1, \dots, m$ için $|\phi_t| < \delta$ iken $|x_t| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ mevcut ise (2.23) denklemi düzgün kararlıdır denir.

(ii) (2.23) denklemi düzgün kararlı ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $t = 0,1, \dots, m$ için $|\phi_t| < \eta$ iken $|x(t)| < \varepsilon$, $t \in \mathbb{N}_1$ olmak üzere $t \geq m + N$ sağlanacak şekilde $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_1$ ve $\eta > 0$ mevcut ise (2.23) denklemi düzgün asimptotik kararlıdır denir.

(Cermak vd. 2012).

Tanım 2.18 (3.1) başlangıç değer probleminin bir çözümü $x = \phi(t)$ olsun. Bu durumda

i) $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in \mathbb{R}^+$ verilsin. $t \in \{n_0, n_0 + 1, \dots, 0\}$ için $|\phi(t) - \varphi(t)| < \delta(t_0, \varepsilon)$ iken her $t \geq t_0$ için $|x(t, \varphi, t_0) - \phi(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ mevcut ise (3.1) in $x = \phi(t)$ çözümü kararlıdır,

ii) $\|\varphi\| \leq \eta$ iken $\lim_{t \to \infty} x(t, \varphi, t_0) = 0$ olacak şekilde $\eta(t_0) > 0$ mevcut ise (3.1) in $x = \phi(t)$ çözümü çekimlidir,

iii) Kararlı ve çekimli $x = \phi(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır

denir.

(2.23) biçimindeki sistemlerin kalitatif davranışlarını incelemek için kullanılan en kullanışlı metot Z-dönüşüm metodudur.

Tanım 2.19. Bir $x(t)$ dizisinin Z-dönüşümü, z bir kompleks sayı olmak üzere

$$\tilde{x}(z) = Z\big(x(t)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)z^{-j}$$

olarak tanımlanır (Elaydi, 2005).

Tanım 2.20 $x(t)$ ve $y(t)$ dizilerinin konvolüsyonu

$$x(t) * y(t) = \sum_{j=0}^{t} x(t-j)y(j) \; = \sum_{j=0}^{t} x(t)y(t-j)$$

biçiminde tanımlanır (Elaydi, 2005).

Lemma 2.10 $x(t)$ dizisinin Z-dönüşümü $Z\big(x(t)\big) = \tilde{x}(z)$ olmak üzere,

$$Z\big(x(t+1)\big) = z\tilde{x}(z) - zx(0)$$

dir (Elaydi, 2005).

Tanım 2.20 kullanılarak (2.23) denklemi konvolüsyon biçiminde yazılırsa

$$x(t+1) = Ax(t) + \; B(t) * x(t) \qquad (2.24)$$

elde edilir. Lemma 2.10 kullanılarak (2.24) ün her iki yanının Z-dönüşümü alınırsa

$$z\tilde{x}(z) - zx(0) = A\tilde{x}(z) + \tilde{B}(z)\tilde{x}(z)$$

olur. Bu eşitlikten

$$\tilde{x}(z) = \frac{zx(0)}{z - A - \tilde{B}(z)} \qquad (2.25)$$

elde edilir. (2.25) de

$$g(z) = z - A - \tilde{B}(z) \tag{2.26}$$

olarak alalım. (2.26) daki $g(z)$ kompleks karakteristik fonksiyonu (2.23) denkleminin çözümlerinin kararlılığında önemli bir yere sahiptir.

*Teorem 2.1*3 (2.23) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $|z| \geq 1$ şartını sağlayan tüm z sayıları için

$$z - A - \tilde{B}(z) \neq 0 \tag{2.27}$$

olmasıdır (Elaydi, 2005).

Teorem 2.14 $t \in \mathbb{Z}^+$ için $B(t)$ nin işaret değiştirmediğini kabul edelim. Bu durumda (2.23) nin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olması için gerek şart

$$|A| + \left|\sum_{t=0}^{\infty} B(t)\right| < 1$$

olmasıdır (Elaydi, 2005).

Tanım 2.21 $x: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ olmak üzere x fonksiyonunun geri Laplace dönüşümü $\forall s \in \mathbb{C}$ için

$$\mathcal{L}x(s) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)(1-s)^{k-1} \tag{2.28}$$

biçiminde tanımlanır (Nechvatal, 2014).

Bu tanıma göre geri Laplace dönüşümü $s_0 = 1$ merkezli bir kuvvet serisi olarak ifade edilir. Eğer bu seri $s \neq 1$ olacak şekilde bazı s noktalarında yakınsak ise bu durumda öyle bir $r > 0$ vardır ki, seri $B(s_0, r) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} | \, |z - s_0| < r\}$ açık diskinde yerel mutlak yakınsaktır. Dahası seri açılımı tek türlü belirlenmiş olup $\mathcal{L}x(s)$, $B(1, r)$ açık diskinde analitiktir (Cermak vd. 2013).

Lemma 2.11 $f, g: \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathcal{L}f(s)$ ve $\mathcal{L}g(s)$ sırası ile $B(1, r_f)$ ve $B(1, r_g)$ açık diskleri üzerinde yakınsak olsun. Bu durumda

i) $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere $B(1,1)$ açık diski üzerinde

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\overline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)}\right\}(s) = s^{-\mu-1}$$

dir.

ii) $0 < v < 1$ ve $\nabla^{-(1-v)} f(0)$ değeri tanımlı olmak koşulu ile $B(1,1) \cap B(1, r_f)$ kümesi üzerinde

$$\mathcal{L}\{\nabla^v f\}(s) = s^v \mathcal{L}\{f\}(s) - \nabla^{-(1-v)} f(0) \tag{2.29}$$

dir (Cermak vd. 2013).

Tanım 2.22 Üstel fonksiyonun genelleştirmesi olan *2*-parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu $t \in \mathbb{C},\ \alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.30}$$

kuvvet serisi ile tanımlanır (Podlubny, 1999).

Bu fonksiyon keyfi mertebeden analizde önemli bir yere sahiptir. Özel olarak $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$E^{\lambda}_{\alpha,\beta}(t) \coloneqq t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.31}$$

biçiminde tanımlanan modifiye Mittag-Leffler fonksiyonu

$$D^{\alpha} x(t) = \lambda x(t), t > 0$$

keyfi mertebeden diferensiyel denkleminin çözümüdür. Burada D^{α} Riemann-Liouville anlamında türev operatörü olduğunda $\alpha = \beta$ alınırsa $E^{\lambda}_{\alpha,\alpha}(t)$, ${}_{R-L}D^{\alpha} x(t) = \lambda x(t)$ denkleminin çözümü olur. D^{α} Caputo anlamında türev

operatörü olduğunda $\beta = 1$ alınırsa $E_{\alpha,1}^{\lambda}(t)$, ${}_{C}D^{\alpha}x(t) = \lambda x(t)$ denkleminin çözümü olur (Nechvatal, 2014).

$E_{\alpha,\alpha}^{\lambda}(t)$ ve $E_{\alpha,1}^{\lambda}(t)$ çözümlerinin $Arg(\lambda) > \alpha\frac{\pi}{2}$ koşulu altında $t \to \infty$ iken $E_{\alpha,\alpha}^{\lambda}(t) = O(t^{-1-\alpha})$ ve $E_{\alpha,1}^{\lambda}(t) = O(t^{-})$ asimptotik özellikleri mevcuttur (Podlubny, 1999).

İki parametreli $E_{\alpha,\beta}^{\lambda}(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun ayrık biçimi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.23 $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 < \lambda < 1$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere $E_{\alpha,\beta}^{\lambda}: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}^{\lambda}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k} \frac{t^{\overline{\alpha k+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.32}$$

biçiminde tanımlanır (Nechvatal, 2014).

Uyarı 2.11 Artan faktöriyel fonksiyonunun tanımı ve (2.22) eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\frac{t^{\overline{\alpha k+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = \frac{\Gamma(t+\alpha k+\beta-1)}{\Gamma(t)\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

$$= \binom{t+\alpha k+\beta-2}{t-1}$$

$$= \binom{t-1+\alpha k+\beta-1}{t-1}$$

$$= (-1)^{t-1}\binom{-\alpha k-\beta}{t-1} \tag{2.33}$$

olur. (2.33) göz önünde bulundurulursa (2.31) de verilen iki parametreli ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu binom katsayıları türünden

$$E_{\alpha,\beta}^{\lambda}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (-1)^{t-1} \binom{-k\alpha-\beta}{t-1} \tag{2.34}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 2.24 $d \times d$ tipindeki bir A matrisi için I birim matris olmak üzere $I - A$ matrisinin tersi mevcut ise A matrisine regresiftir denir (Cermak vd. 2013).

Lemma 2.12 $E_{\alpha,\beta}^{A}(t)$ ayrık Mittag-Leffler fonksiyonunun geri Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha,\beta}^{A}(t)\}(s) = s^{\alpha-\beta}(s^{\alpha}I - A)^{-1}$$

dir (Cermak vd. 2013).

3. BİRDEN FAZLA DEĞİŞKEN GECİKMELİ TERİM İÇEREN KEYFİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

Bu bölümde, Boulares vd. (2017) de asimptotik kararlılığı incelenen

$$\Delta_*{}^{\alpha}[x(t)-g(t,x(t-\tau(t)))]=f\big(t+\alpha,x(t+\alpha),x(t+\alpha-\tau(t+\alpha))\big),t\in\mathbb{N}_{1-\alpha}$$
$$x(t)=\phi(t),t\in[m_0,0]\cap\ \mathbb{N}_{m_0}$$

biçimindeki lineer olmayan nötral tipten keyfi mertebeden fark denkleminin daha da genel bir biçimi olan

$$\begin{aligned}&\Delta_*^{\upsilon}\Big(x(t)+g\Big(t,x\big(t-\tau(t)\big)\Big)+h\Big(t,x\big(t-\sigma(t)\big)\Big)\Big)\\&=f\Big(t+\upsilon,x(t+\upsilon),x\big(t+\upsilon-\tau(t+\upsilon)\big),x\big(t+\upsilon-\sigma(t+\upsilon)\big)\Big)\\&t\in\mathbb{N}_{1-\upsilon},0<\upsilon\leq1,x(t)=\varphi(t),t\in\{n_0,n_0+1,\dots,0\}\end{aligned}\tag{3.1}$$

tipindeki birden fazla değişken gecikmeli terim içeren keyfi mertebeden fark denkleminin çözümlerinin kararlılığı incelenmiş, Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremi kullanılarak (3.1) denkleminin çözümlerinin kararlılığı üzerine yeni sonuçlar elde edilmiştir. Burada $n_0=min\left\{\inf_{t\in\mathbb{N}_0}\{t-\tau(t)\},\ \inf_{t\in\mathbb{N}_0}t\{-\sigma(t)\}\right\}$, $\mathbb{N}_t=\{t,t+1,t+2,\dots\}$, $\tau:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$, $\sigma:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$, $t\to\infty$ iken $t-\tau(t)\to\infty$ ve $t\to\infty$ iken $t-\sigma(t)\to\infty$ koşulunu sağlayan değişken gecikme fonksiyonları, $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ x,y,z ye (ikinci, üçüncü ve dördüncü bileşenlere) göre sürekli bir fonksiyon, $g:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $h:[0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&|g(t,x)-g(t,y)|\leq K_1|x-y|,K_1\in(0,\alpha),\\&|h(t,x)-h(t,y)|\leq K_2|x-y|,K_2\in(0,\beta),\ \ 0<\alpha+\beta<1\end{aligned}\tag{3.2}$$

koşulları sağlanacak şekilde K_1 ve K_2 sabitlerinin bulunabildiği x e göre Lipschitz sürekli fonksiyonlardır.

Lemma 3.1. (3.1) keyfi mertebeden fark denklemini ele alalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

a) $x: \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ (3.1) denkleminin bir çözümüdür.
b) $x(t)$,

$$x(t) = x(0) + g\left(0, x\left(-\tau(0)\right)\right) + h\left(0, x\left(-\sigma(0)\right)\right) - g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) - h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right) + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu}(t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right), x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right) \quad (3.3)$$

keyfi mertebeden fark formülünün bir çözümüdür.

İspat. (a)⇒(b) : x, (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. Yani

$$\Delta_*^{\upsilon}\left(x(t) + g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) + h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right)\right)$$
$$= f\left(t+\upsilon, x(t+\upsilon), x\left(t+\upsilon-\tau(t+\upsilon)\right), x\left(t+\upsilon-\sigma(t+\upsilon)\right)\right)$$

olsun. Burada

$$t \in \mathbb{N}_{1-\upsilon}, 0 < \upsilon \leq 1, x(t) = \varphi(t), t \in \{n_0, n_0+1, \dots, 0\}$$

dir.

(2.10) kullanılırsa

$$x(t) + g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) + h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right) = x(0) + g\left(0, x\left(-\tau(0)\right)\right) + h\left(0, x\left(-\sigma(0)\right)\right)$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu}(t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right), x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right)$$

olur. Buradan

$$x(t) = x(0) + g\left(0, x\left(-\tau(0)\right)\right) + h\left(0, x\left(-\sigma(0)\right)\right) - g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) - h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right) + \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu}(t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right), x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla (b) sağlanır.

(b)⇒(a) : $x(t)$ nin (3.3) ün bir çözümü olduğunu varsayalım. (2.5), (2.10) ve (3.3) kullanılarak $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)}\, \Delta_*^{\upsilon} \left(x(t) + g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) + h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(t+\upsilon, x(t+\upsilon), x\left(t+\upsilon-\tau(t+\upsilon)\right), x\left(t+\upsilon-\sigma(t+\upsilon)\right)\right)$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu}(t-s-1)^{(\nu-1)} \left[\Delta_*^{\upsilon}\left(x(t) + g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) + h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right)\right) - f\left(t+\nu, x(t+\nu),\ x\left(t+\nu-\tau(t+\upsilon)\right), x\left(t+\nu-\sigma(t+\upsilon)\right)\right)\right] = 0 \qquad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) de $t = 1$ yazılırsa

$$(\nu-1)^{(\nu-1)} \left[\Delta_*^{\upsilon}\left(x(1-\upsilon) + g\left(1-\upsilon, x\left(1-\upsilon-\tau(1-\upsilon)\right)\right) + h\left(1-\upsilon, x\left(1-\upsilon-\sigma(1-\upsilon)\right)\right)\right) - f\left(1-\upsilon+\nu, x(1-\upsilon+\nu), x\left(1-\upsilon+\nu-\tau(1-\upsilon+\upsilon)\right), x\left(1-\upsilon+\nu-\sigma(1-\upsilon+\upsilon)\right)\right)\right] = 0$$

elde edilir. $(\nu-1)^{(\nu-1)} = \frac{\Gamma(\nu-1+1)}{\Gamma(\nu-1-(\nu-1)+1)} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1)} > 0$ olduğundan son eşitlikten

$$\Delta_*^{\upsilon}\left(x(1-\upsilon)+g\left(1-\upsilon,x\left(1-\upsilon-\tau(1-\upsilon)\right)\right)+h\left(1-\upsilon,x\left(1-\upsilon-\sigma(1-\upsilon)\right)\right)\right) - f\left(1-\upsilon+\upsilon,x(1-\upsilon+\upsilon),x\left(1-\upsilon+\upsilon-\tau(1-\upsilon+\upsilon)\right),x\left(1-\upsilon+\upsilon-\sigma(1-\upsilon+\upsilon)\right)\right)=0 \qquad (3.5)$$

olur. (3.5) den

$$\Delta_*^{\upsilon}\left(x(1-\upsilon)+g\left(1-\upsilon,x\left(1-\upsilon-\tau(1-\upsilon)\right)\right)+h\left(1-\upsilon,x\left(1-\upsilon-\sigma(1-\upsilon)\right)\right)\right) = f\left(1-\upsilon+\upsilon,x(1-\upsilon+\upsilon),x\left(1-\upsilon+\upsilon-\tau(1-\upsilon+\upsilon)\right),x\left(1-\upsilon+\upsilon-\sigma(1-\upsilon+\upsilon)\right)\right) \qquad (3.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.4) de $t = 2$ yazılırsa

$$\nu^{(\nu-1)} \left\{\Delta_*^{\upsilon}\left(x(1-\upsilon) + g\left(1-\upsilon, x\left(1-\upsilon-\tau(1-\upsilon)\right)\right) + h\left(1-\upsilon, x\left(1-\upsilon-\sigma(1-\upsilon)\right)\right)\right) - f\left(1-\upsilon+\upsilon, x(1-\upsilon+\upsilon), x\left(1-\upsilon+\upsilon-\tau(1-\upsilon+\upsilon)\right), x\left(1-\upsilon+\upsilon-\sigma(1-\upsilon+\upsilon)\right)\right)\right\}$$

$$+(\nu-1)^{(\nu-1)}\left\{\Delta_*^{\upsilon}\left(x(2-\upsilon)+g\left(2-\upsilon,x\left(2-\upsilon-\tau(2-\upsilon)\right)\right)+h\left(2-\upsilon,x\left(2-\upsilon-\sigma(2-\upsilon)\right)\right)\right)\right.$$
$$\left.-f\left(2-\upsilon+\upsilon,x(2-\upsilon+\upsilon),x\left(2-\upsilon+\upsilon-\tau(2-\upsilon+\upsilon)\right),x\left(2-\upsilon+\upsilon-\sigma(2-\upsilon+\upsilon)\right)\right)\right\}=0$$

elde edilir. Burada

$$\nu^{(\nu-1)}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-(\nu-1)+1)}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2)}>0$$

olduğundan (3.6) göz önünde bulundurulduğunda

$$\Delta_*^{\upsilon}\left(x(2-\upsilon)+g\left(2-\upsilon,x\left(2-\upsilon-\tau(2-\upsilon)\right)\right)+h\left(2-\upsilon,x\left(2-\upsilon-\sigma(2-\upsilon)\right)\right)\right)$$
$$=f\left(2-\upsilon+\upsilon,x(2-\upsilon+\upsilon),x\left(2-\upsilon+\upsilon-\tau(2-\upsilon+\upsilon)\right),x\left(2-\upsilon+\upsilon-\sigma(2-\upsilon+\upsilon)\right)\right)$$

olduğu görülür. Böylece tümevarım ile $t\in\mathbb{N}_{1-\upsilon}$ için

$$\Delta_*^{\upsilon}\left(x(t)+g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)+h\left(t,x\left(t-\sigma(t)\right)\right)\right)$$
$$=f\left(t+\upsilon,x(t+\upsilon),x\left(t+\upsilon-\tau(t+\upsilon)\right),x\left(t+\upsilon-\sigma(t+\upsilon)\right)\right)$$

olduğu görülür. Bu ise $x(t)$ nin (3.1) in bir çözümü olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.1 i kullanarak $\Delta^{-\nu}t^{(-\nu)}=\frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(-\nu+\nu+1)}t^{(-\nu+\nu)}=\frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(1)}t^{(0)}=\Gamma(-\nu+1).1$ elde edilir. Buradan

$$1=t^{(0)}=\Delta^{-\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}t^{(-\nu)}\right)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu}(t-s-1)^{(\nu-1)}\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}t^{(-\nu)} \quad (3.7)$$

bulunur.

$$\psi_0=x(0)+g\left(0,x\left(-\tau(0)\right)\right)+h\left(0,x\left(-\sigma(0)\right)\right)-g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)-h\left(t,x\left(t-\sigma(t)\right)\right) \quad (3.8)$$

olmak üzere (3.7) göz önünde bulundurulduğunda (3.3) denklemi aşağıdaki ifadeye denk olur.

$$x(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} [\frac{\psi_0}{\Gamma(-v+1)} (s+v)^{(-v)}$$

$$+f\left(s+v, x(s+v), x\big(s+v-\tau(s+v)\big), x\big(s+v-\sigma(s+v)\big)\right)]. \quad (3.9)$$

Ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremi ve Krasnoselskii sabit nokta teoremi kullanılarak (3.1) başlangıç değer probleminin çözümlerinin karalılığını ele almak için T_1 , T_2 ve $T: l_{n_0}^{\infty} \to l_{n_0}^{\infty}$ operatörlerini,

$$T_1x(t) = \varphi(0) + g\left(0, \varphi\big(-\tau(0)\big)\right) + h\left(0, \varphi\big(-\sigma(0)\big)\right) - g\left(t, x\big(t-\tau(t)\big)\right) - h\left(t, x\big(t-\sigma(t)\big)\right),$$

$$T_2x(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} f\left(s+v, x(s+v), x\big(s+v-\tau(s+v)\big), x\big(s+v-\sigma(s+v)\big)\right),$$

$$Tx(t) = \varphi(t), t \in \{n_0, n_0+1, \dots, 0\},$$

$$Tx(t) = T_1x(t) + T_2x(t), t \in \mathbb{N}_1 \quad (3.10)$$

biçiminde tanımlayalım.

Lemma 3.2 (3.2) nin sağlandığını ve $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$|\varphi(0)| + \left|g\big(0, x(-\tau(0))\big)\right| + \left|h\big(0, x(-\sigma(0))\big)\right| + (K_1+K_2)M_1t^{(-m_1)} + \frac{1}{\Gamma(v)} \left|\sum_{s=1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} f\big(s+v, x(s+v), x\big(s+v-\tau(s+v)\big), x\big(s+v-\sigma(s+v)\big)\big)\right| \leq M_1t^{(-m_1)} \quad (3.11)$$

sağlanacak şekilde pozitif M_1 ve m_1 sabitlerinin mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin $t \in \mathbb{N}_1$ için en az bir çözümü vardır.

İspat.

$$S_1 = \left\{x(t) | x \in l_{n_0}^{\infty}, t \in \{n_0, n_0+1, \dots, 0\} \text{ için } x(t) = \varphi(t), t \in \mathbb{N}_1 \text{ için } |x(t)| \leq M_1t^{(-m_1)}\right\}$$

kümesini tanımlayalım. S_1, $l_{n_0}^{\infty}$ uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. Lemma 2.3 den $t \in \mathbb{N}_1$ ve $t \to \infty$ iken $t^{(-m_1)} \to 0$ dir.

Öncelikle T nin S_1 i S_1 e dönüştürdüğünü gösterelim. $t \in \mathbb{N}_1$ için (3.2) ve (3.11) göz önünde bulundurulursa $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$
\begin{aligned}
|Tx(t)| &= \Big|\varphi(0) + g\Big(0, \varphi\big(-\tau(0)\big)\Big) + h\Big(0, \varphi\big(-\sigma(0)\big)\Big) - g\Big(t, x\big(t-\tau(t)\big)\Big) - h\Big(t, x\big(t-\sigma(t)\big)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \\
&\le |\varphi(0)| + \Big|g\Big(0, \varphi\big(-\tau(0)\big)\Big)\Big| + \Big|h\Big(0, \varphi\big(-\sigma(0)\big)\Big)\Big| + \Big|g\Big(t, x\big(t-\tau(t)\big)\Big)\Big| + \Big|h\Big(t, x\big(t-\sigma(t)\big)\Big)\Big| \\
&\quad + \tfrac{1}{\Gamma(\nu)} \Big|\textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \\
&\le |\varphi(0)| + \Big|g\Big(0, \varphi\big(-\tau(0)\big)\Big)\Big| + \Big|h\Big(0, \varphi\big(-\sigma(0)\big)\Big)\Big| + (K_1 + K_2) M_1 t^{(-m_1)} \\
&\quad + \tfrac{1}{\Gamma(\nu)} \Big|\textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \\
&\le M_1 t^{(-m_1)}
\end{aligned}
$$

olur. Bu da $TS_1 \subset S_1$ olduğunu gösterir.

Şimdi T_2 nin S_1 üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken $t^{(-m_1)} \to 0$ olduğundan, öyle bir $k_1 \in \mathbb{N}_1$ vardır ki $\forall t > k_1$ için $t^{(-m_1)} < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $x_n \in S_1$ ve $x_n \to x$ olsun. $t \in \{1,2,\dots,k_1\}$ için f nin sürekliliği ile (3.11) ve Lemma 2.5 göz önünde bulundurulursa, $n \to \infty$ iken

$$
\begin{aligned}
&|T_2 x_n(t) - T_2 x(t)| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \Big|f\Big(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big) \\
&\qquad - f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \\
&\le \max_{s\in\{1-\nu,2-\nu,\dots,k_1-\nu\}} \Big|f\Big(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big) \\
&\qquad - f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \\
&= \frac{\Gamma(t+\upsilon)}{\Gamma(\upsilon)\upsilon\Gamma(t)} \max_{s\in\{1-\nu,2-\nu,\dots,k_1-\nu\}} \Big|f\Big(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big) \\
&\qquad - f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \\
&\le \frac{\Gamma(k_1+\upsilon)}{\Gamma(\upsilon+1)\Gamma(k_1)} \max_{s\in\{1-\nu,2-\nu,\dots,k_1-\nu\}} \Big|f\Big(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big) \\
&\qquad - f\Big(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\Big)\Big| \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

olur. $t \in \{k_1+1,\ k_1+2, \dots\}$ için

$$
\begin{aligned}
&|T_2x_n(t) - T_2x(t)| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\le \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{N}_1$ için $n \to \infty$ iken $|T_2x_n(t) - T_2x(t)| \to 0$ olur. Böylelikle T_2 dönüşümünün sürekli olduğu gösterilmiştir.

Şimdi T_2S_1 in göreceli kompakt olduğunu gösterelim. $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_1$ ve $t_2 > t_1 \ge k_1$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&|T_2x(t_2) - T_2x(t_1)| \\
&\quad = \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t_2-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t_1-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\quad \le \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t_2-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\qquad + \left| \tfrac{1}{\Gamma(\nu)} \textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t_1-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\quad \le M_1 t^{(-m_1)} + M_1 t^{(-m_1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Böylelikle $\{T_2x |\ x \in S_1\}$ kümesinin sınırlı ve düzgün Cauchy alt küme olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla Arzela-Ascoli daralma teoreminden T_2S_1 göreceli kompakttır.

Son olarak T_1 in bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $x, y \in S_1$ için

$$
\begin{aligned}
&|T_1x(t) - T_1y(t)| \\
&= \left|-g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) - h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right) + g\left(t, y\left(t-\tau(t)\right)\right) + h\left(t, y\left(t-\sigma(t)\right)\right)\right| \\
&\leq \left|g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) - g\left(t, y\left(t-\tau(t)\right)\right) + \right| + \left|h\left(t, x\left(t-\sigma(t)\right)\right) - h\left(t, y\left(t-\sigma(t)\right)\right)\right| \\
&\leq K_1|x-y| + K_2|x-y| = (K_1+K_2)|x-y|
\end{aligned}
$$

olur. Yani

$$\|T_1x(t) - T_1y(t)\| \leq (K_1+K_2)|x-y|$$

bulunur. $0 < K_1 + K_2 < 1$ olduğundan dolayı T_1 in bir daralma dönüşümü olduğu görülür.

Krasnoselskii sabit nokta teoremine göre T nin S_1 de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (3.1) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1 (3.1) ve (3.11) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri çekimlidir.

İspat. Lemma 3.2 ye göre (3.1) denkleminin S_1 kümesi içinde en az bir çözümü mevcuttur. S_1 deki her $x(t)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğundan $x(t)$ çözümü çekimlidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2 (3.2) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca $t \in \mathbb{N}_{1-\upsilon}$ için

$$\left|f\left(t+\upsilon, x(t+\upsilon), x\left(t+\upsilon-\tau(t+\upsilon)\right), x\left(t+\upsilon-\sigma(t+\upsilon)\right)\right) -\right.$$

$$\left. f\left(t+\upsilon, y(t+\upsilon), y\left(t+\upsilon-\tau(t+\upsilon)\right), y\left(t+\upsilon-\sigma(t+\upsilon)\right)\right)\right|$$

$$\leq M_2(t+\upsilon)^{(-m_2)}\|x-y\| \qquad (3.12)$$

olacak şekilde $m_2 \in (\upsilon, 1)$ ve $M_2 > 0$ mevcut olsun. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin kararlı olması için gerek şart

$$c = \frac{M_2\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)\Gamma(2-v+m_2)} + K_1 + K_2 < 1 \tag{3.13}$$

olmasıdır.

İspat. $x(t)$ (3.1) denkleminin bir çözümü ve $y(t)$ de (3.1) denkleminin $t \in \{n_0, n_0+1, \dots, 0\}$ için $y(t) = \tilde{\varphi}(t)$ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü olsun. $t \in \mathbb{N}_1$ için (3.2) ve (3.12) koşulları ile Lemma 2.1 göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
&|x(t) - y(t)| \\
&\le |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| + \left|g\left(0, \varphi(-\tau(0))\right) - g\left(0, \tilde{\varphi}(-\tau(0))\right)\right| + \left|h\left(0, \varphi(-\sigma(0))\right) - h\left(0, \tilde{\varphi}(-\sigma(0))\right)\right| \\
&\quad + \left|g\left(t, x(t-\tau(t))\right) + g\left(t, y(t-\tau(t))\right)\right| + \left|h\left(t, x(t-\sigma(t))\right) + h\left(t, y(t-\sigma(t))\right)\right| \\
&\quad + \tfrac{1}{\Gamma(v)}\textstyle\sum_{s=1-v}^{t-v}(t-s-1)^{(v-1)} \left|f\left(s+v, x(s+v), x\big(s+v-\tau(s+v)\big), x\big(s+v-\sigma(s+v)\big)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - f\left(s+v, y(s+v), y\big(s+v-\tau(s+v)\big), y\big(s+v-\sigma(s+v)\big)\right)\right| \\
&\le |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| + K_1\left|\varphi\big(-\tau(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\tau(0)\big)\right| + K_2\left|\varphi\big(-\sigma(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\sigma(0)\big)\right| \\
&\quad + K_1\|x-y\| + K_2\|x-y\| + \tfrac{M_2}{\Gamma(v)}\textstyle\sum_{s=1-v}^{t-v}(t-s-1)^{(v-1)}\,(s+v)^{(-m_2)}\|x-y\| \\
&= |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| + K_1\left|\varphi\big(-\tau(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\tau(0)\big)\right| + K_2\left|\varphi\big(-\sigma(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\sigma(0)\big)\right| \\
&\quad + K_1\|x-y\| + K_2\|x-y\| + M_2\|x-y\|\Delta^{-v}t^{(-m_2)} \\
&= |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| + K_1\left|\varphi\big(-\tau(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\tau(0)\big)\right| + K_2\left|\varphi\big(-\sigma(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\sigma(0)\big)\right| \\
&\quad + K_1\|x-y\| + K_2\|x-y\| + M_2\|x-y\|\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)}t^{(v-m_2)} \\
&= |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| + K_1\left|\varphi\big(-\tau(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\tau(0)\big)\right| + K_2\left|\varphi\big(-\sigma(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\sigma(0)\big)\right| \\
&\quad + \left(K_1 + K_2 + M_2\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)}t^{(v-m_2)}\right)\|x-y\| \\
&\le |\varphi(0) - \tilde{\varphi}(0)| + K_1\left|\varphi\big(-\tau(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\tau(0)\big)\right| + K_2\left|\varphi\big(-\sigma(0)\big) - \tilde{\varphi}\big(-\sigma(0)\big)\right| \\
&\quad + \left(K_1 + K_2 + M_2\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)}1^{(v-m_2)}\right)\|x-y\| \\
&\le (1 + K_1 + K_2)\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \left(K_1 + K_2 + M_2\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)}1^{(v-m_2)}\right)\|x-y\| \\
&= (1 + K_1 + K_2)\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + \left(K_1 + K_2 + M_2\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)\Gamma(2-v+m_2)}\right)\|x-y\| \\
&= (1 + K_1 + K_2)\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + c\|x-y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın supremum normu alınırsa

$$\|x-y\| < (1 + K_1 + K_2)\|\varphi - \tilde{\varphi}\| + c\|x-y\|,$$

olur. Buradan

$$\|x-y\| < \frac{1+K_1+K_2}{1-c}\|\varphi-\tilde{\varphi}\|$$

elde edilir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{1-c}{1+K_1+K_2}\varepsilon$ seçilirse $\|\varphi-\tilde{\varphi}\| < \delta$ olduğunda $\|x-y\| < \varepsilon$ sağlanır. Böylece (3.12) ve (3.13) koşulları sağlandığında (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri kararlı olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3 (3.2), (3.11) ve (3.12) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.13) koşulu altında (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.3, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 nin bir sonucudur.

Lemma 3.3 (3.2) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca s$\in \mathbb{N}_{1-\upsilon}$ ve $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$\left|\frac{\varphi(0)+g\left(0,\varphi(-\tau(0))\right)+h\left(0,\varphi(-\sigma(0))\right)-g\left(t,x(t-\tau(t))\right)-h\left(t,x(t-\sigma(t))\right)}{\Gamma(1-\upsilon)}(s+\upsilon)^{(-\upsilon)}+\right.$$
$$\left. f\left(s+\upsilon,x(s+\upsilon),x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right),x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right)\right|$$
$$\leq M_3(s+\upsilon)^{(-m_3)} \qquad (3.14)$$

koşulu sağlanacak şekilde $m_3 \in (\upsilon, 1)$ ve $M_3 > 0$ sabitleri mevcut olsun. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin $t \in \mathbb{N}_1$ için en az bir çözümü vardır.

İspat.

$$S_2 = \left\{x(t) | x \in l_{n_0}^{\infty} \in \{n_0, n_0+1, \dots, 0\}\ için\ x(t) = \varphi(t), t \in \mathbb{N}_1\ için\ |x(t)| \leq \frac{M_3\Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+\upsilon-m_3)}t^{(\upsilon-m_3)}\right\}$$

kümesini tanımlayalım. S_2 nin tanımındaki koşuldan dolayı S_2, $l_{n_0}^{\infty}$ un kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir.

Öncelikle T nin S_2 yi S_2 ye dönüştürdüğünü gösterelim.(3.8), (3.9), (3.14) ve Lemma 2.1 göz önünde bulundurulursa, $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$
\begin{aligned}
|Tx(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \left[\frac{\psi_0}{\Gamma(-\nu+1)} (s+\nu)^{(-\nu)} \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right] \right| \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(\nu)} \textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \left| \frac{\psi_0}{\Gamma(-\nu+1)} (s+\nu)^{(-\nu)} \right. \\
&\qquad \left. + f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right) \right| \\
&= \frac{M_3}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} (s+\upsilon)^{(-m_3)} \\
&= M_3 \Delta^{-\upsilon} t^{(-m_3)} \\
&= \frac{M_3 \Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+\nu-m_3)} t^{(\upsilon-m_3)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da $TS_2 \subset S_2$ olduğunu gösterir.

Şimdi T_2 nin S_2 üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken $t^{(-m_3)} \to \infty$ olduğundan öyle bir $k_2 \in \mathbb{N}_1$ vardır ki $\forall t > k_2$ için $\frac{M_3 \Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+\nu-m_3)} t^{(\upsilon-m_3)} < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $x_n \in S_2$ ve $x_n \to x$ olsun. f nin sürekliliği ve Lemma 2.5 göz önünde bulundurulursa $t \in \{1,2,\dots,k_2\}$ için $n \to \infty$ iken

$$
\begin{aligned}
&|T_2 x_n(t) - T_2 x(t)| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \left| f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\qquad \left. - f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\leq \max_{s\in\{1-\nu,2-\nu,\dots,k_2-\nu\}} \left| f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\qquad \left. - f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \\
&= \frac{\Gamma(t+\upsilon)}{\Gamma(\upsilon)\upsilon\Gamma(t)} \max_{s\in\{1-\nu,2-\nu,\dots,k_2-\nu\}} \left| f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\qquad \left. - f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\leq \frac{\Gamma(k_2+\upsilon)}{\Gamma(\upsilon+1)\Gamma(k_2)} \max_{s\in\{1-\nu,2-\nu,\dots,k_2-\nu\}} \left| f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\qquad \left. - f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

olur. $t \in \{k_2+1,\ k_2+2, \dots\}$ için $n \to \infty$ iken

$$
\begin{aligned}
&|T_2x_n(t) - T_2x(t)| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x_n(s+\upsilon), x_n\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x_n\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\leq \tfrac{2M_3}{\Gamma(\nu)} \textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} (s+\upsilon)^{(-m_3)} \\
&= 2M_3 \Delta^{-\upsilon} t^{(-m_3)} \\
&\leq \frac{2M_3 \Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+\nu-m_3)} t^{(\upsilon-m_3)} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{N}_1$ için $n \to \infty$ iken $|T_2x_n(t) - T_2x(t)| \to 0$ olur. Bu T_2 nin sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi T_2S_2 in göreceli kompakt olduğunu gösterelim. $t_3, t_4 \in \mathbb{N}_1$ ve $t_4 > t_3 \geq k_2$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&|T_2x(t_4) - T_2x(t_3)| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t_4-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t_3-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t_4-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\quad + \left| \tfrac{1}{\Gamma(\nu)} \textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t_3-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\big(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\big), x\big(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\big)\right)\right| \\
&\leq \tfrac{2M_3}{\Gamma(\nu)} \textstyle\sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} (s+\upsilon)^{(-m_3)} \\
&= 2M_3 \Delta^{-\upsilon} t^{(-m_3)} \\
&\leq \frac{2M_3 \Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+\nu-m_3)} t^{(\upsilon-m_3)} < \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylelikle $\{T_2x|\ x \in S_2\}$ kümesinin sınırlı ve düzgün Cauchy alt küme olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla Arzela-Ascoli daralma teoremine göre T_2S_2 göreceli kompakttır. T_1 in bir daralma dönüşümü olduğunun ispatı Lemma 3.2 ile benzerdir. Krasnoselskii sabit nokta teoremine göre T nin S_2 de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (3.1) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4 (3.2) ve (3.14) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri çekimlidir.

İspat. Lemma 3.3 e göre (3.1) denkleminin S_2 kümesi içinde çözümleri mevcuttur. S_2 deki her $x(t)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğundan $x(t)$ çözümü çekimlidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.5 (3.2), (3.12) ve (3.14) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.13) koşulu altında (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.4 ve Teorem 3.2 yardımıyla ispat kolaylıkla elde edilir.

Lemma 3.4 (3.2) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca s$\in \mathbb{N}_{1-\upsilon}$ ve $t \in \mathbb{N}_1$ için

$$\left|\frac{\varphi(0)+g\left(0,\varphi(-\tau(0))\right)+h\left(0,\varphi(-\sigma(0))\right)-g\left(t,x(t-\tau(t))\right)-h\left(t,x(t-\sigma(t))\right)}{\Gamma(1-\upsilon)}(s+\upsilon)^{(-\upsilon)}\right.$$
$$\left.+\,f\left(s+\upsilon,x(s+\upsilon),x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right),x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right)\right|$$
$$\leq M_4|x(s+\upsilon)|^{(\gamma)} \qquad (3.15)$$

koşulu sağlanacak şekilde $\gamma > \frac{1}{1-\upsilon}$ ve $M_4 > 0$ sabitleri mevcut olsun. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin $t \in \mathbb{N}_1$ için en az bir çözüme sahip olması için gerek şart

$$\frac{M_4\Gamma(1+\gamma m_4)\Gamma(1-\gamma m_4)}{\Gamma^{\gamma}(1+m_4)\Gamma(1+\upsilon-\gamma m_4)} \leq 1 \qquad (3.16)$$

olmasıdır. Burada

$$\frac{\upsilon}{\gamma-1} < m_4 < \frac{1}{\gamma} \tag{3.17}$$

dir.

İspat. $\gamma > \frac{1}{1-\upsilon}$ olduğundan $\gamma - \gamma\upsilon > 1$ olup buradan $\frac{1}{\gamma} > \frac{\upsilon}{\gamma-1}$ elde edilir. Bu durumda Arşimed prensibi gereği $\frac{\upsilon}{\gamma-1} < m_4 < \frac{1}{\gamma}$ olacak şekilde bir m_4 reel sayısı vardır. $m_4 < \frac{1}{\gamma}$ olduğunda $1 - m_4\gamma > 0$ olacağından $\Gamma(1 - m_4\gamma) > 0$ olur. $\frac{\upsilon}{\gamma-1} < m_4$ olduğundan $\upsilon - \gamma m_4 < -m_4$ olur.

$S_3 = \{x(t) | x \in l_{n_0}^{\infty}, t \in \{n_0, n_0+1, \dots, 0\}$ için $x(t) = \varphi(t), t \in \mathbb{N}_1$ için $|x(t)| \leq t^{(-m_4)}\}$

kümesini tanımlayalım. T nin S_3 kümesinde bir sabit noktaya sahip olduğunu göstereceğiz. S_3, $l_{n_0}^{\infty}$ uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. $t \in \mathbb{N}_1$ için (3.15), Lemma 2.4, Lemma 2.1 ve (3.16) göz önünde bulundurulursa

$$|Tx(t)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \left[\frac{\varphi(0) + g\left(0, \varphi(-\tau(0))\right) + h\left(0, \varphi(-\sigma(0))\right) - g\left(t, x(t-\tau(t))\right) - h\left(t, x(t-\sigma(t))\right)}{\Gamma(-\nu+1)} (s+\upsilon)^{(-\nu)} \right.\right.$$
$$\left.\left. + f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right), x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right) \right] \right|$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} \left| \frac{\varphi(0) + g\left(0, \varphi(-\tau(0))\right) + h\left(0, \varphi(-\sigma(0))\right) - g\left(t, x(t-\tau(t))\right) - h\left(t, x(t-\sigma(t))\right)}{\Gamma(-\nu+1)} (s+\upsilon)^{(-\nu)} \right.$$
$$\left. + f\left(s+\upsilon, x(s+\upsilon), x\left(s+\upsilon-\tau(s+\upsilon)\right), x\left(s+\upsilon-\sigma(s+\upsilon)\right)\right) \right|$$
$$\leq \frac{M_4}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} |x(s+\upsilon)|^{(\gamma)}$$
$$\leq \frac{M_4}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} [(s+\upsilon)^{-m_4}]^{\gamma}$$
$$\leq \frac{M_4\, \Gamma(1+\gamma m_4)}{\Gamma(\nu)\Gamma^{\gamma}(1+m_4)} \sum_{s=1-\nu}^{t-\nu} (t-s-1)^{(\nu-1)} (s+\upsilon)^{-\gamma m_4}$$
$$= \frac{M_4\, \Gamma(1+\gamma m_4)}{\Gamma^{\gamma}(1+m_4)} \Delta^{-\nu} t^{(-\gamma m_4)}$$
$$= \frac{M_4\, \Gamma(1+\gamma m_4)\Gamma(1-\gamma m_4)}{\Gamma^{\gamma}(1+m_4)\Gamma(1+\upsilon-\gamma m_4)} t^{(\upsilon-\gamma m_4)}$$

$\leq t^{(\upsilon-\gamma m_4)}$

$\leq t^{(-m_4)}$

elde edilir. Bu da $TS_3 \subset S_3$ olduğunu gösterir.T_2 nin S_3 üzerinde sürekliliği, T_2S_3 ün rölatifli kompakt bir alt küme olması ve T_1 in S_3 üzerinde bir daralma dönüşümü olmasının ispatları lemma 3.2 deki ispatlara benzer olduğu için bu ispatlara burada yer verilmemiştir.

Teorem 3.6. (3.2) ve (3.15) ve (3.16) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri çekimlidir.

İspat. Lemma 3.4 e göre (3.1) denkleminin S_3 kümesi içinde çözümleri mevcuttur. S_3 deki her $x(t)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğundan $x(t)$ çözümü çekimlidir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.7 (3.2), (3.12) ve (3.15) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.12) ve (3.15) koşulu altında (3.1) başlangıç değer probleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.2 ve Teorem 3.6 yardımıyla ispat kolaylıkla elde edilir.

4. NICHOLSON KURT SİNEĞİ MODELİ TİPİNDEKİ KEYFİ MERTEBEDEN GERİ FARK DENKLEMİNİN BİR SINIFININ ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIĞI

Gurney vd. (1980), lineer olmayan otonom

$$x'(t) = -ax(t) + \beta x(t-\tau)e^{-\lambda x(t-\tau)} \tag{4.1}$$

denklemini, Nicholson, (1980) de elde ettiği deneysel veriler ışığında Avusturalya'da yaşayan koyunlardaki kurt sineklerinin popülasyonunu ifade etmek için önerdi. (4.1) denkleminin global çekimliliği ile ilgili yapılan çalışmalardan bazıları için Kulonovic vd. (1989), Li (1996) ve So ve Yu (1995) çalışmaları incelenebilir. Yakın zamanda Alzabut vd. (2012)

$$\Delta x(n) = -\alpha(n)x(n+1) + \beta(n)x\big(n-\tau(n)\big)e^{-\gamma(n)x\left(n-\tau(n)\right)} - H(n)x(n-\sigma(n))$$

biçimindeki gecikmeli fark denkleminin periyodik çözümlerinin varlığı ve üstel yakınsaklığı için yeter şartları ortaya koymuşlardır. Burada $n \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \tau, \sigma, H: \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ hemen hemen periyodik dizilerdir.

Bu bölümde $0 < \upsilon < 1$ olmak üzere Mohan vd. (2014) nin incelediği

$$\nabla_{a^*}^{\upsilon} x(t) = f\big(t, x(t)\big), t \in \mathbb{N}_{a+1}$$

$$x(a) = x_0$$

biçimindeki υ *−inci* mertebeden Caputo geri fark denkleminden esinlenerek

$$\nabla_{a^*}^{\upsilon}\left[x(t) + \sum_{j=1}^{m} h_j\left(t, x\big(t-\sigma_j(t)\big)\right)\right] = \alpha x(t) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\big(t-\sigma_j(t)\big)e^{-\gamma x\left(t-\sigma_j(t)\right)} \tag{4.2}$$
$$t \in \mathbb{N}_{a+1}, 0 < \upsilon < 1,\ x(t) = \varphi(t),\ t \in [n_0, a] \cap \mathbb{N}_{n_0}$$

biçimindeki Nicholson un kurt sineği modeli tipinde keyfi mertebeden geri fark denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı incelenmiştir. Burada $a \in \mathbb{R}^+$,

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $n_0 = \min_{j \in N} \left\{ \inf_{t \in \mathbb{N}_a} \{t - \sigma_j(t)\} \right\}$, $N = \{1,2, \dots, m\}$, $\mathbb{N}_v = \{v, v+1, v+2, \dots\}$, $j \in N$ için $\sigma_j : \mathbb{N}_a \to \mathbb{N}_a$, $t \to \infty$ iken $t - \sigma_j(t) \to \infty$, $h_j : \mathbb{N}_a \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ikinci değişkene göre Lipschitz sürekli fonksiyonlar yani

$$\left|h_j(t,x) - h_j(t,y)\right| < K_j|x-y|, h_j(t,0) = 0,\ j \in N,\ \sum_{j=1}^{m} K_j < 1 \tag{4.3}$$

koşulu sağlanacak şekilde $K_1, K_2, \dots, K_m \in (0,1)$ sabitlerinin bulunabileceği varsayılan fonksiyonlardır.

Lemma 4.1. $x : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ dizisinin (4.1) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart x in

$$x(t) = \varphi(a) + \sum_{j=1}^{m} h_j\left(a, \varphi\left(t - \sigma_j(a)\right)\right) - \sum_{j=1}^{m} h_j\left(t, x\left(t - \sigma_j(t)\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left[\alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\left(s - \sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s - \sigma_j(s)\right)}\right], t \in \mathbb{N}_a$$

biçiminde olmasıdır.

İspat. Lemma 4.1 Lemma 2.8 in bir sonucudur.

T_1 ve T_2 operatörlerini,

$$T_1 x(t) = \varphi(a) + \sum_{j=1}^{m} h_j\left(a, \varphi\left(t - \sigma_j(a)\right)\right) - \sum_{j=1}^{m} h_j\left(t, x\left(t - \sigma_j(t)\right)\right), \tag{4.4}$$

$$T_2 x(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left[\alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\left(s - \sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s - \sigma_j(s)\right)}\right] \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlayalım. $T : l_{n_0}^{\infty} \to l_{n_0}^{\infty}$ operatörünü

$$Tx(t) = \varphi(t),\ t \in [n_0, a] \cap \mathbb{N}_{n_0},$$

$$Tx(t) = T_1 x(t) + T_2 x(t), t \in \mathbb{N}_{a+1} \tag{4.6}$$

biçiminde tanımlarsak x in (4.6) ile verilen operatörün bir sabit noktası olması durumunda (4.2) denkleminin de bir çözümü olacağı açıktır.

Lemma 4.2. (4.3) koşulu sağlansın. $t \in \mathbb{N}_{a+1}$için

$$\begin{aligned}&|\varphi(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|+M_1\sum_{j=1}^{m}K_j(t-a)^{\overline{-m_1}}\\&+\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[|\alpha x(s)|+\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|\frac{m}{e}\right]\leq M_1(t-a)^{\overline{-m_1}}\end{aligned} \tag{4.7}$$

sağlanacak şekilde pozitif M_1ve m_1 sabitlerinin mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat.

$$S_1=\left\{x(t)|x\in l_{n_0}^{\infty},t\in\left[n_0,a\right)\cap\mathbb{N}_{n_0}\text{için }x(t)=\varphi(t),t\in\mathbb{N}_{a+1}\text{için }|x(t)|\leq M_1(t-a)^{\overline{-m_1}}\right\}$$

kümesini tanımlayalım. T dönüşümünün S_1 kümesinde bir sabit noktasının olduğunu göstereceğiz. S_1 in $l_{n_0}^{\infty}$ uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır. Lemma 2.3 den $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$(t-a)^{\overline{-m_1}}=\frac{\Gamma(t-a-m_1)}{\Gamma(t-a)}=(t-a)^{-m_1}\left[1+O\left(\frac{1}{t-a}\right)\right]$$

olduğundan $t\to\infty$ iken $(t-a)^{\overline{-m_1}}\to 0$ dir.

(4.3) ve (4.7) göz önünde bulundurulursa $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$\begin{aligned}|Tx(t)|&\leq|\varphi(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(t,x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right|\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[|\alpha x(s)|+\sum_{j=1}^{m}\left|\beta x\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right|\right]\\&\leq|\varphi(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|+\sum_{j=1}^{m}K_j\,M_1(t-a)^{\overline{-m_1}}\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[|\alpha x(s)|+\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|\frac{1}{e}\right]\end{aligned}$$

$$= |\varphi(a)| + \sum_{j=1}^{m} \left| h_j\left(a, \varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right| + M_1 \sum_{j=1}^{m} K_j\,(t-a)^{\overline{-m_1}}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left[|\alpha x(s)| + \left|\frac{\beta}{\gamma}\right| \frac{m}{e}\right]$$

$$\leq M_1 (t-a)^{\overline{-m_1}}$$

dir. Dolayısıyla $x(t) \in S_1$için $Tx(t) \in S_1$ olduğundan $TS_1 \subset S_1$dir.

Şimdi T_2 nin S_1 üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken $t^{\overline{-m_1}} \to 0$ olduğundan, öyle bir $k_1 \in \mathbb{N}_{a+1}$ vardır ki $\forall t > k_1$ için $M_1(t-a)^{\overline{-m_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. $x_n \in S_1$ ve $x_n \to x$ olsun. $t \in \{a+1, a+2, \dots, k_1\}$ için $f(u) = ue^{-u}$ fonksiyonunun sürekliliği ve Lemma 2.7 göz önünde bulundurulursa, $n \to \infty$ iken

$$|T_2 x_n(t) - T_2 x(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left\| \left[\alpha x_n(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x_n\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right] \right.$$

$$\left. + \left[\alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right] \right\|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)} \Sigma_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left| \alpha\left(x_n(s) - x(s)\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta}{\gamma} \left[\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)} - \gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right] \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \times \max_{s \in \{a+1, a+2, \dots, k_1\}} \left| \alpha\left(x_n(s) - x(s)\right) \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta}{\gamma} \left[\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)} - \gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right] \right|$$

$$= \frac{\Gamma(t-a+v)}{\Gamma(v+1)\Gamma(t-a)} \times \max_{s \in \{a+1, a+2, \dots, k_1\}} \left| \alpha\left(x_n(s) - x(s)\right) \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta}{\gamma}\left[\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)}-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\Bigg|$$

$\to 0$

olduğundan T_2 süreklidir. $t \in \{k_1+1,\ k_1+2, \dots\}$ ve $x_n \in S_1$ için

$$\begin{aligned}|T_2x_n(t)-T_2x(t)| \le &\left|\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[\alpha x_n(s)+\sum_{j=1}^{m}\beta x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x_n\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\right| \\ &+\left|\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[\alpha x(s)+\sum_{j=1}^{m}\beta x\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\right| \\ &\le 2M_1(t-a)^{\overline{-m_1}}<\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için $n \to \infty$ iken $|T_2x_n(t)-T_2x(t)| \to 0$ olur. Böylelikle T_2 nin sürekli olduğu gösterilmiştir.

T_2S_1 in göreceli kompakt olduğunu göstermek için $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_{a+1}$ ve $t_2 > t_1 \ge k_1$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}|T_2x(t_2)-T_2x(t_1)| \le &\left|\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t_2}\left(t_2-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[\alpha x(s)+\sum_{j=1}^{m}\beta x\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\right| \\ &+\left|\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t_1}\left(t_1-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[\alpha x(s)+\sum_{j=1}^{m}\beta x\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\right| \\ &\le\ M_1(t-a)^{\overline{-m_1}}+M_1(t-a)^{\overline{-m_1}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Böylece $\{T_2x|\ x \in S_1\}$ kümesinin sınırlı ve düzgün Cauchy alt küme olduğu görülür. Arzela-Ascoli daralma teoreminden T_2S_1 göreceli kompakttır.

T_1 in bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek için $x, y \in S_1$ alalım. Bu durumda (4.3) göz önüne alındığında

$$|T_1x(t)-T_1y(t)| = \left|-\sum_{j=1}^{m}h_j\left(t,x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}h_j\left(t,y\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left| h_j\left(t, y\left(t-\sigma_j(t)\right)\right) - h_j\left(t, x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right|$$
$$\leq K_1|x-y| + K_2|x-y| + \cdots + K_m|x-y|$$
$$= \sum_{j=1}^{m} K_j|x-y|$$

olur. $0 < \sum_{j=1}^{m} K_j < 1$ olduğundan T_1 in bir daralma dönüşümü olduğu görülür.

Krasnoselskii sabit nokta teoreminden T nin S_1 de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (4.2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.1 (4.3) ve (4.7) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri çekimlidir.

İspat. Lemma 4.2 e göre (4.2) denkleminin S_1 kümesi içinde çözümleri mevcuttur. S_1 deki her $x(t)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğundan $x(t)$ çözümü çekimlidir.

Teorem 4.2. (4.3) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$|\alpha[x(t)-y(t)]| + \frac{1}{e^2}\left|\frac{\beta}{\gamma}\right| \sum_{j=1}^{m} \left|x\left(t-\sigma_j(t)\right) - y(t-\sigma_j(t))\right| \leq M_2(t-a)^{\overline{-m_2}}\|x-y\| \qquad (4.8)$$

koşulu sağlanacak şekilde $m_2 \in (v,1)$ ve $M_2 > 0$ mevcut olsun. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin kararlı olması için gerek şart

$$c = \sum_{j=1}^{m} K_j + M_2\Gamma(1-m_2) < 1 \qquad (4.9)$$

olmasıdır.

İspat. $x(t)$ (4.2) denkleminin bir çözümü ve $y(t)$ de (4.2) denkleminin $t \in [n_0, a] \cap \mathbb{N}_{n_0}$ için $y(t) = \tilde{\varphi}(t)$ başlangıç koşulunu sağlayan bir çözümü olsun. $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için (4.3) ve Alzabut vd. (2012) deki $|xe^{-x} - ye^{-y}| \leq \frac{1}{e^2}|x-y|$ eşitsizliği göz önünde bulundurulursa

$$|x(t)-y(t)| \leq |\varphi(a)-\tilde{\varphi}(a)| + \sum_{j=1}^{m} \left|h_j\left(a, \varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right) - h_j\left(a, \tilde{\varphi}\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(t,x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)-h_j\left(t,\tilde{x}\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right|$$

$$+\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}[|\alpha x(s)-\alpha y(s)|$$

$$+\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|\sum_{j=1}^{m}\left|\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}-\gamma y\left(s-\sigma_j(s)\right)e^{-\gamma y\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right|$$

$$\leq|\varphi(a)-\tilde{\varphi}(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-h_j\left(a,\tilde{\varphi}\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{m}K_j\|x-y\|+\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}$$

$$\times\left[\left|\alpha\left(x(s)-y(s)\right)\right|+\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|\frac{1}{e^2}\sum_{j=1}^{m}\left|x\left(s-\sigma_j(s)\right)-y\left(s-\sigma_j(s)\right)\right|\right]$$

elde edilir. Son eşitsizlikte (4.8) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leq|\varphi(a)-\tilde{\varphi}(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-h_j\left(a,\tilde{\varphi}\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}K_j\|x-y\|+\frac{M_2}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}(s-a)^{\overline{-m_2}}\|x-y\|\\&=|\varphi(a)-\tilde{\varphi}(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-h_j\left(a,\tilde{\varphi}\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|\\&\quad+\textstyle\sum_{j=1}^{m}K_j\|x-y\|+M_2\nabla_a{}^{-v}(t-a)^{\overline{-m_2}}\|x-y\|\end{aligned}$$

bulunur. Lemma 2.6 ve (4.3) koşulu göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&=|\varphi(a)-\tilde{\varphi}(a)|+\sum_{j=1}^{m}\left|h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-h_j\left(a,\tilde{\varphi}\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)\right|\\&\quad+\sum_{j=1}^{m}K_j\|x-y\|+M_2\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)}(t-a)^{\overline{v-m_2}}\|x-y\|\\&\leq\|\varphi-\tilde{\varphi}\|+\sum_{j=1}^{m}K_j\|\varphi-\tilde{\varphi}\|+\sum_{j=1}^{m}K_j\|x-y\|+M_2\frac{\Gamma(1-m_2)}{\Gamma(1+v-m_2)}(t-a)^{\overline{v-m_2}}\|x-y\|\\&\leq\left(1+\sum_{j=1}^{m}K_j\right)\|\varphi-\tilde{\varphi}\|+\left(\sum_{j=1}^{m}K_j+M_2\Gamma(1-m_2)\right)\|x-y\|\\&=\left(1+\sum_{j=1}^{m}K_j\right)\|\varphi-\tilde{\varphi}\|+c\|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|x-y\| < \left(1+\sum_{j=1}^{m} K_j\right)\|\varphi-\tilde{\varphi}\| + c\|x-y\|,$$

$$\|x-y\| < \frac{1}{1-c}\left(1+\sum_{j=1}^{m} K_j\right)\|\varphi-\tilde{\varphi}\|$$

elde edilir. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{1-c}{1+\sum_{j=1}^{m} K_j}\varepsilon$ seçilirse $\|\varphi-\tilde{\varphi}\| < \delta$ olduğunda $\|x-y\| < \varepsilon$ sağlanır. Böylece (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri kararlı olur.

Teorem 4.3. (4.3), (4.7) ve (4.8) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (4.9) koşulu altında (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 4.3, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 nin bir sonucudur.

Lemma 4.3 (4.3) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca s$\in \mathbb{N}_{a+1}$ ve $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$\left|\frac{\varphi(a)+\sum_{j=1}^{m} h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-\sum_{j=1}^{m} h_j\left(t,x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)}{\Gamma(1-\upsilon)}(s-a)^{\overline{\upsilon}}\right.$$

$$\left. + \alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\big(s-\sigma_j(s)\big)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right|$$

$$\leq M_3(s-a)^{\overline{-m_3}} \qquad (4.10)$$

koşulu sağlanacak şekilde $m_3 \in (\upsilon, 1)$ ve $M_3 > 0$ sabitleri mevcut olsun. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat.

$$S_2 = \left\{x(t) | x \in l_{n_0}^{\infty}, t \in [n_0, a) \cap \mathbb{N}_{n_0} \text{için } x(t) = \varphi(t), t \in \mathbb{N}_{a+1} \text{için } |x(t)| \leq \frac{M_3\Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+\upsilon-m_3)}(t-a)^{\overline{\upsilon-m_3}}\right\}$$

kümesini tanımlayalım. S_2 nin $l_{n_0}^{\infty}$ un kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır. (4.10) ve Lemma 2.6 göz önünde bulundurulursa, $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$|Tx(t)| = \left|\varphi(a) + \sum_{j=1}^{m} h_j\left(a, \varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right) - \sum_{j=1}^{m} h_j\left(t, x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left[\alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left|\left[\varphi(a) + \sum_{j=1}^{m} h_j\left(a, \varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right) - \sum_{j=1}^{m} h_j\left(t, x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right]\right.$$
$$\left. \times \frac{(s-a)^{\overline{v}}}{\Gamma(1-v)} + \alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right|$$

$$\leq \tfrac{1}{\Gamma(v)} \textstyle\sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} M_3 (s+v)^{\overline{-m_3}}$$

$$= M_3 \nabla_a^{-v} (t-a)^{\overline{-m_3}}$$

$$= \tfrac{M_3 \Gamma(1-m_3)}{\Gamma(1+v-m_3)} (t-a)^{\overline{v-m_3}}$$

$$\leq M_3 (t-a)^{\overline{-m_3}}$$

elde edilir. Buradan herhangi bir $x(t) \in S_2$ için $Tx(t) \in S_2$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $TS_2 \subset S_2$ olduğu görülür. T_2 dönüşümünün S_2 üzerinde sürekli olması, $T_2 S_2$ kümesinin göreceli kompakt olması ve T_1 dönüşümünün bir daralma dönüşümü olmasının ispatı Lemma 4.2 de yapılan ispatlarla benzer olduğu için yapılmayacaktır. Krasnoselskii sabit nokta teoremine göre T nin S_2 de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (4.2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.4 (4.3) ve (4.10) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri çekimlidir.

İspat. Lemma 4.3 e göre (4.2) denkleminin S_2 kümesi içinde çözümü vardır. S_2 deki her $x(t)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğundan $x(t)$ çözümü çekimlidir.

Teorem 4.5 (4.3), (4.8) ve (4.10) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (4.9) koşulu altında (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 4.5, Teorem 4.2 ve Teorem 4.4 ün bir sonucudur.

Lemma 4.4 (4.3) koşulunun sağlandığını varsayalım. Ayrıca s$\in \mathbb{N}_{a+1}$ ve $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için

$$\left|\frac{\varphi(a)+\sum_{j=1}^{m}h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-\sum_{j=1}^{m}h_j\left(t,x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)}{\Gamma(1-\upsilon)}(s-a)^{\bar{\upsilon}}\right.$$

$$\left.+\alpha x(t)+\sum_{j=1}^{m}\beta x\big(t-\sigma_j(t)\big)e^{-\gamma x\left(t-\sigma_j(t)\right)}\right|$$

$$\leq M_4|x(s+m_4)|^{\zeta} \tag{4.11}$$

koşulu sağlanacak şekilde $\zeta > \frac{1}{1-\upsilon}$ ve $M_4 > 0$ sabitleri mevcut olsun. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için en az bir çözüme sahip olması için gerek şart

$$\frac{M_4\Gamma(1+\zeta m_4)\Gamma(1-\zeta m_4)}{\Gamma^{\zeta}(1+m_4)\Gamma(1+\upsilon-\zeta m_4)} \leq 1 \tag{4.12}$$

olmasıdır. Burada

$$\frac{\upsilon}{\zeta-1} < m_4 < \frac{1}{\zeta} \tag{4.13}$$

dir.

İspat. $\zeta > \frac{1}{1-\upsilon}$ olduğundan $\frac{1}{\gamma} > \frac{\upsilon}{\gamma-1}$ elde edilir. Bu durumda $\frac{\upsilon}{\zeta-1} < m_4 < \frac{1}{\zeta}$ olacak şekilde bir m_4 reel sayısı vardır. $m_4 < \frac{1}{\zeta}$ olduğunda $1 - m_4\zeta > 0$ olacağından $\Gamma(1 - m_4\zeta) > 0$ olur. $\frac{\upsilon}{\zeta-1} < m_4$ olduğundan $\upsilon - \zeta m_4 < -m_4$ olur.

$S_3 = \{x(t) | x \in l_{n_0}^{\infty}, t \in [n_0, a) \cap \mathbb{N}_{n_0}$ için $x(t) = \varphi(t), t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için $|x(t)| \leq (t-a)^{\overline{-m_4}}\}$

kümesini tanımlayalım. T nin S_3 kümesinde bir sabit noktaya sahip olduğunu göstereceğiz. S_3 ün $l_{n_0}^{\infty}$ uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olduğu açıktır. $t \in \mathbb{N}_{a+1}$ için (4.11) ve (4.13) göz önünde bulundurulursa

$$|Tx(t)| = \left|\varphi(a)+\sum_{j=1}^{m}h_j\left(a,\varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right)-\sum_{j=1}^{m}h_j\left(t,x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Gamma(v)}\sum_{s=a+1}^{t}\left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}}\left[\alpha x(s)+\sum_{j=1}^{m}\beta x\big(s-\sigma_j(s)\big)e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} \left| \left[\varphi(a) + \sum_{j=1}^{m} h_j\left(a, \varphi\left(t-\sigma_j(a)\right)\right) - \sum_{j=1}^{m} h_j\left(t, x\left(t-\sigma_j(t)\right)\right) \right] \right.$$

$$\left. \times \frac{(s-a)^{\overline{v}}}{\Gamma(1-v)} + \alpha x(s) + \sum_{j=1}^{m} \beta x\left(s-\sigma_j(s)\right) e^{-\gamma x\left(s-\sigma_j(s)\right)} \right|$$

$$\leq \tfrac{M_4}{\Gamma(v)} \textstyle\sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} |x(s+m_4)|^{\zeta}$$

$$= \frac{M_4}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t} \left(t-\rho(s)\right)^{\overline{v-1}} [(s+m_4-a)^{\overline{-m_4}}]^{\zeta}$$

$$\leq \frac{M_4 \Gamma(1+\zeta m_4)\Gamma(1-\zeta m_4)}{\Gamma^{\zeta}(1+m_4)\Gamma(1+v-\zeta m_4)} (t-a)^{\overline{v-\zeta m_4}}$$

$$\leq (t-a)^{\overline{v-\zeta m_4}}$$

$$\leq (t-a)^{\overline{-m_4}}$$

elde edilir. Buradan herhangi bir $x(t) \in S_3$ için $Tx(t) \in S_3$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $TS_3 \subset S_3$ olduğu görülür. T_2 dönüşümünün S_3 üzerinde sürekli olması, T_2S_3 kümesinin göreceli kompakt olması ve T_1 dönüşümünün bir daralma dönüşümü olmasının ispatı Lemma 4.2 de yapılan ispatlarla benzer olduğu için yapılmayacaktır. Krasnoselskii sabit nokta teoremine göre T nin S_3 de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (4.2) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Teorem 4.6 (4.3), (4.11) ve (4.12) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri çekimlidir.

İspat Lemma 4.3 e göre (4.2) denkleminin S_3 kümesi içinde çözümleri mevcuttur. S_3 deki $\forall x(t)$ çözümü için $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğundan $x(t)$ çözümü çekimlidir.

Teorem 4.7. (4.3), (4.8) ve (4.11) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (4.9) ve (4.12) koşulu altında (4.2) başlangıç değer probleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 4.7, Teorem 4.2 ve Teorem 4.6 nın bir sonucudur.

5. VOLTERRA TİPİNDEKİ KEYFİ MERTEBEDEN LİNEER GERİ FARK DENKLEMİNİN BAZI SINIFLARININ KARALILIK KRİTERİ

5.1 $\nabla_{-1}^{v} x(t) = \lambda x(t)$ Biçimindeki Keyfi Mertebeden Geri Fark Denkleminin Çözümlerinin Kararlılığı

Bu kesimde $0 < v < 1$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}, x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\nabla_{-1}^{v} x(t) = \lambda x(t), t \in \mathbb{N}_1, \tag{5.1}$$

$$\nabla_{-1}^{v-1} x(t)|_{t=0} = x_0, \tag{5.2}$$

biçimindeki keyfi mertebeden geri fark denkleminin çözümlerinin kararlılık şartları ele alınmıştır. Çözümlerin kararlılığı incelenirken önce (5.1) denkleminin konvolüsyon tipinde bir Volterra denklemi olduğu gösterilmiş, daha sonra konvolüsyon tipindeki Volterra denklemlerinin kararlılık inceleme yöntemleri kullanılarak (5.1) denkleminin kararlılık şartları elde edilmiştir.

Öncelikle (5.2) başlangıç koşulu ile verilen (5.1) Riemann-Liouville keyfi mertebeden geri fark denkleminin bir konvolüsyon tipinde Volterra denklemi olduğunu gösterelim. (5.1) denkleminde Riemann-Liouville keyfi mertebeden geri fark operatörünün tanımı kullanılırsa

$$\nabla_{-1}^{v} x(t) = \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=0}^{t} \left(t - \rho(s)\right)^{\overline{-v-1}} x(s)$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \frac{1}{\Gamma(-v)} \frac{\Gamma(t-s+1-v-1)}{\Gamma(t-s+1)} x(s)$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \frac{\Gamma(t-s-v)}{\Gamma(-v)\Gamma(t-s+1)} x(s)$$

$$= \sum_{s=0}^{t} \binom{t-s-\upsilon-1}{-\upsilon-1} x(s)$$

$$= x(t) + \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-s-\upsilon-1}{-\upsilon-1} x(s) = \lambda x(t)$$

elde edilir. Buradan

$$x(t) = \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{s=0}^{t-1} \binom{t-s-\upsilon-1}{-\upsilon-1} x(s)$$

bulunur. t yerine $t+1$ yazılırsa

$$x(t+1) = \frac{1}{\lambda-1} \sum_{s=0}^{t} \binom{t-s-\upsilon}{-\upsilon-1} x(s) \tag{5.3}$$

denklemi elde edilir ki bu denklem (2.23) biçiminde bir denklemdir. Burada, (2.23) denklemindeki $A = 0$ ve

$$B(t) = \frac{1}{\lambda-1} \binom{t-\upsilon}{-\upsilon-1} \tag{5.4}$$

dir.

Teorem 5.1 (5.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda < 0$ veya $\lambda > 2^{\upsilon}$ olmasıdır.

İspat. (5.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olduğunu kabul edelim. (2.25) ve (2.26) göz önünde bulundurulduğunda (5.3) denkleminin karakteristik fonksiyonu

$$g(z) = z - \widetilde{B}(z) \tag{5.5}$$

dir. $g(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının bulunduğu bölgeyi elde etmek için Teorem 2.13 ü kullanacağız. Lemma 2.10 ve binom teoremi göz önünde bulundurulup (5.4) deki ifadenin her iki tarafının Z −dönüşümü alınırsa

$$Z\big(B(t)\big) = \tilde{b}(z) = \frac{1}{\lambda-1}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{s-\upsilon}{-\upsilon-1}z^{-s}$$

$$= \frac{1}{\lambda-1}\left[\binom{-\upsilon}{-\upsilon-1} + \binom{1-\upsilon}{-\upsilon-1}z^{-1} + \binom{2-\upsilon}{-\upsilon-1}z^{-2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda-1}\left[\binom{-\upsilon}{1} + \binom{1-\upsilon}{2}z^{-1} + \binom{2-\upsilon}{3}z^{-2} + \cdots\right]$$

$$= \frac{z}{\lambda-1}\left[-\upsilon z^{-1} + \frac{(1-\upsilon)(-\upsilon)}{2!}z^{-2} + \frac{(2-\upsilon)(1-\upsilon)(-\upsilon)}{3!}z^{-3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{z}{\lambda-1}\left[-\upsilon z^{-1} + \frac{(\upsilon)(\upsilon-1)}{2!}z^{-2} - \frac{(\upsilon)(\upsilon-1)(\upsilon-2)}{3!}z^{-3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{z}{\lambda-1}\left[-1 + 1 - \binom{\upsilon}{1}z^{-1} + \binom{\upsilon}{2}z^{-2} - \binom{\upsilon}{3}z^{-3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{z}{\lambda-1}\left[\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\upsilon} - 1\right] \qquad (5.6)$$

elde edilir.

(5.6) denklemi (5.5) de yerine yazılırsa (5.3) ün karakteristik denklemi

$$z - \frac{z}{\lambda-1}\left[\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\upsilon} - 1\right] = 0 \qquad (5.7)$$

olarak elde edilir. Teorem 2.13 göz önünde bulundurulduğunda (5.3) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart $|z| \geq 1$ şartını sağlayan z karmaşık sayıları için

$$z - \frac{z}{\lambda-1}\left[\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\upsilon} - 1\right] \neq 0 \tag{5.8}$$

olmasıdır. Bu durumda verilen karakteristik denklemin tüm kökleri $|z| < 1$ diski içinde kalır. Gerçekten karakteristik denklemin sıfırdan farklı bir kökü z olsun. $z = 0$ olamaz. Çünkü $\frac{1}{z}$ tanımsız olur. Bu durumda

$$z\left(1 - \frac{1}{\lambda-1}\left[\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\nu} - 1\right]\right) = 0 \tag{5.9}$$

eşitliğinin sağlanması için

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\nu} = \lambda \tag{5.10}$$

olmalıdır. Şimdi (5.10) un köklerini λ parametresine göre inceleyelim. $\lambda < 0$ durumunda (5.10) eşitliğini sağlayan bir $|z| \geq 1$ sayısı bulunamayacağı için (5.8) aşikar olarak sağlanacaktır. Bu nedenle, (5.10) dan z , ν ve λ cinsinden yeniden yazılırsa

$$z = \frac{1}{1 - \lambda^{\frac{1}{\nu}}}$$

olarak elde edilir. (5.8) in sağlanması için $|z| = \left|\frac{1}{1-\lambda^{\frac{1}{\nu}}}\right| < 1$ yani, $\left|1 - \lambda^{\frac{1}{\nu}}\right| > 1$ olur. Buradan $\lambda^{\frac{1}{\nu}} > 2$, yani

$$\lambda > 2^{\nu} \tag{5.11}$$

sağlanmalıdır.

Tersine, $\lambda < 0$ veya $\lambda > 2^{\nu}$ durumunda $|z| \geq 1$ şartını sağlayan z sayıları için (5.8) sağlanır. Dolayısıyla Teorem (2.13) den (5.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlı olur.

Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 5.2. $\lambda < 0$ veya $\lambda > 2$ ise (5.1) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 2.14 ü kullanabilmek için öncelikle

$B(t) = \frac{1}{\lambda-1}\binom{t-\nu}{-\nu-1}$ nin işaretinin korunduğu gösterilecektir. Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(1-\nu) = (-\nu)\Gamma(-\nu)$$

özelliği göz önünde bulundurulursa

$$B(t) = \frac{1}{\lambda-1}\binom{t-\nu}{-\nu-1} = \frac{\Gamma(t-\nu+1)}{(\lambda-1)\Gamma(t+2)\Gamma(-\nu)} = \frac{-\nu\Gamma(t-\nu+1)}{(\lambda-1)\Gamma(t+2)\Gamma(1-\nu)}$$

dir. $\forall t \in \mathbb{N}_0$, $0 < \nu < 1$ ve $\lambda \neq 1$ için $\Gamma(t-\nu+1) > 0, \Gamma(t+2) > 0, \quad 0 < \upsilon < 1$ için $\Gamma(1-\nu) >$olduğundan $\frac{-\nu\Gamma(t-\nu+1)}{(\lambda-1)\Gamma(t+2)\Gamma(1-\nu)}$ ifadesinin işareti sadece λ ya bağlıdır, t ye bağlı değildir.

Lemma 2.3 göz önünde bulundurulduğunda

$$\lim_{k\to\infty}\binom{k-\nu+1}{-\nu} = \lim_{k\to\infty}\frac{\Gamma(k-\nu+2)}{\Gamma(k+2)\Gamma(-\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\lim_{k\to\infty}\frac{\Gamma(k-\nu+2)}{\Gamma(k+2)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\lim_{k\to\infty}k^{-\nu}\left[1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right] = 0 \qquad (5.12)$$

bulunur.

(5.12) ve binom katsayıları arasındaki $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ bağıntısı göz önünde bulundurulursa

$$|A| + \left|\sum_{t=0}^{\infty} B(t)\right| = \left|\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda-1}\binom{t-\nu}{-\nu-1}\right| = \frac{1}{|\lambda-1|}\left|\lim_{k\to\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{t-\nu}{-\nu-1}\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda-1|}\left|\lim_{k\to\infty}\sum_{t=0}^{k}\left[\binom{t-\nu+1}{-\nu}-\binom{t-\nu}{-\nu}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda-1|}\left|\lim_{k\to\infty}\left[\binom{-\nu+1}{-\nu}-\binom{-\nu}{-\nu}\right.\right.$$

$$+\binom{-\nu+2}{-\nu}-\binom{1-\nu}{-\nu}$$

$$+\binom{-\nu+3}{-\nu}-\binom{2-\nu}{-\nu}$$

$$\vdots$$

$$\left.\left.+\binom{k-\nu+1}{-\nu}-\binom{k-\nu}{-\nu}\right]\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda-1|}\left|\lim_{k\to\infty}\left[\binom{k-\nu+1}{-\nu}-1\right]\right|$$

$$= \frac{1}{|\lambda-1|}$$

elde edilir. Teorem (2.14) den

$$\frac{1}{|\lambda-1|} < 1 \qquad (5.13)$$

koşulu altında (1.1) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır. $\frac{1}{|\lambda-1|} < 1$ olması $\lambda < 0$ veya $\lambda > 2$ olmasını gerektirir.

Böylelikle ispat tamamlanır.

5.2 $\nabla^{v}x(t) = \lambda x(t)$ Biçimindeki Keyfi Mertebeden Geri Fark Denkleminin Çözümlerinin Ayrık Mittag-Leffler Fonksiyonu ile İlişkisi ve Çözümlerinin Asimptotik Davranışı

$0 < v < 1$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}, x: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere bu kesimde

$$\nabla^{v}x(t) = \lambda x(t), t \in \mathbb{N}_1, \tag{5.14}$$

biçimindeki keyfi mertebeden geri fark denkleminin çözümlerinin ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkisi ve çözümlerin asimptotik davranışı incelenmiştir.

(2.17) kullanılarak (5.14) denkleminde $t = 1$ yazıldığında $\nabla^{v}x(1)$ in bulunabilmesi için $\nabla^{-(1-v)}x(0)$ değerinin bilinmesi gerekir. Ancak $0 \notin \mathbb{N}_1$ olduğundan $\nabla^{-(1-v)}x(0)$ değeri (2.13) deki tanım yardımı ile bulunamaz. Bundan dolayı $t = 1$ için (2.13) kullanılırsa

$$\nabla^{v}x(1) = \nabla^{-(1-v)}x(1) - \nabla^{-(1-v)}x(0) = \lambda x(1)$$

bulunur. Buradan $\nabla^{-(1-v)}x(1) = x_1$ olmak üzere $\nabla^{-(1-v)}x(0) = x_0$ başlangıç koşulu

$$x_0 = (1 - \lambda)x_1$$

olur. Buradan

$$x_1 = \frac{1}{(1-\lambda)}x_0$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi bu koşul x_0 ve x_1 arasındaki ilişkiyi vermektedir. Dolayısı ile $\lambda \neq 1$ durumunda verilen herhangi bir $\nabla^{-(1-v)}x(0) = \xi,\ \xi \in \mathbb{R}$ başlangıç koşulu için ξ ve x_1 değerleri arasında bire-bir bir ilişki olduğu görülür. Böylece (5.14) denklemi $\forall n \in \mathbb{N}_2$ için sağlanır.

Tanım 2.9, Tanım 2.8 ve Lemma 2.9 göz önünde bulundurulursa, $t \in \mathbb{N}_2$ için

$$\nabla^{v}x(t) = \frac{1}{\Gamma(-v)}\sum_{s=1}^{t}(t-s+1)^{\overline{-v-1}}x(s)$$

$$= \sum_{s=1}^{t}\frac{\Gamma(\mathrm{t}-\mathrm{s}-v)}{\Gamma(-v)\Gamma(\mathrm{t}-\mathrm{s}+1)}x(s)$$

$$= \sum_{s=1}^{t}\binom{\mathrm{t}-\mathrm{s}-v-1}{t-s}x(s)$$

$$= \sum_{s=1}^{t}(-1)^{t-s}\binom{v}{t-s}x(s)$$

elde edilir. Böylece (5.14) denklemi $t \in \mathbb{N}_2$ için

$$\sum_{s=1}^{t}(-1)^{t-s}\binom{v}{t-s}x(s) = \lambda x(t) \tag{5.15}$$

biçimine dönüşür. (5.15) eşitliğinin sol tarafı düzenlenirse

$$x(t) + \sum_{s=1}^{t-1}(-1)^{t-s}\binom{v}{t-s}x(s) = \lambda x(t)$$

bulunur. Buradan $t \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t) = \frac{1}{\lambda-1}\sum_{s=1}^{t-1}(-1)^{t-s}\binom{v}{t-s}x(s) \tag{5.16}$$

elde edilir. Böylelikle verilen $x_1 \in \mathbb{R}$ için (5.14) denkleminin çözümlerinin var ve tek olduğu anlaşılır.

Bu kısımda ayrık Mittag-Leffler fonksiyonunun geri Laplace dönüşümünü elde edilecektir.

Lemma 5.1 $E_{\alpha,\beta}^{\lambda}(t)$ *a*yrık Mittag-Leffler fonksiyonunun geri Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{E^{\lambda}_{\alpha,\beta}(t)\}(s) = s^{\alpha-\beta}\,\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda} \tag{5.17}$$

dir.

İspat: Geri Laplace dönüşümünün tanımı, Lemma 2.11 ve geometrik serinin toplam formülü kullanılırsa

$$\mathcal{L}\{E^{\lambda}_{\alpha,\beta}(t)\}(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j}\frac{t^{\overline{\alpha j+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}(1-s)^{k-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{\overline{\alpha j+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}(1-s)^{k-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j}\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\overline{\alpha j+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}\right\}(s)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j}\,s^{-\alpha j-\beta}$$

$$= s^{-\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^{j}$$

$$= s^{-\beta}\,\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^{\alpha}}}$$

$$= s^{\alpha-\beta}\,\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda}$$

elde edilir.

Teorem 5.3 $0 < v < 1$ ve $\lambda \neq 1$ olsun. $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile verilen (5.14) denkleminin çözümleri $\forall n \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t, x_0) = x_0 E^{\lambda}_{v,v}(t)$$

biçimindedir. Buna göre $x(1, x_0) = \frac{1}{(1-\lambda)} x_0$ dır.

İspat. (5.14) denkleminin her iki tarafına geri Laplace dönüşümü uygulanıp geri Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği göz önünde bulundurulursa

$$s^{\nu}\mathcal{L}\{x\}(s) - \nabla^{-(1-\nu)}x(0) = \lambda\mathcal{L}\{x\}(s)$$

olur. Buradan

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \frac{1}{s^{\nu}-\lambda} x_0 = x_0\mathcal{L}\{E_{\nu,\nu}^{\lambda}\} \tag{5.18}$$

elde edilir. (5.18) eşitliğinde Lemma 5.1 ve ters Laplace dönüşümü kullanılırsa $\forall n \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t, x_0) = x_0 E_{\nu,\nu}^{\lambda}(t)$$

olarak elde edilir.

Şimdi (5.14) denkleminin çözümlerinin asimptotik özelliklerini inceleyelim. Bir önceki kesimde (5.14) denklemi ile ilgili kararlılık sonucu aşağıdaki gibi elde edilmiş idi.

Teorem 5.4 (5.14) denkleminin sıfır çözümünün düzgün asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter koşul $\lambda < 0$ veya $\lambda > 2^{\nu}$ olmasıdır.

(5.14) denkleminin çözümlerinin asimptotik özelliği aşağıdaki gibidir

Lemma 5.2 $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $-1 < \lambda < 0$ olsun. Bu durumda (5.14) in bütün $x(t)$ çözümleri için $t \to \infty$ iken

$$x(t) = O(t^{-(1+\nu)})$$

olur (Cermak vd. 2013).

Teorem 5.3 ve Lemma 5.2 göz önünde bulundurulursa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1 $-1 < v < 0$ olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken

$E_{v,v}^{\lambda}$(t)= $O(t^{-(1+v)})$

dir.

5.3 $\nabla^{v}x(t) = Ax(t) + p(t)$ Biçimindeki Keyfi Mertebeden Geri Fark Sisteminin Çözümlerinin Ayrık Mittag-Leffler Fonksiyonu ile İlişkisi ve Çözümlerinin Asimptotik Davranışı

$0 < v < 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x: \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}^n$, $p : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}^n, p(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{bmatrix}$ olmak üzere bu kesimde

$$\nabla^{v}x(t) = Ax(t) + p(t),\ t \in \mathbb{N}_1 \tag{5.19}$$

$$\nabla^{-(1-v)}x(0) = x_0,\ x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}, \tag{5.20}$$

biçimindeki keyfi mertebeden geri fark sisteminin çözümlerinin ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkisi ve çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

Lemma 5.3 *A* regresif bir matris olsun. Bu durumda (5.20) başlangıç koşulu ile verilen (5.19) başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır.

İspat. (5.19) sisteminde (2.17) kullanılarak $t = 1$ yazıldığında $\nabla^{v}x(1)$ in bulunabilmesi için $\nabla^{-(1-v)}x(0)$ değerinin bilinmesi gerekir. Ancak $0 \notin \mathbb{N}_1$ olduğundan $\nabla^{-(1-v)}x(0)$ değeri Tanım 2.9 yardımı ile bulunamaz. x_1 bir sütun matris ve $\nabla^{-(1-v)}x(1) = x_1$ olmak üzere (2.13) de $t = 1$ için

$$\nabla^{v}x(1) = \nabla^{-(1-v)}x(1) - \nabla^{-(1-v)}x(0) = Ax(1) + p(1)$$

eşitliğinden $\nabla^{-(1-v)}x(0) = x_0$ sütun matrisinin değeri

$$x_0 = (I - A)x_1 - p(1) \tag{5.21}$$

olarak elde edilir. *A* regresif bir matris olduğundan $(I - A)$ matrisinin tersi mevcuttur, dolayısıyla (5.21) in düzenlenmesi ile

$$x_1 = (I - A)^{-1}(x_0 + p(1)) \tag{5.22}$$

olarak elde edilir. A matrisinin regresif oluşu (5.22) yardımı ile x_1 matrisinin x_0 matrisi tarafından tek türlü belirlenebilmesini sağlar.

Tanım 2.9, Tanım 2.8 ve Lemma 2.9 göz önünde bulundurulursa, $t \in \mathbb{N}_2$ için

$$\nabla^v x(t) = \frac{1}{\Gamma(-v)} \sum_{s=1}^{t} (t - s + 1)^{\overline{-v-1}} x(s)$$

$$= \sum_{s=1}^{t} \frac{\Gamma(\mathrm{t} - \mathrm{s} - v)}{\Gamma(-v)\Gamma(\mathrm{t} - \mathrm{s} + 1)} x(s)$$

$$= \sum_{s=1}^{t} \binom{\mathrm{t} - \mathrm{s} - v - 1}{t - s} x(s)$$

$$= \sum_{s=1}^{t} (-1)^{t-s} \binom{v}{t-s} x(s) \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.23) eşitliği (5.19) sisteminde yerine yazılırsa (5.19) sistemi $t \in \mathbb{N}_2$ için

$$\sum_{s=1}^{t} (-1)^{t-s} \binom{v}{t-s} x(s) = Ax(t) + p(t) \tag{5.24}$$

biçimine dönüşür. (5.24) düzenlenirse

$$x(t) + \sum_{s=1}^{t-1} (-1)^{t-s} \binom{v}{t-s} x(s) = Ax(t) + p(t),$$

$$(I - A)x(t) = -\sum_{s=1}^{t-1} (-1)^{t-s} \binom{v}{t-s} x(s) + p(t) \tag{5.25}$$

bulunur. (5.25) de A matrisinin regresif olması göz önünde bulundurulursa $t \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t) = -(I - A)^{-1} \sum_{s=1}^{t-1} (-1)^{t-s} \binom{v}{t-s} x(s) + (I - A)^{-1} p(t) \tag{5.26}$$

elde edilir. Böylece verilen $x_1 \in \mathbb{R}^n$ için (5.19) sisteminin çözümlerinin var ve tek olduğu anlaşılır.

Teorem 5.5 $0 < v < 1$ ve A regresif bir matris olsun. (5.20) başlangıç koşulu ile verilen (5.19) sisteminin çözümleri $\forall n \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t, x_0) = x_0 E_{v,v}^A(t) + \sum_{s=1}^{t} E_{v,v}^A(t-s+1)p(s) \tag{5.27}$$

biçimindedir. Buna göre $x(1, x_0) = (I - A)^{-1}(x_0 + p(1))$ dir.

İspat. (5.19) sisteminin her iki tarafına geri Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^v \mathcal{L}\{x\}(s) - \nabla^{-(1-v)} x(0) = A\mathcal{L}\{x\}(s) + \mathcal{L}\{p\}(s)$$

olur. Buradan

$$(s^v I - A)\mathcal{L}\{x\}(s) = \nabla^{-(1-v)} x(0) + \mathcal{L}\{p\}(s) \tag{5.28}$$

bulunur. (5.28) de Lemma 2.12 ve Lemma 2.11 göz önünde bulundurulursa

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = (s^v I - A)^{-1} \nabla^{-(1-v)} x(0) + (s^v I - A)^{-1} \mathcal{L}\{p\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{E_{v,v}^A\}(s).x_0 + \mathcal{L}\{E_{v,v}^A\}\mathcal{L}\{p\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{E_{v,v}^A\}(s).x_0 + \mathcal{L}\{E_{v,v}^A * p\}(s) \tag{5.29}$$

elde edilir. (5.29) eşitliğinde Lemma 2.12 ve Tanım 2.19 göz önünde bulundurulup ters Laplace dönüşümü kullanılırsa $\forall n \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t, x_0) = x_0 E_{v,v}^A(t) + \sum_{s=1}^{t} E_{v,v}^A(t-s+1)p(s)$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Teorem 5.5 in bir sonucu olarak

$$\nabla^{v}x(t) = Ax(t), 0 < v < 1,\ t = 1,2,\dots \tag{5.30}$$

$$\nabla^{-(1-v)}x(0) = x_0 \tag{5.31}$$

keyfi mertebeden fark sisteminin çözümü için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.2 A regresif bir matris olsun. Bu durumda (5.31) başlangıç koşulu ile verilen (5.30) sisteminin çözümü

$$x(t, x_0) = x_0 E^{A}_{v,v}(t)$$

biçimindedir.

Bir önceki kesimde $0 < v < 1$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}, x: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\nabla^{v}, v - inci$ mertebeden Riemann-Liouville geri fark operatörü olmak üzere $\nabla^{-(1-v)}x(0) = x_0$ başlangıç koşulu ile verilen

$$\nabla^{v}x(t) = \lambda x(t), t \in \mathbb{N}_1 \tag{5.32}$$

keyfi mertebeden fark denkleminin çözümlerinin ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkisi ve çözümlerin asimptotik davranışını incelenmiş idi. Şimdi (5.19) sisteminde A matrisini 1 boyutlu bir matris yani reel sayı alarak

$$\nabla^{v}x(t) = \lambda x(t) + p(t),\ t \in \mathbb{N}_1 \tag{5.33}$$

keyfi mertebeden fark denklemini ele alalım. A matrisinin regresif olma koşulu, A matrisi 1 boyutlu olduğunda $1 - \lambda \neq 0$, yani $\lambda \neq 1$ koşuluna dönüşür. Böylece $\lambda \neq 1$ koşulu altında aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.3 $0 < v < 1$ ve $\lambda \neq 1$ olsun. $\nabla^{-(1-v)}x(0) = x_0 = x_0$ başlangıç koşulu ile verilen (5.33) denkleminin çözümleri $\forall n \in \mathbb{N}_2$ için

$$x(t,x_0) = x_0 E_{v,v}^{\lambda}(t) + \sum_{s=1}^{t} E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)p(s) \quad (5.34)$$

biçimindedir. Buna göre $x(1,x_0) = \frac{1}{1-\lambda}(x_0 + p(1))$ dir.

Şimdi (5.33) ile verilen keyfi mertebeden fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim. Teoremin ispatında bir önceki çalışmamızda verdiğimiz aşağıdaki sonuç kullanılacaktır.

Sonuç 5.4 $-1 < \lambda < 0$ olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken

$E_{v,v}^{\lambda}$(t)= $O(t^{-(1+v)})$

dir.

Teorem 5.6 $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 < \lambda < 0$, $0 < v < 1$ ve $\forall t \in \mathbb{N}$ için $|p(t)| < M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ mevcut olsun. Bu durumda (5.33) denkleminin çözümleri sınırlıdır.

İspat. Teorem 5.5. göz önünde bulundurulursa (5.33) denkleminin çözümünün

$$x(t,x_0) = x_0 E_{v,v}^{\lambda}(t) + \sum_{s=1}^{t} E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)p(s) \quad (5.35)$$

biçiminde olduğu görülür. Sonuç 5.4 göz önünde bulundurulduğunda

$$\lim_{t\to\infty} E_{v,v}^{\lambda}(t) = 0 \quad (5.36)$$

dır. $\forall t \in \mathbb{N}$ için $|p(t)| < M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}^+$ mevcut olduğundan

$$\left|\sum_{s=1}^{t} E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)p(s)\right| \le \sum_{s=1}^{t} \left|E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)p(s)\right|$$

$$\le \sum_{s=1}^{t} \left|E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)\right| M$$

$$= M \sum_{s=1}^{t} \left|E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)\right| \quad (5.37)$$

olup Sonuç 5.4 deki

$E_{v,v}^{\lambda}$(t)= $O(t^{-(1+v)})$

eşitliği göz önünde bulundurulduğunda $t \to \infty$ iken (5.37) ifadesinin sınırlı olduğu anlaşılır. Böylece

$x(t, x_0) = x_0 E_{v,v}^{\lambda}(t) + \sum_{s=1}^{t} E_{v,v}^{\lambda}(t-s+1)p(s)$ çözümü $t \to \infty$ iken sınırlı olur.

İspat tamamlanır.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının 3. bölümünde (3.1) biçiminde birden fazla değişken gecikmeli terim içeren keyfi mertebeden fark denkleminin çözümlerinin kararlılığı incelenmiş, Krasnoselskii sabit nokta teoremi ve ayrık Arzela-Ascoli daralma teoremi kullanılarak (3.1) denkleminin çözümlerinin kararlılığı üzerine yeni sonuçlar elde edilmiştir. Tezin 4. bölümünde (4.2) biçimindeki Nicholson'un kurt sineği modeli tipinde keyfi mertebeden geri fark denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlılığı incelenmiştir. Tezin 5. bölümünde ise Volterra tipindeki keyfi mertebeden lineer fark denkleminin bir sınıfının kararlılık kriteri incelenmiş ve Volterra tipindeki keyfi mertebeden lineer fark denklemi ve sisteminin çözümlerinin ayrık Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkisi ve çözümlerinin asimptotik davranışı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Bu tezde ele alınan keyfi mertebeden fark denklemleri, keyfi mertebeden fark sistemi olarak ele alınarak elde edilen fark sistemleri için asimptotik kararlılık koşulları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Abdeljavad, T., Atıcı, F. (2012). On the definitions of nabla fractional operators, *Abstract and Applied Analysis, Volume* 2012, Article ID406757,13 pages.

Agarwal, R. P. (2000). *Difference Equations and Inequalities*, Marcel Dekker, NY.

Alzabut, J., Bolat, Y., Abdeljavad, T. (2012). Almost periodic dynamics of a discrete Nicholsons blowflies model involving a linear harvesting term, *Advances in Difference Equations*, 158.

Anastassiou, G. A. (2009). Discrete Fractional Calculus and Inequalities, *arXiv:0911.3370v1*, 17.

Ardjouni, A., Boulares, H., Djoudi, A. (2018). Stability of nonlinear neutral fractional difference equations, *Communications in Optimization Theory. Article ID.*8.

Atici, F. M., Eloe, P. W. (2007). A Transform Method in Discrete Fractional Calculus, *Intern. J. Difference Equ.* 2, 165–176.

Atici, F. M., Eloe, P. W. (2009). Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus, *Proc. Amer. Math. Soc*. 137, 981–989.

Atici, F.M, Sengül, S. (2010). Modeling with fractional difference equations, *J.Math. Anal. Appl.* 369, pp.1-9.

Atici, F.M., Eloe, P.W. (2015). Linear forward fractional difference eqautions, *Communications in Applied Analysis*, 19, 31-42.

Bereketoğlu, H., Kutay, V. (2012). *Fark Denklemleri.* Ankara: Gazi Kitabevi.

Boulares, H., Ardjouni, A., Laskri, Y. (2017) Asymptotic stability of nonlinear neutral fractional difference equations, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace, Vol.*8 No.4, 475-487.

Butzer, P.L., Westphal, U. (2000). *An introduction to fractional calculus, Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientic, New Jersey,USA.

Cermak, J., Kisela, T., Nechvatal, L. (2012). Stability and Asymptotic Properties of Linear fractional Difference Equation, *Advances in Difference Equations*,122.

Cermak, J., Kisela, T., Nechvatal, L. (2013). Stability Regions for Linear differential Systems and Their Discretizations, *Applied Mathematics and Computations* 219, 7012-7022.

Chen, F. (2011). Fixed Points and Asymptotic Stability of Nonlinear Fractional Difference Equations, *Elektronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No.*39, 1-18.

Chen, F., Liu, Z. (2012). Asymptotic stability results for nonlinear fractional difference equations, *Journal of Applied Mathematics Volume* 2012, Article ID 879657, 4 pages.

Chen, F., Luo, X., Zhou, Y.(2011) Existence Results for Nonlinear Fractional Difference Equation, *Advances in Difference Equations, Article ID* 713201, 12 pages.

Chen,F. ,Zhou, Y. (2011) Attractivity of fractional functional differential equations, *Comput. Math. Appl., doi:* 10.1016/j.camwa.2011.03.062.

Cheng, S. S., Patula, W. T. (1993). An Existence Theorem for a Nonlinear Difference Equation, *Nonlinear Anal.* 20, 193–203.

Dalir, M., Bashaur, M. (2010). Applications of fractional calculus, *Mathematical Sciences, Vol.* 4, 1021 – 1032.

Deng, W. (2010). Smoothness and stability of the solutions for nonlinear fractional differential equations, *Nonlinear Anal.* 72, 1768–1777.

Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematic, 3rd Edition, Springer, New York.

Goodrich, C., Peterson, A. (2015). *Discrete Fractional Calculus*, Springer.

Gurney, W.S., Blythe, S.P., Nisbet R. M. (1980) Nicholson's blowflies (revisited). *Nature* 287, 17-21.

Kilbas, A. A., Srivastava, Hari M., Trujillo (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam.

Kulenovic, M. R. S., Ladas, G and Scas, Y. G. (1989). Global attractivity in population dynamics, *Computers & Mathematics with Applications* 18, no. 10-11, 925928.

Li, J. (1996). Global attractivity in a discrete model of Nicholsons blowies, *Annuals of Differential Equations* 12, no. 2, 173-182.

Li, Y., Chen, Y., Podlubny, I. (2009). Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems, *Automatica* 45, 1965–1969.

Li, Y., Chen, Y., Podlubny, I. (2010.) Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability, *Comput. Math. Appl.* 59, 1810–1821.

Miller, K.S., Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley & Sons, New York, NY, USA.

Mohan, J., Deekshitulu, G.V.S.R. (2012). Fractional order difference equations, *International Journal of Difference Equations, Volume* 2012, Artical ID 780619, 11 pages.

Mohan, J., Shobanadevi, N., Deekshitulu, G.V.S.R. (2014). Stability of nonlinear nabla fractional difference equations using fixed point theorems, *Italian Journals of Pure and Applied Mathematics, No.*32, 165-184.

Nechvatal, L. (2014). On Asymptotics of Discrete Mittag-Leffler Function, *Mathematica Bohemica, No*:4, 667-675, 139.

Nicholson, A.J. (1954). An outline of the dynamics of animal populations. *Aust. J. Zool.* 2, 9-25.

Oldham. K.B., Sapanier, J. (2002). *The Fractional Calculus*, Dower Publications, Newyork.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego.

Sabatier, J., Agrawal O.P., Machado, J.A.T. (2007) *Advances in fractional calculus*, Springer, Dordrecht, The Netherlands.

Sabatier, J., Moze, M., Farges, C. (2010). LMI stability conditions for fractional order systems, *Comput. Math. Appl*. 59, 1594–1609.

Shobanadevi, N., Mohan, J. J. (2014). Stability of Linear Nabla Fractional Difference Equations, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*,17, No.4,pp 651-657.

So, J. W.H. and Yu, J. S. (1995). On the stability and uniform persistence of a discrete model of Nicholsons blowflies, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 193, no. 1, 233244.

Thabet, A. (2011). On Riemann and Caputo fractional differences, *Comput. Math. Appl.* 62, p.16021611, 2011.

Zou, Y. (2014). *Basic theory of fractional differential Equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London.