T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PELL VE PELL-LUCAS HİPER KOMPLEKS SAYILARI

Öznur BAYRAKCI KILDIR

Danışman	**Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ**
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI**
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KASTAMONU – 2019

TEZ ONAYI

Öznur BAYRAKCI KILDIR tarafından hazırlanan "**Pell ve Pell – Lucas Hiper Kompleks Sayıları**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde savunulmuş ve **oy birliği** ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ Kastamonu Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI Ankara Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Dr.Öğr.Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	.....

12/04/2019

Enstitü Müdürü Prof.Dr. Hasbi YAPRAK .....

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildirir ve taahhüt ederim.



Öznur BAYRAKCI KILDIR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PELL VE PELL – LUCAS HİPER KOMPLEKS SAYILARI

Öznur BAYRAKCI KILDIR
Kastamonu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ

Hiper kompleks sayıları inşa etmek için en bilinen yöntem Cayley-Dickson sürecidir. Literatür incelendiğinde Pell ve Pell – Lucas hiper kompleks sayılarına yönelik bir çok çalışma göze çarpmaktadır. Bu çalışmaların tamamında hiper kompleks sayıların sıralı tabanlarına Pell ve Pell-Lucas sayılarının da sıralı bir şekilde yerleştirildiği görülmektedir.

Bu çalışmada, Pell ve Pell-Lucas sayıları hiper kompleks sayıların sıralı tabanlarına rasgele olarak yerleştirildiğinde ne gibi değişiklikler olacağı incelenecektir. Kısıtlamasız 2^N Pell ve Pell-Lucas sayıları olarak isimlendirilecek olan bu hiper kompleks sayılar için Üreteç fonksiyonları, Binet formülleri verildikten sonra yine bu sayılar için Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri yanı sıra bir çok yeni özdeşlik verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları, Pell ve Pell-Lucas oktonyonları, Pell ve Pell-Lucas sedenyonları, Pell ve Pell-Lucas hiper kompleks sayıları

2019, 47 sayfa
Bilim Kodu: 204

ABSTRACT

MSc Thesis

PELL AND PELL – LUCAS HYPER COMPLEX NUMBERS

Öznur BAYRAKCI KILDIR
Kastamonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ

The well-known method for constructing hyper complex numbers is Cayley – Dickson process. There are many studies about Pell and Pell – Lucas hyper complex numbers but it can be seen that successive Pell and Pell – Lucas numbers were chosen as coefficients for the elements of ordered basis of hyper complex numbers in all these studies.

In this thesis, random Pell and Pell – Lucas numbers are put in the elements of ordered basis of hyper complex numbers. These numbers are called unrestricted Pell and Pell – Lucas 2^Ns. After the generating functions and the Binet formulas are given, many identities including Vajda, Catalan, Cassini and d'Ocagne are obtained.

Key Words: Pell and Pell-Lucas quaternions, Pell and Pell-Lucas octonions, Pell and Pell-Lucas sedenions, Pell and Pell-Lucas hyper complex numbers

2019, 47 pages
Science Code: 204

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Göksal BİLGİCİ (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) 'ye teşekkürlerimi borç bilirim.

Her zaman yanımda olan Eşim Ahmet KILDIR'a gösterdiği özveri ve desteğinden dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Öznur BAYRAKCI KILDIR
Kastamonu, Nisan, 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI ii

TAAHHÜTNAME iii

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ix

TABLOLAR DİZİNİ x

1.GİRİŞ 1

1.1.Fibonacci Sayıları 1

1.2.Pell ve Pell-Lucas Sayıları 2

1.3.Cayley–Dickson İnşası 3

1.4. Kuaterniyonlar 5

1.5. Oktonyonlar 6

1.6. Sedenyonlar 7

1.7. Fibonacci ve Lucas Hiper Kompleks Sayıları 10

1.8. Pell ve Pell-Lucas Hiper Kompleks Sayıları 11

2. KISITLAMASIZ PELL VE PELL LUCAS LERİ 13

2.1 Kısıtlamasız Pell ve Pell – Lucas 2^N-leri İçin Üreteç Fonksiyonları ve Binet Formülleri 14

2.2. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas $\mathbf{2^N}$-leri için Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne Özdeşlikleri 21

3. KISITLAMASIZ PELL VE PELL-LUCAS 2^N-LERİ İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER 27

KAYNAKLAR 43
ÖZGEÇMİŞ 47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
H	Reel kuaterniyonların kümesi
O	Reel oktonyonların kümesi
S	Reel sedenyonların kümesi
T_n	Lucas oktonyonları
$\hat{F}_n$	Fibonaci sedenyonları
$\hat{L}_n$	Lucas sedenyonları
QP_n	Pell kuaterniyonları
QPL_n	Pell-Lucas kuaterniyonları
$F_{N,r}^{\vec{c}}$	r-yinci kısıtlamasız Fibonacci 2^N sayıları
$L_{N,r}^{\vec{c}}$	r-yinci kısıtlamasız Lucas 2^N sayıları
$P_{N,r}^{\vec{c}}$	r-yinci kısıtlamasız Pell 2^N sayıları
$Q_{N,r}^{\vec{c}}$	r-yinci kısıtlamasız Pell-Lucas 2^N sayıları

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1. Hiper kompleks sayıların kaybolan özellikleri 5
Tablo 1.2. Kuaterniyon taban elemanlarının çarpım tablosu 5
Tablo 1.3. Oktonyon taban elemanlarının çarpım tablosu 6
Tablo 1.4. Sedenyon taban elemanlarının çarpım tablosu 8

1.GİRİŞ

1.1. Fibonacci Sayıları

Tam sayı dizileri arasında belki de en meşhur sayı dizisi olan Fibonacci dizisi aşağıdaki rekörsif bağıntıyı sağlayan tamsayılarla tanımlanır.

$F_0 = 0, F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$

Fibonacci sayılarına ilk kez 13.yy da Leonardo Fibonacci'nin "Liber Abaci" kitabının sonundaki tavşan problemi ile rastlanır. 19.yy da bu sayılara Lucas tarafından Fibonacci sayıları adı verilmiştir [21].

Bir başka meşhur sayı dizisi de Lucas sayılarının oluşturduğu dizidir. Lucas sayıları, Fibonacci sayıları ile aynı rekörsif eşitliği sağlarken sadece başlangıç koşulları değişmektedir. Yani Lucas sayıları;

$L_0 = 2, L_1 = 1$

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\ (n \geq 2)$

bağıntısı ile tanımlanır.

$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla;

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

Bu sayılar için Binet Formülleri ise sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ L_n = \alpha^n + \beta^n$$

gibidir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayıları $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Buarad pozitif kök α, altın oran olarak isimlendirilir ve çok önemli rollere sahiptir.

1.2. Pell ve Pell-Lucas Sayıları

Pell sayıları adını İngiliz Matematikçi John Pell (1611-1685)'den alır. John Pell, d pozitif tam kare olmayan bir tam sayı olmak üzere, $x^2 - dy^2 = (-1)^n)$ eşitliği üzerindeki çalışmalarından dolayı Pell sayıları ismini almıştır [22].

Diğer taraftan Pell sayıları P_n, Pell-Lucas sayıları Q_n ile gösterilirler ve sırasıyla aşağıdaki rekörsif bağıntılarla tanımlanırlar

$P_0 = 0,\ P_1 = 1$,

$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ (n≥ 2)

ve

$Q_0 = 1,\ Q_1 = 1,$

$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$(n≥ 2).

$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-x}{1-2x-x^2}$$

şeklindedir. Pell ve Pell-Lucas sayıları için Binet Formülleri ise sırasıyla:

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

ile verilir. Burada $\gamma = 1 + \sqrt{2}$, $\delta = 1 - \sqrt{2}$ sayıları $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir.

Pozitif kök γ, gümüş oran olarak adlandırılır ve Fibonacci sayılarındaki altın oran benzeri bir rol oynar. Literatürde Pell ve Pell-Lucas sayıları ve bu sayıların genelleştirilmeleri ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır [1, 6, 18, 19, 20 30, 32].

1.3. Cayley–Dickson İnşası

Hiper kompleks sayıları inşa etmek için en fazla kullanılan yöntem Cayley-Dickson inşasıdır. Bu bölümde bu inşa süreci izah edilecektir. $a + ib$ kompleks sayısı (a, b) olarak gösterilirse toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

ve

$(a, b).(c, d) = (ac - db, ad + cb)$

olarak yazılabilir. Bir kompleks sayısının eşleniği ise

$$(a,b)^* = (a^*, -b) = (a, -b)$$

şeklinde olur. Kuaterniyonlarda tamamen benzer şekilde inşa edilir. Bir kuaterniyon kompleks sayıların bir çifti olarak düşünülebilir. Buna göre $a, b, c, d \in R$ olmak üzere toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

ve

$$(a,b).(c,d) = (ac - d^*b)(da + bc^*)$$

olarak tanımlanır. Bir kuaterniyonun eşleniği ise

$$(a,b)^* = (a^*, -b)$$

olur. Bir kuaterniyon ile eşleniğinin çarpımı negatif olmayan bir reel sayıdır:

$$(a,b)^*(a,b) = (a^*, -b)(a,b) = (a^*a + b^*b, ba^* - ba^*) = (|a|^2 + |b|^2, o)$$

Bu şekilde devam edilerek sırasıyla oktonyon ve sedenyonlar da inşa edilir. Fakat her aşamada bazı cebirsel özellikler kaybolmaktadır. Bu durum aşağıdaki tabloda görülebilir.

Tablo 1.1. *Hiper kompleks sayıların kaybolan özellikleri*

CEBİR	Boyut	Sıralama	Değişme	Birleşme	Alternatiflik	Üs-Birleşimlilik	Sıfır Bölen
Reel	1	+	+	+	+	+	-
Kompleks Sayılar	2	-	+	+	+	+	-
Kuaterniyonlar	4	-	-	+	+	+	-
Oktonyonlar	8	-	-	-	+	+	-
Sedenyonlar	16≥	-	-	-	-	+	+

1.4. Kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar 1843 yılında Sir W.R. Hamilton tarafından kompleks sayıları genişletmek amacıyla tanımlanmıştır. Reel kuaterniyonların kümesi;

$$H = \{a.e_0 + b.e_1 + c.e_2 + d.e_3 : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir ve bu küme tabanı $\{e_0 = 1, e_1, e_2, e_3\}$ olan bir bölüm cebiridir. *H*'nın taban elemanlarının çarpım tablosu aşağıdadır.

Tablo 1.2. *Kuaterniyon taban elemanlarının çarpım tablosu*

	1	e_1	e_2	e_3
1	-1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Bir q kuaterniyonu $q = \sum_{i=0}^{3} a_i e_i$ şeklinde gösterilir. q kuaterniyonun eşleniği;

$$\bar{q} = a_0 e_0 - \sum_{i=1}^{3} a_i e_i$$

şeklindedir. q kuaterniyonunun normu ise

$$\|q\| = q.\bar{q}=a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

ile verilir.

1.5. Oktonyonlar

Oktonyonlar, kuaterniyonlar gibi Cayley-Dickson süreci kullanılarak inşa edilirler. İlk olarak 1843 yılında Graves'in Hamilton'a yazmış olduğu bir mektupta karşılaşılmıştır. Daha sonra Arthur Cayley, tekrar keşfetmiş ve bunları yayınlamıştır [26]. Tüm reel oktonyonların kümesi

$$O = \{a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_7 e_7 : \quad a_0, \ldots, a_7 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir ve reel sayılar üzerinde normlu bir bölüm cebiri oluştururlar. Taban elemanlarının çarpım tablosu aşağıdaki gibidir.

Tablo 1.3. *Oktonyon taban elemanlarının çarpım tablosu*

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	$-e_3$	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Bir reel oktonyon

$$\mathrm{o} = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i$$

olmak üzere eşleniği

$$\bar{\mathrm{o}} = a_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i e_i,$$

normu ise

$$\|o\| = o.\bar{o} = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_7^2$$

şeklindedir. Oktonyonlar birleşme özelliğini sağlamazlar.

1.6. Sedenyonlar

Yine Cayley-Dickson süreci kullanılarak inşa edilen bir başka hiper kompleks sayılar olan sedenyonlar, reel sayılar üzerinde 16 boyutlu, değişmeli ve birleşmeli olmayan bir cebirdir. Sedenyonlar, oktonyonlardan farklı olarak alternatif cebir değildir [25].

Tüm sedenyonların kümesi

$$S = \{a_0 e_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_{15} e_{15}; a_0, a_1 \ldots, a_{15} \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilirler ve taban elemanlarının çarpımı aşağıdaki gibidir.

Tablo 1.4. *Sedenyon taban elemanlarının çarpım tablosu[11].*

	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
1	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	$-e_3$	-1	$-e_1$	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	e_{11}	e_8	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	-1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Bir sedenyon

$$s = \sum_{i=0}^{15} a_i e_i$$

olmak üzere, eşleniği

$$\bar{s} = a_0 - \sum_{i=1}^{15} a_i e_i$$

ve normu

$$\|s\| = s.\bar{s} = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{15}^2$$

ile verilir.

Yukarıda anlatılanlar göz önüne alındığında kısaca

1-ons: Reel Sayılar

2-ons: Kompleks sayılar

4-ons: Kuaterniyonlar

8-ons: Oktonyonlar

16-ons: Sedenyonlar

olarak özetlenebilir.

1.7. Fibonacci ve Lucas Hiper Kompleks Sayıları

Horadam [15], Fibonacci kuaterniyonlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$Q_n = F_n + e_1F_{n+1} + e_2F_{n+2} + e_3F_{n+3}.$$

Burada F_n, n. Fibonacci sayısıdır. Daha sonra Iyer [16] benzer şekilde Lucas kuaterniyonlarını $T_n = L_n + e_1L_{n+1} + e_2L_{n+2} + e_3L_{n+3}$ şeklinde tanımlamıştır.

Halıcı [14], Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki Binet formüllerini vermiştir.

$$Q_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \quad T_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\alpha + \beta}$$

burada

$$\underline{\alpha} = 1 + e_1\alpha + e_2\alpha^2 + e_3\alpha^3$$

$$\underline{\beta} = 1 + e_1\beta + e_2\beta^2 + e_3\beta^3$$

şeklindedir.

Literatürde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları veya bunların genelleştirilmeleri ile ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır [2, 3, 13, 23, 24, 27, 29].

Daha sonra Keçilioğlu ve Akkuş [17], Fibonacci ve Lucas oktonyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayarak, birçok özelliğini vermişlerdir:

$$Q_n = \sum_{i=0}^{7} F_{n+i}\, e_i$$

$$T_n = \sum_{i=0}^{7} L_{n+i}\, e_i.$$

Son olarak Bilgici vd [5], Fibonacci ve Lucas sedenyonlarını

$$\hat{F}_n = \sum_{s=0}^{15} F_{n+s}\, e_s$$

$$\hat{L}_n = \sum_{s=0}^{15} L_{n+s}\, e_s$$

olarak tanımlayarak incelemişlerdir.

1.8. Pell ve Pell-Lucas Hiper Kompleks Sayıları

Çimen ve İpek [12], P_n, n-yinci Pell, PL_n ise n-yinci Pell-Lucas sayısı olmak üzere Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlarını sırasıyla;

$$QP_n = P_n + e_1 P_{n+1} + e_2 P_{n+2} + e_3 P_{n+3}$$

ve

$$QPL_n = PL_n + e_1 PL_{n+1} + e_2 PL_{n+2} + e_3 PL_{n+3}$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Daha sonra bu sayılar için Binet formüllerini

$$QP_n = \frac{\gamma^n A - \delta^n B}{\gamma - \delta} \text{ ve } QPL_n = \frac{\gamma^n A + \delta^n B}{2}$$

olarak hesaplamışlardır. Burada $A = \sum_{s=0}^{3} \gamma^s e_s$ ve $B = \sum_{s=0}^{3} \delta^s e_s$ şeklindedir.

Bu tanımlamalardan sonra Çimen ve İpek ile daha sonra Szynal–Liana ve Wloch [28] bu sayılarla ilgili birçok özdeşlik vermişlerdir.

Aynı çalışmalarında Szynan–Liana ve Wloch,Pell oktonyonlarını

$$T_n = \sum_{s=1}^{7} P_{n+s} e_s$$

$$Q_n = \sum_{s=1}^{7} Q_{n+s} e_s$$

olarak tanımlamışlardır.

Yine literatürde Pell ve Pell-Lucas hiper kompleks sayıları ile ilgili bazı çalışmalar göze çarpmaktadır [4, 7, 8, 9, 10, 31].

Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas hiper kompleks sayıları ile alakalı çalışmalarda e_i taban elemanlarının katsayısı olarak ilgili tamsayısı dizisinin terimlerinin ardışık olarak yerleştirilerek bir tanım verildiği görülmektedir.

Bilgici ve Daşdemir çalışmalarında bu duruma farklı bir yaklaşım getirmek için rasgele Fibonacci ve Lucas sayılarını katsayılara yerleştirmişler ve aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

N=0,…,4 ve $c_1, c_2, \dots, c_{2^N-1}$ tam sayılar ve $\vec{c} = (c_0 = 0, c_1, \dots, c_{2^N-1})$ vektörü olmak üzere r-yinci Fibonacci ve Lucas 2^N leri sırasıyla

$$F_{N,r}^{\vec{c}} = \sum_{i=0}^{2^N-1} F_{r+ci} e_i$$

ve

$$L_{N,r}^{\vec{c}} = \sum_{i=0}^{2^N-1} L_{r+ci} e_i$$

olarak tanımlanır.

2. KISITLAMASIZ PELL VE PELL LUCAS 2^N LERİ

Bu çalışmada, N=0,…,4 ve $c_1, c_2, \dots, c_{2^N-1}$ tam sayılar ve $\vec{c} = (c_0 = 0, c_1, \dots, c_{2^N-1})$ vektörü olmak üzere, kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas 2^N lerine benzer şekilde r-yinci kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N sayıları aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

$$P_{N,r}^{\vec{c}} = \sum_{i=0}^{2^N-1} P_{r+ci}\, e_i$$

ve

$$Q_{N,r}^{\vec{c}} = \sum_{i=0}^{2^N-1} Q_{r+ci}\, e_i.$$

Pell ve Pell-Lucas sayılarının tanımından aşağıdaki rekörsif bağıntıları kolayca elde edebiliriz.

$$P_{N,r}^{\vec{c}} = 2P_{N,r-1}^{\vec{c}} + P_{N,r-2}^{\vec{c}}$$

ve

$$Q_{N,r}^{\vec{c}} = 2Q_{N,r-1}^{\vec{c}} + Q_{N,r-2}^{\vec{c}}.$$

N'nin ve $\vec{c}$ nin seçimi bazı özel durumları verir:

N=0 ve $\vec{c} = (0)$, klasik Pell ve Pell-Lucas sayılarını,

N=1 ve $\vec{c} = (0,1)$, Pell ve Pell-Lucas kompleks sayılarını,

N=2 ve $\vec{c} = (0,1,2,3)$, Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlarını,

N=3 ve $\vec{c} = (0,1, \dots,7)$, Pell ve Pell-Lucas oktonyonlarını,

N=4 ve $\vec{c} = (0,1,\ldots,15)$, Pell ve Pell-Lucas sedenyonlarını

Bir örnek vermek gerekirse

$P_8 + P_{12}e_1 + P_{-16}e_3 + P_{21}e_7$ oktonyonu $P_{3,8}^{(0,4,-8,-24,-8,-8,-8,13)}$

$P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n$ ve $Q_{-n} = (-1)^n Q_n$ özdeşlikleri kullanılarak negatif indisli kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N leri için aşağıdaki eşitlikleri verilebilir.

$$P_{N,-r}^{\vec{c}} = (-1)^{r+1}\left[\sum_{i=0}^{2^N-1}(-1)^{c_i} P_{r-c_i}e_i\right]$$

ve

$$Q_{N,-r}^{\vec{c}} = (-1)^{r}\left[\sum_{i=0}^{2^N-1}(-1)^{c_i} Q_{r-c_i}e_i\right].$$

2.1 Kısıtlamasız Pell ve Pell – Lucas 2^N leri İçin Üreteç Fonksiyonları ve Binet Formülleri

Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet Formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1. Her *r* tam sayısı için *r* –yinci kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas sayıları sırasıyla

$$P_{N,r}^{\vec{c}} = \frac{\check{\gamma}\gamma^r - \check{\delta}\delta^r}{\gamma - \delta}$$

ve

$$Q_{N,r}^{\vec{c}} = \frac{\check{\gamma}\gamma^r + \check{\delta}\delta^r}{2}$$

şeklindedir. Burada

$$\breve{\gamma} = \sum_{i=0}^{2^N-1} \gamma^{c_i} e_i$$

ve

$$\breve{\delta} = \sum_{i=0}^{2^N-1} \delta^{c_i} e_i$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell 2^N lerinin tanımı ve Pell sayıları için Binet Formülünden

$$P_{N,r}^{\vec{c}} = P_r + P_{n+c_1} e_1 + \cdots + P_{n+c_{2^N-1}} e_{2^N-1}$$

$$= \frac{1}{\gamma-\delta}(\gamma^r - \delta^r + (\gamma^{r+c_1} - \delta^{r+c_1})e_1 + (\gamma^{r+c_2} - \delta^{r+c_2})e_2$$
$$+ \qquad \ldots + \left(\gamma^{r+c_{2^N-1}} - \delta^{r+c_{2^N-1}}\right)e_{2^N-1}$$

$$= \frac{1}{\gamma-\delta}\left[\gamma^r\left(\gamma^{c_1} + \gamma^{c_2} + \cdots + \gamma^{c_{(2^N-1)}}\right) + \delta^r\left(\delta^{c_1} + \delta^{c_2} + \cdots + \delta^{c_{(2^N-1)}}\right)\right]$$
$$= \frac{\breve{\gamma}\gamma^r + \breve{\delta}\delta^r}{2}. \qquad \blacksquare$$

Benzer şekilde kısıtlamasız Pell-Lucas 2^N leri için binet formülü elde edilir.

Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N dizileri için üreteç fonksiyonları veren teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2. $\{P_{N,r}^{\vec{c}}\}_{r=0}^{\infty}$ ve $\{Q_{N,r}^{\vec{c}}\}_{r=0}^{\infty}$ dizileri için üreteç fonksiyonları sırasıyla;

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_{N,i}\, x^i = \frac{P_{N,0}^{\vec{c}} + x(P_{N,1}^{\vec{c}} - 2P_{N,0}^{\vec{c}})}{1 - 2x - x^2}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_{N,i}\, x^i = \frac{Q_{N,0}^{\vec{c}} + x(Q_{N,1}^{\vec{c}} - 2Q_{N,0}^{\vec{c}})}{1 - 2x - x^2}$$

şeklindedir.

İspat.

$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{N,i}^{\vec{c}}\, x^i$ diyelim. Buradan

$$P(x) = P_{N,0}^{\vec{c}} + P_{N,1}^{\vec{c}} x + \sum_{i=2}^{\infty} P_{N,i}^{\vec{c}}\, x^i \qquad (2.1)$$

elde edilir. Sırasıyla -2*x* ve $-x^2$ ile çarpılırsa

$$-2\text{xP(x)} = \ -2\text{x}P_{N,0}^{\vec{c}} - \sum_{i=2}^{\infty} 2P_{N,i-1}^{\vec{c}}\, x^i \qquad (2.2)$$

ve

$$-x^2 P(x) = -\sum_{i=2}^{\infty} P_{N,i-2}^{\vec{c}}\, x^i \qquad (2.3)$$

bulunur.

(2.1), (2.2) ve (2.3) eşitlikleri toplanırsa

$$(1 - 2x - x^2)P(x) = P_{N,0}^{\vec{c}} + x\left(P_{N,1}^{\vec{c}} - 2P_{N,0}^{\vec{c}}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} (P_{N,i}^{\vec{c}} - 2P_{N,i-1}^{\vec{c}} - P_{N,i-2}^{\vec{c}})x^i$$
$$= P_{N,0}^{\vec{c}} + x\left(P_{N,1}^{\vec{c}} - 2P_{N,0}^{\vec{c}}\right)$$

Buradan ise

$$P(x) = \frac{P_{N,0}^{\vec{c}} + x\left(P_{N,1}^{\vec{c}} - 2P_{N,0}^{\vec{c}}\right)}{1 - 2x - x^2}$$

elde edilir.

Şimdi ise $Q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} Q_{N,i}^{\vec{c}}\, x^i$ diyelim. Buradan

$$Q(x) = Q_{N,0}^{\vec{c}} + Q_{N,1}^{\vec{c}} x + \sum_{i=2}^{\infty} Q_{N,i}^{\vec{c}}\, x^i \tag{2.4}$$

elde edilir. Sırasıyla -2*x* ve $-x^2$ ile çarpılırsa

$$-2\text{xQ(x)} = -2\text{x}Q_{N,0}^{\vec{c}} - \sum_{i=2}^{\infty} 2Q_{N,i-1}^{\vec{c}}\, x^i \tag{2.5}$$

ve

$$-x^2 Q(x) = -\sum_{i=2}^{\infty} Q_{N,i-2}^{\vec{c}}\, x^i \tag{2.6}$$

bulunur.

(2.4), (2.5) ve (2.6) eşitlikleri toplanırsa

$$\begin{aligned}(1 - 2x - x^2)Q(x) &= Q_{N,0}^{\vec{c}} + x\left(Q_{N,1}^{\vec{c}} - 2Q_{N,0}^{\vec{c}}\right) + \sum_{i=2}^{\infty} (Q_{N,i}^{\vec{c}} - 2Q_{N,i-1}^{\vec{c}} - Q_{N,i-2}^{\vec{c}})x^i \\ &= Q_{N,0}^{\vec{c}} + x\left(Q_{N,1}^{\vec{c}} - 2Q_{N,0}^{\vec{c}}\right)\end{aligned}$$

Buradan ise

$$Q(x) = \frac{Q_{N,0}^{\vec{c}} + x\left(Q_{N,1}^{\vec{c}} - 2Q_{N,0}^{\vec{c}}\right)}{1 - 2x - x^2} \qquad \blacksquare$$

Sonraki ispatlarda kullanmak üzere aşağıdaki kümenin tanımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Her $i \in \{1,2, \dots, 2^{N-1} - 1\}$ için

$$S_i = \{(j,k): e_i e_j = e_k, 1 \le j,k \le 2^{N-1} - 1, i \ne j, i \ne k \; ve \; j \ne k\} \tag{2.7}$$

kümesi tanımlansın. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Lemma 2.3. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere

$$\breve{\gamma}\breve{\delta} = Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}} \tag{2.8}$$

ve

$$\breve{\delta}\breve{\gamma} = Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}} \tag{2.9}$$

dir. Burada $Y_N^{\vec{c}}$ ve $Z_N^{\vec{c}}$ sırasıyla aşağıdaki gibidir

$$Y_N^{\vec{c}} = 2Q_{N,0}^{\vec{c}} - \sum_{i=0}^{2^N-1}(-1)^{c_i} \tag{2.10}$$

ve

$$Z_N^{\vec{c}} = \sum_{i=1}^{2^N-1} e_i \sum_{(j,k)\in S_i}(-1)^{c_k} P_{c_j-c_k}. \tag{2.11}$$

İspat.

N=3 için

$$\breve{\gamma}\breve{\delta} = (1+\gamma^{c_1}e_1+\gamma^{c_2}e_2+\gamma^{c_3}e_3)+(1+\delta^{c_1}e_1+\delta^{c_2}e_2+\delta^{c_3}e_3)$$

$$= 1-(\gamma\delta)^{c_1}-(\gamma\delta)^{c_2}-(\gamma\delta)^{c_3}+(\gamma^{c_1}+\delta^{c_1}+\gamma^{c_2}\delta^{c_3}-\gamma^{c_3}\delta^{c_2})e_1+(\gamma^{c_2}$$
$$+\delta^{c_2}+\gamma^{c_3}\delta^{c_1}-\gamma^{c_1}\delta^{c_3})e_2+(\gamma^{c_3}+\delta^{c_3}+\gamma^{c_1}\delta^{c_2}-\gamma^{c_2}\delta^{c_1})e_3$$

$$= 1+(-1)^{c_1+1}+(-1)^{c_2+1}+(-1)^{c_3+1}+\left(Q_{c_1}+(-1)^{c_2}2\sqrt{2}P_{c_2-c_3}\right)e_1$$
$$+\left(Q_{c_2}+(-1)^{c_3}2\sqrt{2}P_{c_3-c_1}\right)e_2+\left(Q_{c_3}+(-1)^{c_1}2\sqrt{2}P_{c_1-c_2}\right)e_3$$

$$Y_3^{\vec{c}} = Q_{3,0}^{\vec{c}}+(-1)^{c_1+1}+(-1)^{c_2+1}+\cdots+(-1)^{c_7+1}-1$$

ve

$$Z_3^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_3} P_{c_2-c_3} + (-1)^{c_5} P_{c_4-c_5} + (-1)^{c_6} P_{c_7-c_6}\right] e_1$$

$$= \left[(-1)^{c_1} P_{c_3-c_1} + (-1)^{c_6} P_{c_4-c_6} + (-1)^{c_7} P_{c_5-c_7}\right] e_2$$

$$= \left[(-1)^{c_2} P_{c_1-c_2} + (-1)^{c_5} P_{c_6-c_5} + (-1)^{c_7} P_{c_4-c_7}\right] e_3$$

$$= \left[(-1)^{c_1} P_{c_5-c_1} + (-1)^{c_2} P_{c_6-c_2} + (-1)^{c_3} P_{c_7-c_3}\right] e_4$$

$$= \left[(-1)^{c_2} P_{c_7-c_2} + (-1)^{c_4} P_{c_1-c_4} + (-1)^{c_6} P_{c_3-c_6}\right] e_5$$

$$= \left[(-1)^{c_3} P_{c_5-c_3} + (-1)^{c_4} P_{c_2-c_4} + (-1)^{c_7} P_{c_1-c_7}\right] e_6$$

$$= \left[(-1)^{c_1} P_{c_6-c_1} + (-1)^{c_4} P_{c_3-c_4} + (-1)^{c_5} P_{c_2-c_5}\right] e_7$$

N=4 için

$Y_4^{\vec{c}} = Q_{4,0}^{\vec{c}} + (-1)^{c_1+1} + (-1)^{c_2+1} + \cdots + (-1)^{c_{15}+1} - 1$ olarak hesaplanır. $Z_4^{\vec{c}}$ de her bir e_i (i = 1,…,15) taban elemanı 7 terim içermektedir. Bu katsayıların her biri için (2.7) eşitliğindeki S_i kümelerini hesaplamamız gereklidir. Buna göre

$$S_1 = \{(2,3), (4,5), (7,6), (8,9), (11,10), (13,12), (14,15)\},$$

$$S_2 = \{(3,1), (4,6), (5,7), (8,10), (9,11), (14,12), (15,13)\},$$

$$S_3 = \{(1,2), (6,5), (4,7), (10,9), (8,11), (15,12), (13,14)\},$$

$$S_4 = \{(5,1), (6,2), (7,3), (8,12), (9,13), (10,14), (11,15)\},$$

$$S_5 = \{(7,2), (1,4), (3,6), (12,9), (14,11), (8,13), (10,15)\},$$

$$S_6 = \{(5,3), (2,4), (1,7), (15,9), (12,10), (11,13), (8,14)\}$$

$$S_7 = \{(6,1), (3,4), (2,5), (13,10), (12,11), (9,14), (8,15)\},$$

$$S_8 = \{(9,1),(10,2),(11,3),(12,4),(13,5),(14,6),(15,7)\},$$

$$S_9 = \{(11,2),(13,4),(14,7),(1,8),(3,10),(5,12),(6,15)\},$$

$$S_{10} = \{(9,3),(14,4),(15,5),(2,8),(1,11),(6,12),(7,13)\},$$

$$S_{11} = \{(10,1),(15,4),(13,6),(3,8),(2,9),(7,12),(5,14)\},$$

$$S_{12} = \{(9,5),(10,6),(11,7),(4,8),(1,13),(2,14),(3,15)\},$$

$$S_{13} = \{(12,1),(14,3),(10,7),(5,8),(4,9),(6,11),(2,15)\},$$

$$S_{14} = \{(15,1),(12,2),(11,5),(6,8),(7,9),(4,10),(3,13)\},$$

$$S_{15} = \{(13,2),(12,3),(9,6),(7,8),(5,10),(4,11),(1,14)\},$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_3}P_{c_2-c_3} + (-1)^{c_5}P_{c_4-c_5} + (-1)^{c_6}P_{c_7-c_6} + (-1)^{c_9}P_{c_8-c_9} + (-1)^{c_{10}}P_{c_{11}-c_{10}} + (-1)^{c_{12}}P_{c_{13}-c_{12}} + (-1)^{c_{15}}P_{c_{14}-c_{15}}\right]e_1$$

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_1}P_{c_3-c_1} + (-1)^{c_6}P_{c_4-c_6} + (-1)^{c_7}P_{c_5-c_7} + (-1)^{c_{10}}P_{c_8-c_{10}} + (-1)^{c_{11}}P_{c_9-c_{11}} + (-1)^{c_{12}}P_{c_{14}-c_{12}} + (-1)^{c_{13}}P_{c_{15}-c_{13}}\right]e_2$$

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_2}P_{c_1-c_2} + (-1)^{c_5}P_{c_6-c_5} + (-1)^{c_7}P_{c_4-c_7} + (-1)^{c_9}P_{c_{10}-c_9} + (-1)^{c_{11}}P_{c_8-c_{11}} + (-1)^{c_{12}}P_{c_{15}-c_{12}} + (-1)^{c_{14}}P_{c_{13}-c_{14}}\right]e_3$$

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_1}P_{c_5-c_1} + (-1)^{c_2}P_{c_6-c_2} + (-1)^{c_3}P_{c_7-c_3} + (-1)^{c_{12}}P_{c_8-c_{12}} + (-1)^{c_{13}}P_{c_9-c_{13}} + (-1)^{c_{14}}P_{c_{10}-c_{14}} + (-1)^{c_{15}}P_{c_{11}-c_{15}}\right]e_4$$

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_2}P_{c_7-c_2} + (-1)^{c_4}P_{c_1-c_4} + (-1)^{c_6}P_{c_3-c_6} + (-1)^{c_9}P_{c_{12}-c_9} + (-1)^{c_{13}}P_{c_{14}-c_{11}} + (-1)^{c_{13}}P_{c_8-c_{13}} + (-1)^{c_{15}}P_{c_{10}-c_{15}}\right]e_5$$

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_3}P_{c_5-c_3} + (-1)^{c_4}P_{c_2-c_4} + (-1)^{c_7}P_{c_1-c_7} + (-1)^{c_9}P_{c_{15}-c_9} + (-1)^{c_{10}}P_{c_{12}-c_{10}} + (-1)^{c_{13}}P_{c_{11}-c_{13}} + (-1)^{c_{14}}P_{c_8-c_{14}}\right]e_6$$

$$Z_4^{\vec{c}} = \left[(-1)^{c_1}P_{c_6-c_1} + (-1)^{c_4}P_{c_3-c_4} + (-1)^{c_5}P_{c_2-c_5} + (-1)^{c_{10}}P_{c_{13}-c_{10}} + (-1)^{c_{11}}P_{c_{12}-c_{11}} + (-1)^{c_{14}}P_{c_9-c_{14}} + (-1)^{c_{15}}P_{c_8-c_{15}}\right]e_7 \quad \blacksquare$$

2.2. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne Özdeşlikleri

Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Vajda özdeşliği bir sonraki teoremde verilmiştir.

Sonraki bölümlerde kolaylık için $P_{N,r}^{\vec{c}}$ ve $Q_{N,r}^{\vec{c}}$ gösterimleri yerine kısaca $P_r^{\vec{c}}$ ve $Q_r^{\vec{c}}$ gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 2.4. (Vajda özdeşliği)

Her $n, r, s, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{2^N-1}$ tam sayıları için

$$P_{n+r}^{\vec{c}}P_{n+s}^{\vec{c}} - P_n^{\vec{c}}P_{n+r+s}^{\vec{c}} = (-1)^n P_r(P_s Y_N^{\vec{c}} - 2Q_s Z_N^{\vec{c}}) \tag{2.12}$$

ve

$$Q_{n+r}^{\vec{c}}Q_{n+s}^{\vec{c}} - Q_n^{\vec{c}}Q_{n+r+s}^{\vec{c}} = 2(-1)^{n+1} P_r(P_s Y_N^{\vec{c}} - 2Q_s Z_N^{\vec{c}}) \tag{2.13}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell 2^N-leri için Binet formülünü kullanarak

$$P_{n+r}^{\vec{c}}P_{n+s}^{\vec{c}} - P_n^{\vec{c}}P_{n+r+s}^{\vec{c}} =$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[\left(\breve{\gamma}\gamma^{n+r} - \breve{\delta}\delta^{n+r}\right)\left(\breve{\gamma}\gamma^{n+s} - \breve{\delta}\delta^{n+s}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\breve{\gamma}\gamma^{n} - \breve{\delta}\delta^{n}\right)\left(\breve{\gamma}\gamma^{n+r+s} - \breve{\delta}\delta^{n+r+s}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[(\breve{\gamma})^2\gamma^{2n+r+s} + (\breve{\delta})^2\delta^{2n+r+s} - \breve{(\gamma\delta)}\gamma^{n+r}\delta^{n+s} - \breve{(\delta\gamma)}\gamma^{n+s}\delta^{n+r}\right.$$
$$\left. - (\breve{\gamma})^2\gamma^{2n+r+s} - (\breve{\gamma})^2\delta^{2n+r+s} + \breve{(\gamma\delta)}\gamma^{n}\delta^{n+r+s} + \breve{(\delta\gamma)}\gamma^{n+r+s}\delta^{n}\right]$$

$$= \frac{(\gamma\delta)^n}{(\gamma-\delta)^2}\left[-\breve{(\gamma\delta)}\gamma^{r}\delta^{s} - \breve{(\delta\gamma)}\gamma^{s}\delta^{r} + \breve{(\gamma\delta)}\delta^{r+s} + \breve{(\delta\gamma)}\gamma^{r+s}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{(\gamma-\delta)^2}\left[(\gamma^r - \delta^r)(-\breve{(\gamma\delta)}\delta^{s} + \breve{(\delta\gamma)}\gamma^{s})\right]$$

$$= \frac{(-1)^n P_r}{(\gamma-\delta)}\left[\breve{(\delta\gamma)}\gamma^{s} - \breve{(\gamma\delta)}\delta^{s}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n P_r}{2\sqrt{2}}\left[(Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}})\gamma^{s} - (Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}})\delta^{s}\right]$$

$$= (-1)^n P_r(P_s Y_N^{\vec{c}} - 2Q_s Z_N^{\vec{c}})$$

elde edilir.

$$Q_{n+r}^{\vec{c}}Q_{n+s}^{\vec{c}} - Q_n^{\vec{c}}Q_{n+r+s}^{\vec{c}} = 2(-1)^{n+1}P_r(P_s Y_N^{\vec{c}} - 2Q_s Z_N^{\vec{c}})$$

$$Q_{n+r}^{\vec{c}}Q_{n+s}^{\vec{c}} - Q_n^{\vec{c}}Q_{n+r+s}^{\vec{c}} =$$

$$= \left[\frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^{n+r} - \breve{\delta}\delta^{n+r}\right)}{2}\frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^{n+s} - \breve{\delta}\delta^{n+s}\right)}{2} - \frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^{n} - \breve{\delta}\delta^{n}\right)}{2}\frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^{n+r+s} - \breve{\delta}\delta^{n+r+s}\right)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\breve{\gamma})^2\gamma^{2n+r+s} + \left(\breve{\delta}\right)^2\delta^{2n+r+s} + \left(\breve{\gamma}\breve{\delta}\right)\gamma^{n+r}\delta^{n+s} + \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)\gamma^{n+s}\delta^{n+r}\right.$$
$$\left. - (\breve{\gamma})^2\gamma^{2n+r+s} - \left(\breve{\delta}\right)^2\delta^{2n+r+s} - \left(\breve{\gamma}\breve{\delta}\right)\gamma^{n}\delta^{n+r+s} - \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)\gamma^{n+r+s}\delta^{n}\right]$$

$$= \frac{(\gamma\delta)^n}{4}\left[(\check{\gamma}\check{\delta})\gamma^r\delta^s + (\check{\delta}\check{\gamma})\gamma^s\delta^r - (\check{\gamma}\check{\delta})\delta^{r+s} - (\check{\delta}\check{\gamma})\gamma^{r+s}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{4}\left[\check{\gamma}\check{\delta}\delta^s(\gamma^r - \delta^r) - \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^s(\gamma^r - \delta^r)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{4}(\gamma^r - \delta^r)\left[\check{\gamma}\check{\delta}\delta^s - \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^s\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{(-1)^n}{4}P_r\left[\check{\gamma}\check{\delta}\delta^s - \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^s\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{(-1)^{n+1}}{4}P_r\left[\check{\delta}\check{\gamma}\gamma^s - \check{\gamma}\check{\delta}\delta^s\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{(-1)^{n+1}}{4}P_r\left[\left(Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\gamma^s - \left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\delta^s\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^{n+1}P_r\left[Y_N^{\vec{c}}(\gamma^s - \delta^s) - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}(\gamma^s - \delta^s)\right]$$

$$= 2(-1)^{n+1}P_r\left[Y_N^{\vec{c}}P_s - 2Q_sZ_N^{\vec{c}}\right]$$

elde edilir. ■

Vajda özdeşliğinde (2.12) eşitliğinde s=-r alınıp $P_rP_{-r} = -(-1)^rP_r^2$ ve $2P_rQ_{-r} = (-1)^rP_{2r}$ özdeşlikleri kullanılırsa kısıtlamasız Pell ve Pell Lucas 2^N leri için Catalan özdeşliği aşağıdaki gibi kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 2.5. (Catalan Özdeşliği)

$N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $n, r, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_{n+r}^{\vec{c}}P_{n-r}^{\vec{c}} - \left[P_n^{\vec{c}}\right]^2 = (-1)^{n+r+1}(Y_N^{\vec{c}}P_r^2 + Z_N^{\vec{c}}P_{2r}) \qquad (2.14)$$

ve

$$Q_{n+r}^{\vec{c}}Q_{n-r}^{\vec{c}} - \left[Q_n^{\vec{c}}\right]^2 = 2(-1)^{n+r}(Y_N^{\vec{c}}P_r^2 + Z_N^{\vec{c}}P_{2r}) \qquad (2.15)$$

dir.

(2.14) ve (2.15) Catalan özdeşliklerinde $r = 1$ alınırsa aşağıdaki Cassini özdeşlikleri elde edilir.

Sonuç 2.6. (Cassini özdeşliği)

$N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $n, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_{n+1}^{\mathrm{c}}P_{n-1}^{\mathrm{c}} - [P_n^{\mathrm{c}}]^2 = (-1)^n(Y_N^{\vec{c}} + 2Z_N^{\vec{c}})$$

ve

$$Q_{n+1}^{c}Q_{n-1}^{\mathrm{c}} - [Q_n^{\mathrm{c}}]^2 = -2(-1)^n(Y_N^{\vec{c}} + 2Z_N^{\vec{c}})$$

dir.

Teorem 2.7. (d'Ocagne Özdeşliği)

$N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, n, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_m^c P_{n+1}^{\mathrm{c}} - P_{m+1}^{\mathrm{c}}P_n^c = (-1)^n(Y_N^{\vec{c}}p_{m-n} + 2Z_N^{\vec{c}}q_{m-n})$$

ve

$$Q_m^{\mathrm{c}}Q_{n+1}^{\mathrm{c}} - Q_{m+1}^{\mathrm{c}}Q_n^{\mathrm{c}} = -2(-1)^n\left(Y_N^{\vec{c}}p_{m-n} + 2Z_N^{\vec{c}}q_{m-n}\right).$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell 2^N-leri için Binet formülünü kullanarak

$$P_m^c P_{n+1}^c - P_{m+1}^c P_n^c$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m\right)\left(\check{\gamma}\gamma^{n+1} - \check{\delta}\delta^{n+1}\right) - \left(\check{\gamma}\gamma^{m+1} - \check{\delta}\delta^{m+1}\right)\left(\check{\gamma}\gamma^n - \check{\delta}\delta^n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(-\check{\gamma}\check{\delta}\gamma^m\delta^{n+1} - \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^{n+1}\delta^m + \check{\gamma}\check{\delta}\gamma^{m+1}\delta^n + \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^n\delta^{m+1}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{8}\left[\check{\gamma}\check{\delta}(\gamma-\delta)\gamma^{m-n} - \check{\delta}\check{\gamma}(\gamma-\delta)\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\check{\delta}\gamma^{m-n} - \check{\delta}\check{\gamma}\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2}}\left[\left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\gamma^{m-n} - \left(Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{2}}\left[Y_N^{\vec{c}}(\gamma^{m-n} - \delta^{m-n}) + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}(\gamma^{m-n} - \delta^{m-n})\right].$$

elde edilir.

Yine kısıtlamasız Pell 2^N leri için Binet formülü kullanılarak

$$Q_m^c Q_{n+1}^c - Q_{m+1}^c Q_n^c =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\check{\gamma}\gamma^m + \check{\delta}\delta^m\right)\left(\check{\gamma}\gamma^{n+1} + \check{\delta}\delta^{n+1}\right) - \left(\check{\gamma}\gamma^{m+1} + \check{\delta}\delta^{m+1}\right)\left(\check{\gamma}\gamma^n + \check{\delta}\delta^n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left((\check{\gamma})^2\gamma^{m+n+1} + \left(\check{\delta}\right)^2\delta^{m+n+1} + \left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^m\delta^{n+1} + \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\gamma^{n+1}\delta^m\right) - \left((\check{\gamma})^2\gamma^{m+n+1} + \left(\check{\delta}\right)^2\delta^{m+n+1} + \left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^{m+1}\delta^n + \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\gamma^n\delta^{m+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^m\delta^{n+1} + \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\gamma^{n+1}\delta^m - \left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^{m+1}\delta^n - \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\gamma^n\delta^{m+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(\gamma\delta)^n\left[\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^{m-n}\delta + \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\gamma\delta^{m-n} - \left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^{m+1-n} - \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\delta^{m+1-n}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-1)^n\left[\check{\gamma}\check{\delta}\gamma^{m-n}(\gamma-\delta) - \check{\delta}\check{\gamma}\delta^{m-n}(\gamma-\delta)\right]$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{4}(-1)^n\left[\breve{\gamma}\breve{\delta}\gamma^{m-n} - \breve{\delta}\breve{\gamma}\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}(-1)^n\left[\left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\gamma^{m-n} - \left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}(-1)^n\left[\left(Y_N^{\vec{c}}\gamma^{m-n} - \delta^{m-n}\right) + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}(\gamma^{m-n} + \delta^{m-n})\right]$$

$$= -2(-1)^n\left[Y_N^{\vec{c}}\left(\frac{\gamma^{m-n} - \delta^{m-n}}{2\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\left(\frac{\gamma^{m-n} + \delta^{m-n}}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= -2(-1)^n\left(Y_N^{\vec{c}}p_{m-n} + 2Z_N^{\vec{c}}q_{m-n}\right)\blacksquare$$

3. KISITLAMASIZ PELL VE PELL-LUCAS 2^N-LERİ İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde genellikle Binet formülleri kullanılarak Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için bazı özdeşlikler verilecektir.

Teorem 3.1. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_m^{\vec{c}} + P_{m-1}^{\vec{c}} = Q_m^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülünü kullanarak

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m\right) + \left(\check{\gamma}\gamma^{m-1} - \check{\delta}\delta^{m-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^m + \check{\gamma}\gamma^{m-1} - \check{\delta}\delta^m - \check{\delta}\delta^{m-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^m\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) + \check{\delta}\delta^m(-1-\frac{1}{\delta})\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}\check{\gamma}\gamma^m + \sqrt{2}\check{\delta}\delta^m\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^m + \check{\delta}\delta^m\right]$$

$$= \frac{\check{\gamma}\gamma^m + \check{\delta}\delta^m}{2} = Q_m^{\vec{c}}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$Q_m^{\vec{c}} + Q_{m-1}^{\vec{c}} = 2P_m^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü vasıtasıyla

$$\frac{1}{2}\left[\left(\check{\gamma}\gamma^m + \check{\delta}\delta^m\right) + \left(\check{\gamma}\gamma^{m-1} + \check{\delta}\delta^{m-1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^m + \check{\gamma}\gamma^{m-1} + \check{\delta}\delta^m + \check{\delta}\delta^{m-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^m\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) + \check{\delta}\delta^m\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m\right]$$

$$= 2P_m^{\vec{c}}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_m^{\vec{c}} + Q_m^{\vec{c}} = P_{m+1}^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü kullanılarak

$$P_m^{\vec{c}} + Q_m^{\vec{c}} = \frac{\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m}{2\sqrt{2}} + \frac{\check{\gamma}\gamma^m + \check{\delta}\delta^m}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m + \sqrt{2}\check{\gamma}\gamma^m + \sqrt{2}\check{\delta}\delta^m\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\breve{\gamma}\gamma^m\left(1+\sqrt{2}\right) - \breve{\delta}\delta^m\left(1-\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\breve{\gamma}\gamma^{m+1} - \breve{\delta}\delta^{m+1}\right]$$

$$= P_{m+1}^{\vec{c}}$$

bulunur.■

Teorem 3.4. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_{m+1}^{\vec{c}} + P_{m-1}^{\vec{c}} = 2Q_m^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü ile

$$P_{m+1}^{\vec{c}} + P_{m-1}^{\vec{c}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\breve{\gamma}\gamma^{m+1} - \breve{\delta}\delta^{m+1} + \breve{\gamma}\gamma^{m-1} - \breve{\delta}\delta^{m-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\breve{\gamma}\gamma^m\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) + \breve{\delta}\delta^m\left(-\delta - \frac{1}{\delta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\breve{\gamma}\gamma^m 2\sqrt{2} + \breve{\delta}\delta^m 2\sqrt{2}\right]$$

$$= \breve{\gamma}\gamma^m + \breve{\delta}\delta^m$$

$$= 2Q_m^{\vec{c}}$$

olur.■

Teorem 3.5. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$Q_{m+1}^{\vec{c}} + Q_{m-1}^{\vec{c}} = 4P_m^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Yine Binet formülleri kullanılarak

$$Q_{m+1}^{\vec{c}} + Q_{m-1}^{\vec{c}} = \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^{m+1} + \check{\delta}\delta^{m+1} + \check{\gamma}\gamma^{m-1} + \check{\delta}\delta^{m+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^{m}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) + \check{\delta}\delta^{m+1}\left(\delta\frac{+1}{\delta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{2}\check{\gamma}\gamma^{m} - 2\sqrt{2}\check{\delta}\delta^{m}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^{m} - \check{\delta}\delta^{m}\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left[\frac{\check{\gamma}\gamma^{m} - \check{\delta}\delta^{m}}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= 4P_m^{\vec{c}}$$

bulunur.■

Teorem 3.6. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, n, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$Q_{m+n}^{\vec{c}} + (-1)^n Q_{m-n} = 2q_n Q_m^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülleri kullanılarak

$$Q_{m+n}^{\vec{c}} + (-1)^n Q_{m-n} = \frac{\breve{\gamma}\gamma^{m+n} + \breve{\delta}\delta^{m+n}}{2} + (-1)^n(\frac{\breve{\gamma}\gamma^{m-n} + \breve{\delta}\delta^{m-n}}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\breve{\gamma}\gamma^{m+n} + \breve{\delta}\delta^{m+n} + (-1)^n\breve{\gamma}\gamma^{m-n}(-1)^n\breve{\delta}\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\breve{\gamma}\gamma^m\left(\gamma^n\frac{(-1)^n}{\gamma^n}\right) + \breve{\delta}\delta^m(\delta^n + \frac{(-1)^n}{\delta^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\breve{\gamma}\gamma^m(\gamma^n + \delta^n) + \breve{\delta}\delta^m(\delta^n + \gamma^n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\gamma^n + \delta^n)(\breve{\gamma}\gamma^m + \breve{\delta}\delta^m)\right]$$

$$= (\frac{\gamma^n + \delta^n}{2})(\frac{\breve{\gamma}\gamma^m + \breve{\delta}\delta^m}{2})$$

$$= 2q_n Q_m^{\vec{c}}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.7. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, n, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_{m+n}^{\vec{c}} + (-1)^n P_{m-n}^{\vec{c}} = 2q_n P_m^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülleri ile

$$P_{m+n}^{\vec{c}} + (-1)^n P_{m-n}^{\vec{c}} = \left(\frac{\breve{\gamma}\gamma^{m+n} - \breve{\delta}\delta^{m+n}}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{(-1)^n\breve{\gamma}\gamma^{m-n} - (-1)^n\breve{\delta}\delta^{m-n}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\breve{\gamma}\gamma^{m+n} + (-1)^n\breve{\gamma}\gamma^{m-n} - \breve{\delta}\delta^{m+n} - (-1)^n\breve{\delta}\delta^{m-n}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^m\left(\gamma^n + \left(\frac{-1}{\gamma}\right)^n\right) - \check{\delta}\delta^m(\delta^n + \left(\frac{-1}{\delta}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^m(\gamma^n + \delta^n) - \check{\delta}\delta^m(\delta^n + \gamma^n)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(\gamma^n + \delta^n)(\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m)\right]$$

$$\frac{\gamma^n + \delta^n}{2\sqrt{2}}\frac{\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m}{2\sqrt{2}} = \frac{q_n}{\sqrt{2}}P_m^{\vec{c}}$$

$$= 2q_n P_m^{\vec{c}}$$

bulunur. ■

Teorem 3.8. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, n, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_{m-n}^{\vec{c}} = (-1)^n(P_{n-1}P_m^{\vec{c}} - P_n P_{m-1}^{\vec{c}})$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü kullanılarak

$$P_{m-n}^{\vec{c}} = \left[\left(\frac{\gamma^{n-1} - \delta^{n-1}}{\gamma - \delta}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^m - \check{\delta}\delta^m}{\gamma - \delta}\right) - \left(\frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{m-1} - \check{\delta}\delta^{m-1}}{\gamma - \delta}\right)\right]$$

$$= (-1)^n\frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[\check{\gamma}\gamma^{m+n-1} - \check{\delta}\delta^m\gamma^{n-1} - \check{\gamma}\gamma^m\delta^{n-1} + \check{\delta}\delta^{m+n-1} - \check{\gamma}\gamma^{m+n-1}\right.$$
$$\left. + \check{\delta}\delta^{m-1}\gamma^n + \check{\gamma}\gamma^{m-1}\delta^n - \check{\delta}\delta^{m+n-1}\right]$$

$$= (-1)^n\frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[-\check{\delta}\delta^m\gamma^{n-1} - \check{\gamma}\gamma^m\delta^{n-1} + \check{\delta}\delta^{m-1}\gamma^n + \check{\gamma}\gamma^{m-1}\delta^n\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{(\gamma-\delta)^2}(\gamma\delta)^2\left[-\frac{\check{\delta}\delta^{m-n}}{\gamma}-\frac{\check{\gamma}\gamma^{m-n}}{\delta}+\frac{\check{\delta}\delta^{m-n}}{\delta}+\frac{\check{\gamma}\gamma^{m-n}}{\gamma}\right]$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[\check{\gamma}\gamma^{m-n}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)-\check{\delta}\delta^{m-n}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\left[\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(\check{\gamma}\gamma^{m-n}-\check{\delta}\delta^{m-n})\right]$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\delta)}\left(\check{\gamma}\gamma^{m-n}-\check{\delta}\delta^{m-n}\right) = P_{m-n}^{\vec{c}}$$

elde edilir.

Teorem 3.9. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her $m, c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$\left[Q_m^{\vec{c}}\right]^2 - 2\left[P_m^{\vec{c}}\right]^2 = (-1)^m Y_N^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü vasıtasıyla

$$\left[Q_m^{\vec{E}}\right]^2 - 2\left[P_m^{\vec{c}}\right]^2 = \frac{\left(\check{\gamma}\gamma^m+\check{\delta}\delta^m\right)^2}{4} - 2\frac{\left(\check{\gamma}\gamma^m-\check{\delta}\delta^m\right)^2}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\check{\gamma}\gamma^m+\check{\delta}\delta^m\right)\left(\check{\gamma}\gamma^m+\check{\delta}\delta^m\right)-\left(\check{\gamma}\gamma^m-\check{\delta}\delta^m\right)\left(\check{\gamma}\gamma^m-\check{\delta}\delta^m\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(\check{\gamma})^2\gamma^{2m}+(\check{\delta})^2\delta^{2m}+\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^m\delta^m+\left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\delta^m\gamma^m-(\check{\gamma})^2\gamma^{2m}-\left(\check{\delta}\right)^2\delta^{2m}$$
$$+\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^m\delta^m+\left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\delta^m\gamma^m\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^m\delta^m+\left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\delta^m\gamma^m+\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\gamma^m\delta^m+\left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\delta^m\gamma^m\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-1)^m\left[\breve{\gamma}\breve{\delta} + \breve{\delta}\breve{\gamma}\right] = (-1)^m Y_N^{\vec{c}}$$

elde edilir.

Koshy [22], Pell ve Pell – Lucas sayıları için aşağıdaki temel özdeşlikleri vermiştir:

1. $P_n + P_{n-1} = Q_n$
2. $Q_n + Q_{n-1} = 2P_n$
3. $P_n + Q_n = P_{n+1}$
4. $2P_n + Q_n = Q_{n+1}$
5. $2Q_n + 3P_n = P_{n+2}$
6. $3Q_n + 4P_n = Q_{n+2}$
7. $Q_{n+1} - Q_n = 2P_n$
8. $P_{n+1} + P_{n-1} = 2Q_n$
9. $Q_{n+1} + Q_{n-1} = 4P_n$
10. $P_n + P_{n+1} + P_{n+3} = 2P_{n+2}$
11. $Q_n + Q_{n+1} + Q_{n+3} = 3Q_{n+2}$
12. $P_{n+1} - P_{n-1} = 2P_n$
13. $Q_{n+1} - Q_{n-1} = 2Q_n$
14. $P_{n+2} + P_{n-2} = 6P_n$
15. $Q_{n+2} + Q_{n-2} = 6Q_n$
16. $P_{n+2} - P_{n-2} = 4Q_n$
17. $Q_{n+2} - Q_{n-2} = 8P_n$

Bu eşitlikler ile kısıtlamasız Pell ve Pell – Lucas 2^N-lerinin tanımlarını kullanarak aşağıdaki eşitlikler kolayca hesaplanabilir.

Teorem 3.10. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

1. $P_n^{\vec{c}} + P_{n-1}^{\vec{c}} = Q_n^{\vec{c}}$
2. $Q_n^{\vec{c}} + Q_{n-1}^{\vec{c}} = 2P_n^{\vec{c}}$
3. $P_n^{\vec{c}} + Q_n^{\vec{c}} = P_{n+1}^{\vec{c}}$

4. $2P_n^{\vec{c}} + Q_n^{\vec{c}} = Q_{n+1}^{\vec{c}}$
5. $2Q_n^{\vec{c}} + 3P_n^{\vec{c}} = P_{n+2}^{\vec{c}}$
6. $3Q_n^{\vec{c}} + 4P_n^{\vec{c}} = Q_{n+2}^{\vec{c}}$
7. $Q_{n+1}^{\vec{c}} - Q_n^{\vec{c}} = 2P_n^{\vec{c}}$
8. $P_{n+1}^{\vec{c}} + P_{n-1}^{\vec{c}} = 2Q_n^{\vec{c}}$
9. $Q_{n+1}^{\vec{c}} + Q_{n-1}^{\vec{c}} = 4P_n^{\vec{c}}$
10. $P_n^{\vec{c}} + P_{n+1}^{\vec{c}} + P_{n+3}^{\vec{c}} = 2P_{n+2}^{\vec{c}}$
11. $Q_n^{\vec{c}} + Q_{n+1}^{\vec{c}} + Q_{n+3}^{\vec{c}} = 3Q_{n+2}^{\vec{c}}$
12. $P_{n+1}^{\vec{c}} - P_{n-1}^{\vec{c}} = 2P_n^{\vec{c}}$
13. $Q_{n+1}^{\vec{c}} - Q_{n-1}^{\vec{c}} = 2Q_n^{\vec{c}}$
14. $P_{n+2}^{\vec{c}} + P_{n-2}^{\vec{c}} = 6P_n^{\vec{c}}$
15. $Q_{n+2}^{\vec{c}} + Q_{n-2}^{\vec{c}} = 6Q_n^{\vec{c}}$
16. $P_{n+2}^{\vec{c}} - P_{n-2}^{\vec{c}} = 4Q_n^{\vec{c}}$
17. $Q_{n+2}^{\vec{c}} - Q_{n-2}^{\vec{c}} = 8P_n^{\vec{c}}$

eşitlikleri sağlanır.

Bu eşitliklere ek olarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Teorem 3.11. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$2P_n^{\vec{c}} + Q_n^{\vec{c}} = Q_{n+1}^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü ile

$$\begin{aligned} 2P_n^{\vec{c}} + Q_n^{\vec{c}} &= 2\left[\frac{\check{\gamma}\gamma^n - \check{\delta}\delta^n}{\gamma - \delta}\right] + \left[\frac{\check{\gamma}\gamma^n + \check{\delta}\delta^n}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\check{\gamma}\gamma^n - \sqrt{2}\check{\delta}\delta^n + \check{\gamma}\gamma^n + \check{\delta}\delta^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^n\left(\sqrt{2}+1\right) + \check{\delta}\delta^n\left(1-\sqrt{2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^{n+1} + \check{\delta}\delta^{n+1}\right] = Q_{n+1}^{\vec{c}}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.12. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$2P_n^{\vec{c}} + Q_{n+2}^{\vec{c}} = 3Q_{n+1}^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
2P_n^{\vec{c}} + Q_{n+2}^{\vec{c}} &= 2\left[\frac{\check{\gamma}\gamma^n - \check{\delta}\delta^n}{\gamma - \delta}\right] + \left[\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+2} + \check{\delta}\delta^{n+2}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\check{\gamma}\gamma^n - \sqrt{2}\check{\delta}\delta^n + \check{\gamma}\gamma^{n+2} + \check{\delta}\delta^{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^n\left(\sqrt{2} + \gamma^2\right) + \check{\delta}\delta^n\left(-\sqrt{2} + \delta^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\check{\gamma}\gamma^n\left(1 + \sqrt{2}\right)3 + \check{\delta}\delta^n\left(1 - \sqrt{2}\right)3\right] \\
&= 3\left[\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+1} + \check{\delta}\delta^{n+1}}{2}\right] \\
&= 3Q_{n+1}^{\vec{c}}
\end{aligned}$$

elde edilir.■

Teorem 3.13. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_{n+1}^{\vec{c}} + Q_{n-1}^{\vec{c}} = 3P_n^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü ile

$$P_{n+1}^{\vec{c}} + Q_{n-1}^{\vec{c}} = \frac{\check{\gamma}\gamma^{n+1} - \check{\delta}\delta^{n+1}}{2\sqrt{2}} + \frac{\check{\gamma}\gamma^{n-1} + \check{\delta}\delta^{n-1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^{n+1} - \check{\delta}\delta^{n+1} + \sqrt{2}\check{\gamma}\gamma^{n-1} + \sqrt{2}\check{\delta}\delta^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\gamma^{n}\left(\gamma + \frac{\sqrt{2}}{\gamma}\right) - \check{\delta}\delta^{n}\left(\delta + \frac{\sqrt{2}}{\delta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3\check{\gamma}\gamma^{n} - 3\check{\delta}\delta^{n}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n} - \check{\delta}\delta^{n}}{\gamma - \delta}\right)$$

$$= 3P_{n}^{\vec{c}}$$

bulunur. ■

Teorem 3.14. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$Q_n^{\vec{c}}Q_{n+1}^{\vec{c}} - 2P_n^{\vec{c}}P_{n+1}^{\vec{c}} = (-1)^n\left[Y_N^{\vec{c}} - 4Z_N^{\vec{c}}\right]$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülleri

$$Q_n^{\vec{c}}Q_{n+1}^{\vec{c}} - 2P_n^{\vec{c}}P_{n+1}^{\vec{c}} =$$

$$\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n} + \check{\delta}\delta^{n}}{2}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+1} + \check{\delta}\delta^{n+1}}{2}\right) - 2\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n} - \check{\delta}\delta^{n}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+1} - \check{\delta}\delta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(\check{\gamma})^2\gamma^{2n+1} + (\check{\delta})^2\delta^{2n+1} + (\check{\gamma}\check{\delta})\gamma^n\delta^{n+1} + (\check{\delta}\check{\gamma})\delta^n\gamma^{n+1} - (\check{\gamma})^2\gamma^{2n+1}$$
$$- (\check{\delta})^2\delta^{2n+1} + (\check{\gamma}\check{\delta})\gamma^n\delta^{n+1} + (\check{\delta}\check{\gamma})\delta^n\gamma^{n+1}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\big[(\check{\gamma}\check{\delta})\gamma^n\delta^{n+1} + (\check{\delta}\check{\gamma})\delta^n\gamma^{n+1}\big]$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n\big[\check{\gamma}\check{\delta}\delta + \check{\delta}\check{\gamma}\gamma\big]$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n\big[\big(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\big)\delta + \big(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\big)\gamma\big]$$

$$= \frac{1}{2}(-1)^n\big[Y_N^{\vec{c}}(\gamma+\delta) - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}(\gamma-\delta)\big]$$

$$= (-1)^n\big[Y_N^{\vec{c}} - 4Z_N^{\vec{c}}\big]$$

verir. ■

Teorem 3.15. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_n^{\vec{c}}P_{n+3}^{\vec{c}} - P_{n+1}^{\vec{c}}P_{n+2}^{\vec{c}} = (-1)^{n+1}\big[2Y_N^{\vec{c}} - 6Z_N^{\vec{c}}\big]$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü kullanılarak

$$P_n^{\vec{c}}P_{n+3}^{\vec{c}} - P_{n+1}^{\vec{c}}P_{n+2}^{\vec{c}}$$
$$= \left(\frac{\check{\gamma}\gamma^n - \check{\delta}\delta^n}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+3} - \check{\delta}\delta^{n+3}}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$- \left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+1} - \check{\delta}\delta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n+2} - \check{\delta}\delta^{n+2}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\big[-\check{\gamma}\check{\delta}\gamma^n\delta^{n+3} - \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^{n+3}\delta^n + \check{\gamma}\check{\delta}\gamma^{n+1}\delta^{n+2} + \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^{n+2}\delta^{n+1}\big]$$

$$= \frac{1}{8}\left[(\gamma\delta)^{n+1}\left(\frac{-\delta^2}{\gamma}+\delta\right)\breve{\gamma}\breve{\delta} + \breve{\delta}\breve{\gamma}(\delta\gamma)^{n+1}\left(\frac{-\gamma^2}{\delta}+\gamma\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{8}\left[\breve{\gamma}\breve{\delta}\left(\frac{-\delta^2}{\gamma}+\delta\right) + \breve{\delta}\breve{\gamma}\left(\frac{-\gamma^2}{\delta}+\gamma\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{8}\left[\left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\left(8-6\sqrt{2}\right) + \left(Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\left(8+6\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{8}\left[16Y_N^{\vec{c}} - 48Z_N^{\vec{c}}\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\left[2Y_N^{\vec{c}} - 6Z_N^{\vec{c}}\right]$$

elde edilir. ■

Teorem 3.16. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$Q_n^{\vec{c}}Q_{n+3}^{\vec{c}} - Q_{n+1}^{\vec{c}}Q_{n+2}^{\vec{c}} = (-1)^n\left[4Y_N^{\vec{c}} - 12Z_N^{\vec{c}}\right]$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülü ile

$$Q_n^{\vec{c}}Q_{n+3}^{\vec{c}} - Q_{n+1}^{\vec{c}}Q_{n+2}^{\vec{c}}$$
$$= \left(\frac{\breve{\gamma}\gamma^n + \breve{\delta}\delta^n}{2}\right)\left(\frac{\breve{\gamma}\gamma^{n+3} + \breve{\delta}\delta^{n+3}}{2}\right)$$
$$- \left(\frac{\breve{\gamma}\gamma^{n+1} - \breve{\delta}\delta^{n+1}}{2}\right)\left(\frac{\breve{\gamma}\gamma^{n+2} + \breve{\delta}\delta^{n+2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\breve{\gamma}\breve{\delta}\right)\gamma^n\delta^{n+3} - \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)\gamma^{n+1}\delta^{n+2} + \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)\gamma^{n+3}\delta^n - \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)\gamma^{n+2}\delta^{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-1)^{n+1}\left[\breve{\gamma}\breve{\delta}\left(6\sqrt{2}-8\right) + \breve{\delta}\breve{\gamma}\left(-6\sqrt{2}-8\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-1)^{n+1}\left[\left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\left(6\sqrt{2} - 8\right) + \left(Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\left(-6\sqrt{2} - 8\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(-1)^{n+1}\left[-16Y_N^{\vec{c}} + 48Z_N^{\vec{c}}\right]$$

$$= (-1)^n\left[4Y_N^{\vec{c}} - 12Z_N^{\vec{c}}\right]$$

bulunur. ■

Teorem 3.17. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$P_n^{\vec{c}}Q_{n-1}^{\vec{c}} - Q_n^{\vec{c}}P_{n-1}^{\vec{c}} = (-1)^{n-1}\left[Y_N^{\vec{c}} + 2Z_N^{\vec{c}}\right]$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülleri kullanılarak

$$P_n^{\vec{c}}Q_{n-1}^{\vec{c}} - Q_n^{\vec{c}}P_{n-1}^{\vec{c}}$$
$$= \left(\frac{\check{\gamma}\gamma^n - \check{\delta}\delta^n}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n-1} + \check{\delta}\delta^{n-1}}{2}\right)$$
$$- \left(\frac{\check{\gamma}\gamma^n + \check{\delta}\delta^n}{2}\right)\left(\frac{\check{\gamma}\gamma^{n-1} - \check{\delta}\delta^{n-1}}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\left(\gamma^n\delta^{n-1}\right) + \left(\check{\gamma}\check{\delta}\right)\left(\gamma^n\delta^{n-1}\right) - \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\left(\gamma^{n-1}\delta^n\right) - \left(\check{\delta}\check{\gamma}\right)\left(\gamma^{n-1}\delta^n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\check{\delta}\gamma^n\delta^{n-1} - \check{\delta}\check{\gamma}\gamma^{n-1}\delta^n\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[\check{\gamma}\check{\delta}\gamma - \check{\delta}\check{\gamma}\delta\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\left[\left(Y_N^{\vec{c}} + 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) - \left(Y_N^{\vec{c}} - 2\sqrt{2}Z_N^{\vec{c}}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right)\right]$$

$= (-1)^{n-1}\left[Y_N^{\vec{c}} + 2Z_N^{\vec{c}}\right]$

bulunur. ■

Sonraki ispatta kullanılmak üzere aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır. İspat kolay olduğu için verilmemiştir.

Lemma 3.18. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$(\breve{\gamma})^2 = 1 - \gamma^{2c_1} - \gamma^{2c_2} - \gamma^{2c_3} \ldots - \gamma^{2c_{2^N-1}} + 2(\gamma^{c_1}e_1 + \gamma^{c_2}e_2 + \gamma^{c_3}e_3 + \cdots + \gamma^{c_{2^N-1}}e_{2^N-1})$$

$$(\breve{\delta})^2 = 1 - \delta^{2c_1} - \delta^{2c_2} - \delta^{2c_3} \ldots - \delta^{2c_{2^N-1}} + 2(\delta^{c_1}e_1 + \delta^{c_2}e_2 + \delta^{c_3}e_3 + \cdots + \delta^{c_{2^N-1}}e_{2^N-1})$$

dir.

Bu lemma kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.19. $N \in \{0,1,2,3,4\}$ olmak üzere, her n, $c_1, c_2, \cdots, c_{2^N-1}$ tamsayıları için

$$\left(Q_n^{\vec{c}}\right)^2 + 2\left(P_n^{\vec{c}}\right)^2 = -Q_{2n} - Q_{2n+2c_1} - \cdots - Q_{2n+2c_{2^N-1}} + 2Q_{N,2n}^{\vec{c}}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas 2^N-leri için Binet formülleri kullanılarak

$$\left(Q_n^{\vec{c}}\right)^2 + 2\left(P_n^{\vec{c}}\right)^2 = \frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^n + \breve{\delta}\delta^n\right)}{2}\frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^n + \breve{\delta}\delta^n\right)}{2} + 2\frac{\left(\breve{\gamma}\gamma^n - \breve{\delta}\delta^n\right)\left(\breve{\gamma}\gamma^n - \breve{\delta}\delta^n\right)}{8}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\breve{\gamma})^2\gamma^{2n} + (\breve{\delta})^2\delta^{2n} + \left(\breve{\gamma}\breve{\delta}\right)(\gamma\delta)^n + \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)(\gamma\delta)^n + (\breve{\gamma})^2\gamma^{2n} + (\breve{\delta})^2\delta^{2n} - \left(\breve{\gamma}\breve{\delta}\right)(\gamma\delta)^n - \left(\breve{\delta}\breve{\gamma}\right)(\gamma\delta)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\check{\gamma})^2\gamma^{2n} + (\check{\delta})^2\delta^{2n}\right]$$

$$= \left[\gamma^{2n} - \gamma^{2n+2c_1} - \gamma^{2n+2c_2} \dots - \gamma^{2n+2c_{2^N-1}} + \delta^{2n} - \delta^{2n+2c_1} - \delta^{2n+2c_2} \dots \right.$$
$$\left. - \delta^{2n+2c_{2^M-1}}\right] + e_1(\gamma^{2n+c_1} + \delta^{2n+c_1}) + e_2(\gamma^{2n+c_2} + \delta^{2n+c_2}) \dots$$
$$+ e_{2^N-1}\left(\gamma^{2n+c_{2^N-1}} + \delta^{2n+c_{2^N-1}}\right)$$

$$= Q_{2n} - Q_{2n+2c_1} - \cdots - Q_{2n+2c_{2^N-1}}$$
$$+ 2\left(Q_{2n+c_1}e_1 + Q_{2n+c_2}e_2 + \cdots + Q_{2n+c_{2^N-1}}e_{2^N-1}\right)$$

$$= -Q_{2n} - Q_{2n+2c_1} - \cdots - Q_{2n+2c_{2^N-1}} + 2Q^{\vec{c}}_{N,2n}$$

elde edilir.■

.

.

.

KAYNAKLAR

[1] Abd-Elhameed, W. M., & Zeyada, N. A. (2017). A generalization of generalized Fibonacci and generalized Pell numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 102-107.

[2] Akyiğit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2013). Split Fibonacci Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 535-545.

[3] Akyiğit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2014). Fibonacci generalized quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(3), 631-641.

[4] Aydın, F. T., Köklü, K., & Yüce, S. (2017). Generalized dual Pell quaternions. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 23(4), 66-84.

[5] Bilgici, G., Tokeser, Ü., & Ünal, Z. (2017). Fibonacci and Lucas sedenions. *Journal of Integer Sequences*, 20(2), 3.

[6] Catarino, P. (2013). On some identities and generating functions for k-Pell numbers. *International Journal of Mathematical Analysis*, 7(38), 1877-1884.

[7] Catarino, P. (2016). The modified Pell and the modified k-Pell quaternions and octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(2), 577-590.

[8] Catarino, P. (2018). Bicomplex k-Pell quaternions. *Computational Methods and Function Theory*, 1-12.

[9] Catarino, P. (2018). k-Pell, k-Pell–Lucas and modified k-Pell sedenions. *Asian-European Journal of Mathematics*, 1950018.

[10] Catarino, P., & Vasco, P. (2017). On Dual $$\varvec {} $$-Pell Quaternions and Octonions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(2), 75.

[11] Cawagas, R. E. (2004). On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, 24(2), 251-265.

[12] Çimen, C. B., & İpek, A. (2016). On pell quaternions and Pell-Lucas quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 39-51.

[13] Flaut, C., & Savin, D. (2015). Quaternion Algebras and Generalized Fibonacci–Lucas Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4), 853-862.

[14] Halici, S. (2012). On fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22(2), 321-327.

[15] Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. The *American Mathematical Monthly*, 70(3), 289-291.

[16] Iyer, M. R. (1969). A note on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 7(3), 225-229.

[17] Keçilioğlu, O., & Akkus, I. (2015). The Fibonacci octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(1), 151-158.

[18] Kilic, E. (2008). On the usual Fibonacci and generalized order-k Pell numbers. *Ars Combinatoria*, 88, 33-46.

[19] Kılıç, E. (2009). The generalized Pell (p, i)-numbers and their Binet formulas, combinatorial representations, sums. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4), 2047-2063.

[20] Kiliç, E., & Taşci, D. (2006). The Generalized Binet Formula, Representation And Sums Of The Generalized Order-$ K $ Pell Numbers. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10(6), 1661-1670.

[21] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Canada: A Wiley-Interscience Publication.

[22] Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas numbers with applications*. New York: Springer.

[23] Nurkan, S. K., & Güven, İ. A. (2015). Dual Fibonacci Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(2), 403-414.

[24] Ramirez, J. L. (2015). Some combinatorial properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas quaternions. *Analele Universitati Ovidius Constanta-Seria Matematica*, 23(2), 201-212.

[25] Smith, J. D. (1995). A left loop on the 15-sphere. *Journal of Algebra*, 176(1), 128-138.

[26] Smith, W. D. (2004). *Quaternions, octonions, and now, 16-ons and 2n-ons; New kinds of numbers.* Book, under review for publication.

[27] Swamy, M. N. S. (1973). On generalized Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 11(5), 547-550.

[28] Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2016). *The Pell quaternions and the Pell octonions*. Advances in Applied Clifford Algebras, 26(1), 435-440.

[29] Tan, E., Yilmaz, S., & Sahin, M. (2016). On A New Generalization of Fibonacci Quaternions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 82, 1-4.

[30] Tekcan, A. H. M. E. T., & Tayat, M. E. R. V. E. (2014). Generalized Pell numbers, balancing numbers and binary quadratic forms. *Creative Mathematics and Inf*, 23(1), 115-122.

[31] Tokeşer, Ü., Ünal, Z., & Bilgici, G. (2017). Split Pell and Pell–Lucas Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27(2), 1881-1893.

[32] Włoch, I. (2008). On generalized Pell numbers and their graph representations. *Commentationes Mathematicae*, 48(2), 169-175.

ÖZGEÇMİŞ



Adı Soyadı : Öznur BAYRAKCI KILDIR
Doğum Yeri ve Yılı : Merkez/Zonguldak 1991
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : oznurbayrakci@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Abdurrahmanpaşa Lisesi-2009
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-2013

Mesleki Deneyim

İş Yeri : 15 Temmuz Şehitler Anadolu Lisesi (2016-Halen)