T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KISITLAMASIZ FIBONACCİ HİBRİT SAYILARI

Mohamed Ali ELFISHUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOÇ. DR. GÖKSAL BİLGİCİ

AĞUSTOS - 2020
KASTAMONU

TEZ ONAYI

Mohamed Ali ELFISHUK tarafından hazırlanan "**KISITLAMASIZ FIBONACCİ HİBRİT SAYILARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **06.08.2020** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Doç.Dr. Göksal BİLGİCİ Kastamonu Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Prof.Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI Ankara Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Dr.Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL Kastamonu Üniversitesi	.....

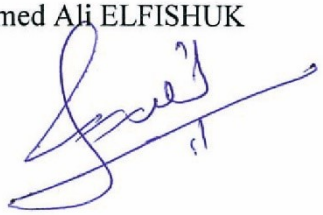
Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Enstitü Müdürü Prof. Dr. İzzet ŞENER .....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Mohamed Ali ELFISHUK



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISITLAMASIZ FIBONACCİ HİBRİT SAYILARI

Mohamed Ali ELFISHUK
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN: DOÇ.DR. GÖKSAL BİLGİCİ

Hibrit sayılar, reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir karışımı olarak inşa edilmiş yeni bir sayı sistemidir. Fibonacci kuaterniyonları, Fibonacci oktonyonları veya Fibonacci sedenyonları taban elemanlarının katsayıları Fibonacci dizisinin elemanları olan birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların tamamında Fibonacci dizisinin ardışık elemanları katsayı olarak seçilmiştir. Bu çalışmada ise Hibrit sayılar için $\{1, i, \varepsilon, h\}$ kümesinin elemanları Fibonacci dizisinin keyfi bir elemanı olarak belirlenecektir. Bu sebeple elde edilecek olan Fibonacci hibrit sayıları kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayıları olarak isimlendirilmiştir. Çalışmada, kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için üreteç fonksiyonları, üstel üreteç fonksiyonları, poisson üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri hesaplanmıştır. Daha sonra bu Binet formülleri, Fibonacci ve Lucas sayılarının bilinen temel özellikleri birlikte kullanılarak kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için, başta Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri olmak üzere birçok yeni özdeşlik elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, hibrit sayılar, Fibonacci hibrit sayıları, Lucas hibrit sayıları

Ağustos 2020, 40 Sayfa,
Bilim Dalı:204

ABSTRACT

MSC THESIS

UNRESTRICTED FIBONACCI HYBRID NUMBERS

Mohamed Ali ELFISHUK

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. GÖKSAL BİLGİCİ

Hybrid numbers are a new number system that is constructed as a mixture of real, complex, dual and hyperbolic numbers. There are a lot of studies on hyper-complex numbers whose coefficients are elements of Fibonacci sequence such as Fibonacci quaternions, Fibonacci octonions and Fibonacci sedenions. Successive Fibonacci numbers were chosen as coefficients in almost all these studies. In this study, arbitrary Fibonacci numbers were chosen as coefficients of the set $\{1, i, \varepsilon, h\}$ for hybrid numbers. Fort his reason, these Fibonacci hybrid numbers are called unrestricted Fibonacci hybrid numbers. Generating functions, exponential generating functions, Poisson generating functions and Binet formulas for the unrestricted Fibonacci and Lucas hybrid numbers are given. Furthermore, by using these Binet formulas with the basic properties of Fibonacci and Lucas numbers, several such as Vajda's, Catalan's, Cassini's and d'Ocagne's are given.

KEYWORDS: Fibonacci numbers, Lucas numbers, hybrid numbers, Fibonacci hybrid numbers, Lucas hybrid numbers

August 2020, 40 Page
Science Code:204

TEŞEKKÜR

Benim için çalışması zorlu bir konu olmasına rağmen aynı zamanda gerilimli ve keyifli bir çalışma oldu. Bir takım teoriler oluşturmuş ve bunlara bazı ilişkiler uyguladığım bu yolculuğun sonunda hedefime ulaşmama vesile olan herkese teşekkür ve şükranlarımı sunuyorum. Bu süreçte babamın ve annemin ruhu, kardeşim Hafez, en büyük destekçim olan eşim ve canım oğlum cesaretim için yakıt olmuşlardır. Ayrıca danışman hocam Doç.Dr. Göksal BİLGİCİ'ye teşekkür ediyorum. Son olarak ülkemizin en büyük destekçilerinden birisi olan Türkiye Cumhuriyeti hükümetine şükranlarımı sunuyorum.

Mohamed Ali ELFISHUK
Kastamonu, 2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI ..... **ii**
TAAHHÜTNAME ..... **iii**
ÖZET ..... **iv**
ABSTRACT ..... **v**
TEŞEKKÜR ..... **vi**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
TABLOLAR DİZİNİ ..... **viii**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ..... **ix**
1. GİRİŞ **1**
1.1. Kompleks Sayılar 1
1.2. Dual Sayılar 2
1.3. Hiperbolik Sayılar 4
1.4. Hibrit Sayılar 6
1.5. Fibonacci ve Lucas Sayıları 8
1.6. Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları 11
2. KISITLAMASIZ FIBONACCI VE LUCAS HİBRİT SAYILARI **14**
3. SONUÇLAR **20**
KAYNAKLAR **38**
ÖZGEÇMİŞ **40**

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1 Kompleks, Dual ve Hiperbolik sayıların bazı temel özellikleri..... 6
Tablo 1.2 {1,i,ε,h} kümesinin elemanlarının çarpım tablosu 7
Tablo 1.3 Tavşan nüfusunun artışı..... 9

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{D}$	: Dual sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	: Hiperbolik sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: Hibrit sayılar kümesi
$c(a)$	: a hibrit sayısının karakteri
$N(a)$	: a hibrit sayısının normu
F_n	: $n-$yinci Fibonacci sayısı
L_n	: $n-$yinci Lucas sayısı
$H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)}$	: $n-$yinci kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayısı
$H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)}$	: $n-$yinci kısıtlamasız Lucas hibrit sayısı

1. GİRİŞ

Hibrit sayılar ilk olarak Özdemir (2018) tarafından tanımlanmışlardır. Bu sayı sistemi, reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıların bir karışımı olması sebebiyle hibrit sayılar olarak isimlendirilmişlerdir.

1.1. Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar problemi, İskenderiyeli Heron'un 81-144 arasındaki sayıların kare köklerini hesaplamayı gerektiren bir piramidin hacmini bulmaya çalıştığı 1. yüzyıla kadar gider. Rafael Bombell (1526-1573) kompleks sayılar teorisinin temel taşlarını atmıştır. Ancak, çalışması sadece karmaşık sayılar destanının başlangıcı olmuştur. 1833'te Willian Rown Hamilton (1805-1880) kompleks sayıları reel sayıların çifti olarak bir cebirsel tanımını vermiştir. (Agarwal vd., 2011)

Bir kompleks sayı, a ve b reel sayılar olmak üzere, $a + ib$ formunda ifade edilir ve i, $x^2 = -1$ denkleminin bir çözümüdür. Bu denklemin hiçbir reel çözümü olmaması sebebiyle i bir sanal sayı olarak adlandırılır. Tüm kompleks sayıların kümesi

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

şeklinde gösterilir. Cebirin temel teoremine göre tek değişkenli reel veya kompleks katsayılı tüm polinom eşitliklerinin kompleks sayılarda çözümü vardır. Kompleks sayıların bir cebirsel genişlemesi olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu sayılarda toplama, çıkarma, çarpma tanımlanabilir. Ek olarak kompleks sayılar sıfırdan farklı bir kompleks sayıya bölünebilir. Tüm bu işlemlerin sonunda kompleks sayılar bir cisim oluştururlar.

İki kompleks sayı $c = a + ib, w = u + iv$ ise, toplama işlemi

$$c + w = (a + u) + i(b + v),$$

çıkarma işlemi

$$c - w = (a - u) + i(b - v),$$

iki kompleks sayının eşitliği

$$c = w \Leftrightarrow a = u, b = v,$$

c nin toplamaya göre tersi

$$-c = -a - ib,$$

c nin eşleniği

$$\bar{c} = a - ib,$$

c nin normu (mutlak değeri, modülü)

$$N(c) = |c| = \sqrt{c\bar{c}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

çarpma işlemi

$$c.w = (au - bv) + (av + bu)i,$$

ve çarpmaya göre tersi

$$c^{-1} = \frac{\bar{c}}{a^2 + b^2}$$

şeklinde tanımlanır.

1.2. Dual Sayılar

IXX. yy. da William Clifford (1845-1879) nilpotent bir operatör kullanılan motor teorisi ile ilgili dual sayıları tanımlamıştır. Kazan Üniversitesinden Kotelnikov, katı eklemli cisimlerin kinematiği çalışmalarına uygulamaları amacıyla dual sayılar teorisini geliştirmiştir (Mora vd., 2018).

Dual sayılar reel sayılara, $\varepsilon^2 = 0$ (ε nilpotent) olmak üzere ε ilave edilmesiyle elde edilir ve tüm dual sayıların kümesi

$$\mathbb{D} = \{x + y\varepsilon : x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0\}$$

şeklinde gösterilir. $\mathbb{D}$ kümesi reel sayılar kümesi üzerinde 2 – boyutlu, birimli ve birleşmeli bir cebir oluşturur. İki dual sayı $z = x + y\varepsilon$ ve $w = u + v\varepsilon$ olmak üzere, dual sayıların bazı temel cebirsel özellikleri aşağıda listelenmiştir. Buna göre, toplama işlemi

$$z + w = (x + u) + (y + v)\varepsilon,$$

çıkarma işlemi

$$z - w = (x - u) + (y - v)\varepsilon,$$

iki dual sayının eşitliği

$$z = w \Leftrightarrow x = u\,, y = v,$$

z nin toplamaya göre tersi

$$-z = -x - y\varepsilon,$$

z nin eşleniği

$$\bar{z} = x - y\varepsilon,$$

çarpma işlemi

$$z.w = xu + (xv + yu)\varepsilon,$$

z nin çarpmaya göre tersi

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{x^2},$$

ve z nin normu

$$N(z) = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2}$$

olarak tanımlanır.

1.3. Hiperbolik Sayılar

Hiperbolik sayılar, split-kompleks sayılar, perpleks sayılar ve double sayılar olarak da bilinirler. Bir hiperbolik sayı $x + yh$ şeklinde yazılır ve burada x ve y reel sayılar iken $h^2 = 1$ ise hiperbolik birimdir. Tüm hiperbolik sayıların kümesi

$$\mathbb{P} = \{x + yh : x, y \in \mathbb{R}, h^2 = 1, h \neq 1, h \notin \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir ve bu küme reel sayıların cismi üzerinde bir cebir oluşturur. Buna göre iki hiperbolik sayı $z_1 = x_1 + y_1 h$ ve $z_2 = x_2 + y_2 h$ olmak üzere toplama işlemi

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)h,$$

toplamaya göre ters

$$-z_1 = -x_1 - y_1 h,$$

çıkarma işlemi

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)h,$$

iki hiperbolik sayının eşitliği

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2,$$

çarpma işlemi

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)h,$$

z_1 in eşleniği

$$\overline{z_1} = x_1 - y_1 h,$$

z_1 in çarpmaya göre tersi

$$z_1^{-1} = \frac{\overline{z_1}}{x_1^2 - y_1^2},$$

z_1 in normu

$$N(z_1) = \sqrt{|x_1^2 - y_1^2|}$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda izah edilen 3 sayı sistemi için cebirsel olarak sırasıyla

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/< x^2 + 1 >,$$

$$\mathbb{D} \cong \mathbb{R}[x]/< x^2 >$$

ve

$$\mathbb{P} \cong \mathbb{R}[x]/< x^2 - 1 >$$

olduğu bilinmektedir. Özdemir (2018), aşağıdaki tablo ile bu üç sayı sisteminin bir özetini vermiştir.

Tablo 1.1 Kompleks, Dual ve Hiperbolik sayıların bazı temel özellikleri

	Kompleks sayılar	Dual sayılar	Hiperbolik sayılar
Özellik	$x+iy, i^2=-1$	$x+\varepsilon y, \varepsilon^2=0$	$x+hy, h^2=1$
Eşlenik	$x-iy$	$x-\varepsilon y$	$x-hy$
Norm	$\sqrt{x^2+y^2}$	$\lvert x\rvert$	$\sqrt{\lvert x^2-y^2\rvert}$
Geometri	Öklid	Galileo	Lorentz
Çember	$x^2+y^2=r^2$	$\lvert x\rvert=r$	$x^2-y^2=r^2$
Dönme	Eliptik	Parabolik	Hiperbolik
Euler formülü	$e^{i\theta}$ $=cos\theta+isin\theta$	$e^{\varepsilon\theta}=1+\varepsilon\theta$	$e^{h\theta}$ $=cosh\theta$ $+hsinh\theta$

1.4. Hibrit Sayılar

Yukarıda bahsedildiği üzere hibrit sayılar reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıların birlikte düşünülerek oluşturulduğu bir sayı sistemidir. Tüm hibrit sayıların kümesi

$$\mathbb{K}=\{x+yi+z\varepsilon+th: x,y,z,t\in\mathbb{R}, i^2=-1, \varepsilon^2=0, h^2=1, ih=-hi=\varepsilon+i\}$$

şeklinde tanımlanır. Hibrit sayılar reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıları kapsayan değişmeli olmayan bir cebir oluştururlar (Özdemir, 2018). Aşağıdaki matris gösterimleri kullanılarak $\{i,\varepsilon,h\}$ birimlerine ve hibrit sayılara ilişkin temel özellikleri elde etmek mümkündür:

$$1\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, i\leftrightarrow\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}, \varepsilon\leftrightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}, h\leftrightarrow\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

$\{1,i,\varepsilon,h\}$ kümesinin elemanlarının çarpım tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 1.2 {1,i,ε,h} kümesinin elemanlarının çarpım tablosu

.	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	1-h	$\varepsilon + i$
ε	ε	$h + 1$	0	-ε
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

İki hibrit sayı $a = x_1 + y_1 i + z_1 \varepsilon + t_1 h$ ve $b = x_2 + y_2 i + z_2 \varepsilon + t_2 h$ olmak üzere, toplama işlemi

$$a + b = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i + (z_1 + z_2)\varepsilon + (t_1 + t_2)h,$$

çıkarma işlemi

$$a - b = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2)i + (z_1 - z_2)\varepsilon + (t_1 - t_2)h,$$

iki hibrit sayının eşitliği

$$a = b \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2, t_1 = t_2,$$

çarpma işlemi

$$\begin{aligned} ab = {} & x_1x_2 - y_1y_2 + y_1z_2 + z_2y_1 + z_1z_2 + (x_1y_2 + x_2y_1 + y_1t_2 - y_2t_1)i \\ & + (x_1z_2 + z_2x_1 + y_1t_2 - y_2t_1 - z_1t_2 + z_2t_1)\varepsilon \\ & + (x_1t_2 + x_2t_1 - y_1z_2 + y_2z_1)h, \end{aligned}$$

a hibrit sayısının eşleniği

$$\bar{a} = x_1 - y_1 i - z_1 \varepsilon - t_1 h,$$

a hibrit sayısının karakteri

$$c(a) = a\bar{a} = \bar{a}a = x_1^2 + (y_1 - z_1)^2 - z_1^2 - t_1^2,$$

a hibrit sayısının normu

$$N(a) = \sqrt{|c(a)|} = \sqrt{|x_1^2 + (y_1 - z_1)^2 - z_1^2 - t_1^2|}$$

şeklindedir.

1.5. Fibonacci ve Lucas Sayıları

20. yüzyılın ikinci yarısından bu yana altın oran ve Fibonacci sayıları araştırmacılar tarafından büyük ilgi görmüştür (Arzu vd., 2019). Altın oran ilk olarak Öklid Elemanları'nda bir oran problemi olarak ortaya çıkmıştır. Bu problemin çözümünü bulmak için aşağıdaki cebirsel denklem elde edilmiştir

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Yukarıdaki denklemin iki kökü vardır.

$$x_1 = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ve } x_2 = \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Pozitif kök α altın oran olarak bilinir. Öte yandan, Fibonacci dizisinin bazı elemanları aşağıdaki gibidir

$$F_n = \{0,1,1,2,3,5,8,13,21, \dots\}.$$

Fibonacci tamsayı dizisinin elemanları $n \geq 1$ ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları için aşağıdaki rekörsif ilişkiyi sağlarlar

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Fibonacci sayılarına bu ismin verilmesinin sebebi, bu sayıların Leonardo Fibonacci'nin 1202 yılında yayınlanan kitabı "Liber Abaci" nin sonlarındaki problemler arasında yer alan tavşan problemidir. Bu problem kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Kabul edelim ki bir dişi bir de erkek olmak üzere bir çift yeni doğmuş tavşan olsun. Aşağıdaki koşullar altında bir yıl sonra toplam kaç çift tavşan olur?

- Her bir tavşan çifti 1 ay sonra yetişkin olmaktadır,
- İkinci aydan itibaren her bir tavşan çifti bir karışık tavşan çifti doğurmaktadır,
- Tavşanlar ölümsüzdür.

Problemin çözümüne yönelik olarak aşağıdaki tablo yapılabilir (Koshy, 2017).

Tablo 1.3 Tavşan nüfusunun artışı

	Ay											
Çift sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Bebek	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tablodan görüldüğü üzere problemin çözümü 144'tür. Tablonun son satırı Fibonacci dizisinin elemanlarını vermektedir. Bu meşhur diziye ismi 1876 yılında Fransız matematikçi Francois Eduard Anatole Lucas tarafından verilmiştir. Fibonacci dizisinin rekörsif formülü farklı başlangıç koşulları ile farklı diziler verir. Bunlardan bir tanesi için başlangıç koşulları $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ alınırsa

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}.$$

rekörsif formulü

$$\{2,1,3,4,7,11,18,29, \dots\}$$

tamsayı dizisini verir ve bu dizi Lucas dizisi olarak bilinir. Fibonacci ve Lucas dizilerinin elemanları arasında çok güçlü ilişkiler bulunmaktadır. Örneğin;

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

bu bağıntılardan birisidir ve bazı kaynaklar tarafından Lucas dizisinin tanımı olarak kabul edilmektedir.

Koshy (2017), Fibonacci sayılarının günlük hayata ait birçok uygulamasını vermiştir. Örnek olarak dünyanın çevresi $F_{10} \cdot F_{12} = 7920$ mil veya $F_{11} \cdot F_{12} = 12816$ kilometredir. Ayrıca bazı bitkilerin çiçek sayılarında, ayçiçeğinin içerisindeki spiralde, Bir kovandaki arıların sayısında, bazı gazların atom numaralarında, optik yansımalarında, müzikte, şiirde ve elektrik devrelerinde Fibonacci veya Lucas sayıları ile karşılaşmak mümkündür. Tamsayı dizileri üzerine yapılan çalışmalardaki temel çıkış noktaları da genellikle Fibonacci ve Lucas sayılarının onlarca ilginç özellikleri olmaktadır.

Fibonacci dizisi $\{F_n\}$ ve Lucas dizisi $\{L_n\}$ için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir. Rekörsif tanım veya üreteç fonksiyonları kullanarak büyük Fibonacci ve Lucas sayılarını hesaplamak zordur. Bu gibi durumlarda veya bu sayıların aralarındaki ilişkileri araştırırken Binet formüllerini kullanmak çok daha etkili bir yöntemdir. Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

1.6. Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları

Sir William Rowan (1805-1865) kuaterniyonları karmaşık sayıların bir genişlemesi olarak inceledi (Arzu vd., 2019). Bazı uygulamalı bilimlerde kuaterniyonlar ile ilgili birçok cebir problemine rastlandığından dolayı, kuaterniyonlarla ilgili cebir problemlerine artan bir ilgi olmuştur. Diferansiyel geometri, kuantum fiziği, jeostatik ve analiz gibi alanlar bu duruma örnek gösterilebilir. Bir kuaterniyon hiper-kompleks bir sayıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{1.1}$$

Burada, $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, i, j ve k arasında aşağıdakileri sağlar

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

Kuaterniyonlara özel bir başlık açılmasının sebebi katsayıları bir tamsayı dizisinin elemanları olarak tanımlanan ilk hiper-kompleks sayıların Fibonacci kuaterniyonları olmasıdır.

Horadam (1963), Fibonacci kuaterniyonlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}. \tag{1.2}$$

Benzer olarak Iyer (1969), Lucas kuaterniyonlarını şu şekilde tanımlamıştır

$$K_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3}. \tag{1.3}$$

Sonraki yıllarda benzer çok fazla çalışma göze çarpmazken Halıcı (2012)'nın Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için verdiği aşağıdaki Binet formülleri gerçek bir kilometre taşı olmuştur

$$Q_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha - \underline{\beta}\beta}{\alpha - \beta}$$

ve

$$K_n = \underline{\alpha}\alpha + \underline{\beta}\beta$$

dir, öyle ki burada

$$\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$$

ve

$$\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$$

dir.

Halıcı'nın verdiği bu Binet formülleri sayesinde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için birçok özdeşliği hesaplamak mümkün olmuştur. Bu çalışmayı takip eden yıllarda Akyiğit vd. (2013) split Fibonacci kuaterniyonları, Flaut ve Shpakivskyi (2013) Fibonacci genelleştirilmiş kuaterniyonları, Ramirez (2015) k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları, Dasçı ve Yalçın (2015) Fibonacci p-kuaterniyonları, Keçilioğlu ve Akkuş (2015) Fibonacci oktonyonları, Akkuş ve Keçilioğlu (2015) Split Fibonacci ve Lucas oktonyonları, Tan vd. (2016) bi-periodik Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları, Yüce ve Aydın (2016) dual Fibonacci kuaterniyonları, Bilgici vd. (2017) Fibonacci ve Lucas sedenyonları, Bilgici vd. (2017) k-Fibonacci ve k-Lucas genelleştirilmiş kuaterniyonları, Aydın (2018) Bi-kompleks Fibonacci kuaterniyonları, Gül (2018) k-Fibonacci ve k-Lucas trigintaduonyonları Choo (2019) genelleştirilmiş bi-periodik Fibonacci kuaterniyonları ve Godase (2019) k-Fibonacci ve k-Lucas oktonyonları üzerine çalışmaları göze çarpmaktadır.

Katsayıları bir tamsayı dizisinin elemanları olan hibrit sayılar üzerine de yapılan bazı çalışmalar bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak Horadam hibrit sayıları (Szynal-Liana, 2018), Pell ve Pell-Lucas hibrit sayıları (Szynal-Liana ve Wloch, 2018), k-Pell hibrit sayıları (Catarino, 2019), Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas hibrit sayıları (Szynal-Liana ve Wloch, 2018), Tribonacci ve Tribonacci-Lucas hibrit sayıları (Taşyurdu, 2019) verilebilir.

Yukarıda bahsedilen ve literatürde bulunan daha birçok çalışmada taban elemanlarının katsayısı olarak bir tamsayı dizisinin ardışık elemanları seçilmiştir. Bu çalışmaya ilham veren çalışma ise Bilgici ve Daşdemir (2020)'nin kısıtlamasız

Fibonacci ve Lucas hiper-kompleks sayıları ile Bilgici ve Catarino (2018)'in kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları üzerine çalışmalarıdır. Bu çalışmalarda hiper-kompleks uzayın baz elemanlarının katsayıları bir tamsayı dizisinin keyfi elemanları olarak belirlenmektedir. Burada da $\{1, i, \varepsilon, h\}$ kümesinin katsayıları Fibonacci ve Lucas dizisinin keyfi elemanları olarak belirlenecek ve bu yeni hibrit sayılar kısıtlamasız Fibonacci ve kısıtlamasız Lucas hibrit sayıları olarak isimlendirileceklerdir.

2. KISITLAMASIZ FIBONACCI VE LUCAS HİBRİT SAYILARI

n-yinci Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

Tanım 1. x, y ve z pozitif tamsayılar olsun. n-yinci kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları sırasıyla

$$H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} = F_n + iF_{n+x} + \varepsilon F_{n+y} + hF_{n+z} \tag{2.1}$$

ve

$$H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)} = L_n + iL_{n+x} + \varepsilon L_{n+y} + hL_{n+z} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n \tag{2.3}$$

ve

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \tag{2.4}$$

bağıntıları sayesinde kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları aşağıdaki gibi negatif indislere genişletilebilirler

$$H\mathcal{F}_{-n}^{(x,y,z)} = F_{-n} + iF_{-n+x} + \varepsilon F_{-n+y} + hF_{-n+z}$$

$$= (-1)^{n+1}F_n + i(-1)^{n-x+1}F_{n-x} + \varepsilon(-1)^{n-y+1}F_{n-y} + h(-1)^{n-z+1}F_{n-z}$$

$$= (-1)^{n+1}\left[F_n + i(-1)^x F_{n-x} + \varepsilon(-1)^y F_{n-y} + h(-1)^z F_{n-z}\right]$$

ve benzer şekilde

$$H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)} = (-1)^n\left[L_n + i(-1)^x L_{n-x} + \varepsilon(-1)^y L_{n-y} + h(-1)^z L_{n-z}\right].$$

Fibonacci ve Lucas sayılarının rekörsif eşitlikleri kullanılarak kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için aşağıdaki rekörsif ilişkileri elde ederiz

$$H\mathcal{F}_{n-2}^{(x,y,z)} + H\mathcal{F}_{n-1}^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} \tag{2.5}$$

ve

$$H\mathcal{L}_{n-2}^{(x,y,z)} + H\mathcal{L}_{n-1}^{(x,y,z)} = H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)}. \tag{2.6}$$

Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için üreteç fonksiyonları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2. Kısıtlamasız Fibonacci $\left\{H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)}\right\}$ ve Lucas $\left\{H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)}\right\}$ hibrit sayı dizileri için üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$F(q) = \frac{H\mathcal{F}_0^{(x,y,z)} + q\left(H\mathcal{F}_1^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_0^{(x,y,z)}\right)}{1 - q - q^2}$$

ve

$$L(q) = \frac{H\mathcal{L}_0^{(x,y,z)} + q\left(H\mathcal{L}_1^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_0^{(x,y,z)}\right)}{1 - q - q^2}$$

şeklindedir.

İspat.

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} q^n$$

olarak tanımlayalım. Bu eşitliğin her iki yanı sırasıyla $1, -q$ ve $-q^2$ ile çarpılırsa

$$F(q) = H\mathcal{F}_0^{(x,y,z)} + qH\mathcal{F}_1^{(x,y,z)} + \sum_{n=2}^{\infty} H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} q^n, \tag{2.7}$$

$$-qF(q) = -qH\mathcal{F}_0^{(x,y,z)} - \sum_{n=2}^{\infty} H\mathcal{F}_{n-1}^{(x,y,z)} q^n \tag{2.8}$$

ve

$$-q^2F(q) = -\sum_{n=2}^{\infty} H\mathcal{F}_{n-2}^{(x,y,z)} q^n \tag{2.9}$$

elde edilir. (2.7), (2.8) ve (2.9) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(1-q-q^2)F(q) = H\mathcal{F}_0^{(x,y,z)} + q\left(H\mathcal{F}_1^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_0^{(x,y,z)}\right)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_{n-1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_{n-2}^{(x,y,z)}\right] q^n$$

bulunur ki, (2.5) rekörsif eşitliği teoremdeki ilk üreteç fonksiyonunu verir. Diğer üreteç fonksiyonu benzer şekilde elde edilir.

Kısıtlamasız Fibonacci ve Hibrit sayılarının özelliklerini hesaplamak için Binet formüllerini ihtiyaç duyulmaktadır. Bu formüller sonraki teoremde verilmiştir.

Teorem 3. Herhangi x, y ve z tamsayıları için n −yinci kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayısı sırasıyla

$$H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} = \frac{\breve{\alpha}\,\alpha^n - \breve{\beta}\,\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)} = \breve{\alpha}\alpha^n + \breve{\beta}\beta^n$$

şeklindedir. Burada

$$\breve{\alpha} = 1 + i\alpha^x + \varepsilon\alpha^y + h\alpha^z$$

ve

$$\breve{\beta} = 1 + i\beta^x + \varepsilon\beta^y + h\beta^z$$

dir.

İspat. Fibonacci sayıları için Binet formülü kullanılarak

$$H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+x}i + \mathcal{F}_{n+y}\varepsilon + \mathcal{F}_{n+z}h$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n + i(\alpha^{n+x} - \beta^{n+x}) + \varepsilon(\alpha^{n+y} - \beta^{n+y}) + h(\alpha^{n+z} - \beta^{n+z}))$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\,(\alpha^n(1 + i\alpha^x + \varepsilon\alpha^y + h\alpha^z) - \beta^n(1 + i\beta^x + \varepsilon\beta^y + h\beta^z))$$

elde edilir ki bu eşitlik lemmada bulunan ilk Binet formülünü verir. Benzer şekilde Lucas sayıları için Binet formülü kullanılarak

$$H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)} = L_n + iL_{n+x} + \varepsilon L_{n+y} + hL_{n+z}$$

$$= \alpha^n + \beta^n + i(\alpha^{n+x} + \beta^{n+x}) + \varepsilon(\alpha^{n+y} + \beta^{n+y}) + h(\alpha^{n+z} + \beta^{n+z})$$

$$= \alpha^n(1 + \alpha^x + \alpha^y + \alpha^z) + \beta^n(1 + \beta^x + \beta^y + \beta^z)$$

Bulunur ki bu eşitlik ise lemmadaki ikinci eşitlik olan kısıtlamasız Lucas sayıları için Binet formülünü verir.

Binet formülünü kullanarak ispatları yaparken $\breve{\alpha}$ ve $\breve{\beta}$ hibrit sayılarının çarpımına ihtiyaç duyulacaktır. Bu çarpımlar aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 4. Herhangi x, y ve z tamsayıları için

$$\breve{\alpha}\breve{\beta} = C + \sqrt{5}D \tag{2.10}$$

ve

$$\breve{\beta}\breve{\alpha} = C - \sqrt{5}D \tag{2.11}$$

dir. Burada

$$C = H\mathcal{L}_0^{(x,y,z)} - 1 - (-1)^x + (-1)^y L_{x-y} + (-1)^z$$

ve

$$D = i(-1)^z F_{x-z} + \varepsilon[(-1)^z F_{x-z} + (-1)^y F_{z-y}] + h(-1)^x F_{y-x}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\breve{\alpha}\breve{\alpha} = 2\breve{\alpha} + A \tag{2.12}$$

ve

$$\breve{\beta}\breve{\beta} = 2\breve{\beta} + B \tag{2.13}$$

dir ve burada

$$A = -1 - (\alpha^2)^x + (\alpha^2)^z + 2\alpha^{x+y}$$

ve

$$B = -1 - (\beta^2)^x + (\beta^2)^z + 2\beta^{x+y}$$

ile verilir.

İspat. $\breve{\alpha}$ ve $\breve{\beta}$ hibrit sayılarının tanımından

$$\breve{\alpha}\breve{\beta} = (1 + i\alpha^x + \varepsilon\alpha^y + h\alpha^z)(1 + i\beta^x + \varepsilon\beta^y + h\beta^z)$$

$$= 1 - (\alpha\beta)^x + \alpha^x\beta^y + \alpha^y\beta^x + (\alpha\beta)^z + i(\alpha^x + \beta^x + \alpha^x\beta^z - \alpha^z\beta^x)$$

$$+\varepsilon(\alpha^y + \beta^y + \alpha^x\beta^z - \alpha^z\beta^x + \alpha^z\beta^y - \alpha^y\beta^z) + h(\alpha^z + \beta^z + \alpha^y\beta^x - \alpha^x\beta^y)$$

$$\begin{aligned} = 1 - (-1)^x + (-1)^y(\alpha^{x-y} + \beta^{x-y}) + (-1)^z + i[L_x + (\alpha\beta)^z(\alpha^{x-z} + \beta^{x-z})] \\ + \varepsilon\left[L_y + (\alpha\beta)^z(\alpha^{x-z} + \beta^{x-z}) + (\alpha\beta)^y(\alpha^{z-y} + \beta^{z-y})\right] \\ + h[L_z + (\alpha\beta)^x(\alpha^{y-x} + \beta^{y-x})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = 1 - (-1)^x + (-1)^y L_{x-y} + (-1)^z + iL_x + \varepsilon L_y + hL_z \\ + \sqrt{5}\left[i(-1)^z F_{x-z} + \varepsilon\left((-1)^z F_{x-z} + (-1)^y F_{z-y}\right) + h(-1)^x F_{y-x}\right] \end{aligned}$$

bulunur ki, bu ise eşitlik (2.10) dır. Eşitlik (2.11), (2.12) ve (2.13) benzer şekilde ispatlanır.

3. SONUÇLAR

Önceki bölümde verilen hazırlık eşitliklerini kullanarak kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayılarının özelliklerinin hesaplanması mümkündür. Bu doğrultuda aşağıdaki teoremde verilen d'Ocagne özdeşliği ile başlanacaktır.

Teorem 5. Her x, y, z, m ve n tamsayıları için

$$H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)} = (-1)^n [CF_{m-n} + DL_{m-n}] \qquad (3.1)$$

ve

$$H\mathcal{L}_m^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)} = 5(-1)^n [CF_{m-n} + DL_{m-n}] \qquad (3.2)$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayıları için Binet formülünden

$$H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_n^{(x,y,z)}$$

$$= \frac{1}{5}\left[\left(\breve{\alpha}\alpha^m - \breve{\beta}\beta^m\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^{n+1} - \breve{\beta}\beta^{n+1}\right) - \left(\breve{\alpha}\alpha^{m+1} - \breve{\beta}\beta^{m+1}\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^n - \breve{\beta}\beta^n\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^{m+1}\beta^n - \alpha^m\beta^{n+1}) - \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^n\beta^{m+1})\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^n(\breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m-n} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^{m-n})$$

elde edilir. (2.10) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{5}}{5}[(C + \sqrt{5}D)\alpha^{m-n} - (C - \sqrt{5}D)\beta^{m-n}$$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{5}}{5}[C\alpha^{m-n} + \sqrt{5}D\alpha^{m-n} - C\beta^{m-n} + \sqrt{5}D\beta^{m-n}]$$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{5}}{5}[C(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) + \sqrt{5}D(\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})]$$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{5}}{5}[\sqrt{5}CF_{m-n} + \sqrt{5}DL_{m-n}]$$

$$= (-1)^n[CF_{m-n} + DL_{m-n}]$$

bulunur ki böylelikle teoremdeki eşitlik (3.1) nin ispati tamamlanmış olur. Kısıtlamasız Lucas hibrit sayıları için Binet formülünden

$$H\mathcal{L}_m^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)}$$

$$= \left(\breve{\alpha}\alpha^m + \breve{\beta}\beta^m\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^{n+1} + \breve{\beta}\beta^{n+1}\right) - \left(\breve{\alpha}\alpha^{m+1} + \breve{\beta}\beta^{m+1}\right)(\breve{\alpha}\alpha^n + \breve{\beta}\beta^n)$$

$$= \breve{\alpha}^2\alpha^{m+n+1} + \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^m\beta^{n+1} + \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{n+1}\beta^m + \breve{\beta}^2\beta^{m+n+1} - \breve{\alpha}^2\alpha^{m+n+1} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m+1}\beta^n - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^n\beta^{m+1} - \breve{\beta}^2\beta^{m+n+1}$$

$$= \breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^m\beta^{n+1} - \alpha^{m+1}\beta^n) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^n\beta^{m+1})$$

$$= \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^n\beta^m(\alpha - \beta) - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^m\beta^n(\alpha - \beta)$$

$$= \sqrt{5}(\alpha\beta)^n(\breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^{m-n} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m-n})$$

elde edilir. (2.10) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak

$$= \sqrt{5}(-1)^n[(C - \sqrt{5}D)\beta^{m-n} - (C + \sqrt{5}D)\alpha^{m-n}]$$

$$= \sqrt{5}(-1)^n[C\beta^{m-n} - \sqrt{5}D\beta^{m-n} - C\alpha^{m-n} - \sqrt{5}D\beta^{m-n}]$$

$$= \sqrt{5}(-1)^{n-1}[C\alpha^{m-n} + \sqrt{5}D\alpha^{m-n} + \sqrt{5}D\beta^{m-n} - C\beta^{m-n}]$$

$$= \sqrt{5}(-1)^{n-1}[C(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) + \sqrt{5}D(\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})]$$

$$= \sqrt{5}(-1)^{n-1}[\sqrt{5}CF_{m-n} + \sqrt{5}DL_{m-n}]$$

$$= 5(-1)^{n-1}[CF_{m-n} + DL_{m-n}]$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Sonraki teoremde kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için Vajda özdeşlikleri verilecektir.

Teorem 6. Her x, y, z, n, r ve s tamsayıları için

$$H\mathcal{F}_{n+r}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{n+s}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_{n}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{n+r+s}^{(x,y,z)} = (-1)^n F_r(CF_s - DL_s) \tag{3.3}$$

ve

$$H\mathcal{L}_{n+r}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{n+s}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_{n}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{n+r+s}^{(x,y,z)} = 5(-1)^{n+1} F_r(CF_s - DL_s) \tag{3.4}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayıları için Binet formülünden

$$H\mathcal{F}_{n+r}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{n+s}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_{n}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{n+r+s}^{(x,y,z)}$$

$$= \frac{1}{5}\big[\big(\breve{\alpha}\alpha^{n+r} - \breve{\beta}\beta^{n+r}\big)\big(\breve{\alpha}\alpha^{n+s} - \breve{\beta}\beta^{n+s}\big) - \big(\breve{\alpha}\alpha^{n} - \breve{\beta}\beta^{n}\big)\big(\breve{\alpha}\alpha^{n+r+s} - \breve{\beta}\beta^{n+r+s}\big)\big]$$

$$= \frac{1}{5}\big[-\breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{n+r}\beta^{n+s} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{n+s}\beta^{n+r} + \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{n}\beta^{n+r+s} + \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{n+r+s}\beta^{n}\big]$$

$$= \frac{1}{5}\big[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^{n}\beta^{n+r+s} - \alpha^{n+r}\beta^{n+s}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{n+r+s}\beta^{n} - \alpha^{n+s}\beta^{n+r})\big]$$

$$= \frac{(-1)^n}{5}\left[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\beta^{r+s} - \alpha^r\beta^s) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{r+s} - \alpha^s\beta^r)\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+s}}{5}\left[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^{-s}\beta^r - \alpha^{r-s}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^r\beta^{-s} - \beta^{r-s})\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+s}}{5}\left[(\beta^r - \alpha^r)\left(\frac{\breve{\alpha}\breve{\beta}}{\alpha^s} + \frac{\breve{\beta}\breve{\alpha}}{\beta^s}\right)\right]$$

elde edilir. (2.10) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak

$$= \frac{(-1)^{n+s}}{\sqrt{5}}\left[F_r\left(\frac{-\beta^s\left(C + \sqrt{5}D\right) + \alpha^s\left(C - \sqrt{5}D\right)}{(\alpha\beta)^s}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n F_r}{\sqrt{5}}\left[\left(-C\beta^s - \sqrt{5}D\beta^s + C\alpha^s - \sqrt{5}D\alpha^s\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n F_r}{\sqrt{5}}\left[(C(\alpha^s - \beta^s) - \sqrt{5}D(\alpha^s + \beta^s)\right]$$

$$= (-1)^n F_r(CF_s - DL_s).$$

elde edilir ki bu eşitlik (3.3)'tür. Kısıtlamasız Lucas hibrit sayıları için Binet formülünden

$$H\mathcal{L}_{n+r}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{n+s}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_n^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{n+r+s}^{(x,y,z)}$$

$$= (\breve{\alpha}\alpha^{n+r} + \breve{\beta}\beta^{n+r})(\breve{\alpha}\alpha^{n+s} + \breve{\beta}\beta^{n+s}) - (\breve{\alpha}\alpha^n + \breve{\beta}\beta^n)(\breve{\alpha}\alpha^{n+r+s} + \breve{\beta}\beta^{n+r+s})$$

$$= \breve{\alpha}^2\alpha^{2n+r+s} + \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{n+r}\beta^{n+s} + \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{n+s}\beta^{n+r} + \breve{\beta}^2\beta^{2n+r+s} - \breve{\alpha}^2\alpha^{2n+r+s} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^n\beta^{n+r+s} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{n+r+s}\beta^n - \breve{\beta}^2\beta^{2n+r+s}$$

$$= \breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^{n+r}\beta^{n+s} - \alpha^n\beta^{n+r+s}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{n+s}\beta^{n+r} - \alpha^{n+r+s}\beta^n)$$

$$= (-1)^n[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^r\beta^s - \beta^{r+s}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^s\beta^r - \alpha^{r+s})$$

$$= (-1)^{n+s}[\breve{\alpha}\breve{\beta}\frac{(\alpha^r - \beta^r)}{\alpha^s} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\frac{(\alpha^r - \beta^r)}{\beta^s}]$$

$$= (-1)^{n+s}[(\alpha^r - \beta^r)\frac{\beta^s\breve{\alpha}\breve{\beta} - \alpha^s\breve{\beta}\breve{\alpha}}{(\alpha\beta)^s}]$$

bulunur ki (2.10) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak

$$= (-1)^n[(\alpha^r - \beta^r)(\beta^s(C + \sqrt{5}D) - \alpha^s(C - \sqrt{5}D)]$$

$$= (-1)^n[(\alpha^r - \beta^r)(\sqrt{5}D(\alpha^s + \beta^s) - C(\alpha^s - \beta^s)]$$

$$= 5(-1)^n F_r[DL_s - CF_s]$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremde kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için Catalan özdeşliği verilmiştir.

Teorem 7. Her x, y, z, m ve n tamsayıları için

$$H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)}H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)}]^2 = (-1)^{m-n+1}F_n[CF_n + DL_n] \qquad (3.5)$$

ve

$$H\mathcal{L}_{m+n}^{(x,y,z)}H\mathcal{L}_{m-n}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{L}_m^{(x,y,z)}]^2 = 5(-1)^{m-n+1}F_n[CF_n + DL_n] \qquad (3.6)$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayıları için Binet formülü

$$H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)}H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)}]^2$$

$$= \frac{1}{5}[(\breve{\alpha}\alpha^{m+n} - \breve{\beta}\beta^{m+n})(\breve{\alpha}\alpha^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{m-n}) - (\breve{\alpha}\alpha^{m} - \breve{\beta}\beta^{m})^2]$$

$$= \frac{1}{5}\big[\big(\breve{\alpha}^2\alpha^{2m} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m+n}\beta^{m+n} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{m-n}\beta^{m+n} + \breve{\beta}^2\beta^{2m}\big) - \big(\breve{\alpha}^2\alpha^{2m} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m}\beta^{m} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{m}\beta^{m} + \breve{\beta}^2\beta^{2m}\big)\big]$$

$$= \frac{1}{5}\big[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^m\beta^m - \alpha^{m+n}\beta^{m-n}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^m\beta^m - \alpha^{m-n}\beta^{m+n})\big]$$

$$= \frac{(-1)^m}{5}\left[\frac{\breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^n(\beta^n - \alpha^n) + \breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^n(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{5}\big[\breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^n(\alpha^n - \beta^n) - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^n(\alpha^n - \beta^n)\big]$$

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{5}\big[(\alpha^n - \beta^n)\big(\breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^n - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^n\big)\big]$$

verir ki (2.10) ve (2.11) eşitlikleri kullanılarak

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{5}\Big[(\alpha^n - \beta^n)\Big(\beta^n\big(C - \sqrt{5}D\big) - \alpha^n\big(C + \sqrt{5}D\big)\Big)\Big]$$

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{5}\big[(\alpha^n - \beta^n)\big(C\beta^n - \sqrt{5}D\beta^n - C\alpha^n - \sqrt{5}D\alpha^n\big)\big]$$

$$= \frac{(-1)^{m-n}}{5}[(\alpha^n - \beta^n)(-C(\alpha^n - \beta^n) - \sqrt{5}D(\alpha^n + \beta^n)]$$

$$= \frac{(-1)^{m-n+1}}{5}\Big[(\alpha^n - \beta^n)\Big(C(\alpha^n - \beta^n) + \sqrt{5}D(\alpha^n + \beta^n)\Big)\Big]$$

$$= (-1)^{m-n+1}F_n[CF_n + DL_n].$$

elde edilir ki bu eşitlik (3.5)'tir. Kısıtlamasız Lucas hibrit sayıları için Binet formülünden

$$H\mathcal{L}_{m+n}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{m-n}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{L}_m^{(x,y,z)}]^2$$

$$= \left(\breve{\alpha}\alpha^{m+n} + \breve{\beta}\beta^{m+n}\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^{m-n} + \breve{\beta}\beta^{m-n}\right) - \left(\breve{\alpha}\alpha^{m} + \breve{\beta}\beta^{m}\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^{m} + \breve{\beta}\beta^{m}\right)$$

$$= \overline{\alpha^2}\alpha^{2m} + \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m+n}\beta^{m-n} + \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{m-n}\beta^{m+n} + \overline{\beta^2}\beta^{2m} - \overline{\alpha^2}\alpha^{2m} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m}\beta^{m} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{m}\beta^{m} - \overline{\beta^2}\beta^{2m}$$

$$= \breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^{m+n}\beta^{m-n} - \alpha^m\beta^m) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{m-n}\beta^{m+n} - \alpha^m\beta^m)$$

$$= \breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha\beta)^m(\alpha^n\beta^{-n} - 1) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha\beta)^m(\alpha^{-n}\beta^n - 1)$$

$$= (-1)^m[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\beta^n}) - \breve{\beta}\breve{\alpha}(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n})]$$

$$= (-1)^m[\frac{\breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^n(\alpha^n - \beta^n) - \breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^n(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha\beta)^n}]$$

$$= (-1)^{m-n}[(\alpha^n - \beta^n)(\breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^n + \breve{\beta}\breve{\alpha}\beta^n)\,]$$

$$= (-1)^{m-n}[(\alpha^n - \beta^n)(\alpha^n(\mathrm{C} + \sqrt{5}\mathrm{D}) + \beta^n(\mathrm{C} - \sqrt{5}\mathrm{D}))]$$

$$= (-1)^{m-n}[(\alpha^n - \beta^n)(C(\alpha^n + \beta^n) + \sqrt{5}D(\alpha^n - \beta^n))]$$

$$= 5(-1)^{m-n}F_n[CF_n + DL_n]$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Bir sonraki teoremde kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için Cassini özdeşliği verilmiştir.

Teorem 8. Her x, y, z ve m tamsayıları için

$$H\mathcal{F}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{m-1}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)}]^2 = (-1)^m[C + D] \tag{3.7}$$

ve

$$H\mathcal{L}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{L}_{m-1}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{L}_m^{(x,y,z)}]^2 = 5(-1)^{m-1}\,[C + D] \tag{3.8}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayıları için Binet formulü

$$H\mathcal{F}_{m+1}^{(x,y,z)} \mathcal{F}_{m-1}^{(x,y,z)} - [\mathcal{F}_m^{(x,y,z)}]^2$$

$$= \frac{1}{5}[(\breve{\alpha}\alpha^{m+1} - \breve{\beta}\beta^{m+1})(\breve{\alpha}\alpha^{m-1} - \breve{\beta}\beta^{m-1}) - (\breve{\alpha}\alpha^m - \breve{\beta}\beta^m)^2]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^m\beta^m - \alpha^{m+1}\beta^{m-1}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^m\beta^m - \alpha^{m-1}\beta^{m+1})\right]$$

$$= \frac{(-1)^m}{5}\left[\breve{\alpha}\breve{\beta}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \breve{\beta}\breve{\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^m[\frac{\beta\breve{\beta}\breve{\alpha} - \alpha\breve{\alpha}\breve{\beta}}{\alpha\beta}]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^{m-1}[\beta(C - \sqrt{5}D) - \alpha(C + \sqrt{5}D)]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^{m-1}[C(\beta - \alpha) - \sqrt{5}D(\alpha + \beta)]$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}(-1)^{m-1}[-C(\alpha - \beta) - \sqrt{5}D(\alpha + \beta)]$$

$$=(-1)^m[C + D]$$

verir. Böylelikle eşitlik (3.7) ispatlanmış olur.

Kısıtlamasız Lucas hibrit sayıları için Binet formulünden

$$H\mathcal{F}_{m+1}^{(x,y,z)} H\mathcal{F}_{m-1}^{(x,y,z)} - [H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)}]^2$$

$$= \left(\breve{\alpha}\alpha^{m+1} + \breve{\beta}\beta^{m+1}\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^{m-1} + \breve{\beta}\beta^{m-1}\right) - \left(\breve{\alpha}\alpha^{m} + \breve{\beta}\beta^{m}\right)\left(\breve{\alpha}\alpha^{m} + \breve{\beta}\beta^{m}\right)$$

$$= \breve{\alpha}^2\alpha^{2m} + \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m+1}\beta^{m-1} + \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{m-1}\beta^{m+1} + \breve{\beta}^2\beta^{2m} \; - \breve{\alpha}^2\alpha^{2m} - \breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha^{m}\beta^{m} - \breve{\beta}\breve{\alpha}\alpha^{m}\beta^{m} - \breve{\beta}^2\beta^{2m}$$

$$= \breve{\alpha}\breve{\beta}(\alpha^{m+1}\beta^{m-1} - \alpha^m\beta^m) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\alpha^{m-1}\beta^{m+1} - \alpha^m\beta^m)$$

$$= (-1)^m[\breve{\alpha}\breve{\beta}(\frac{\alpha-\beta}{\beta}) + \breve{\beta}\breve{\alpha}(\frac{\beta-\alpha}{\alpha})]$$

$$= (-1)^m[\sqrt{5}(\frac{\breve{\alpha}\breve{\beta}\alpha - \breve{\beta}\breve{\alpha}\beta}{\alpha\beta})]$$

$$= (-1)^{m-1}\sqrt{5}[\alpha(C+\sqrt{5}D) - \beta(C-\sqrt{5}D)]$$

$$= (-1)^{m-1}\sqrt{5}[C(\alpha-\beta) + \sqrt{5}D(\alpha+\beta)]$$

$$= (-1)^{m-1}5[C+D]$$

elde edilir. Dolayısıyla eşitlik (3.8) ispatlanmış olur.

Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için üstel ve poisson üreteç fonksiyonları için aşağıdaki seri tanımlanmıştır

$$GE_{H\mathcal{F}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{F}_n \frac{t^n}{n!} \tag{3.9}$$

Teorem 9. Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için üstel üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$GE_{H\mathcal{F}}(t) = \frac{\breve{\alpha}e^{\alpha t} - \breve{\beta}e^{\beta t}}{\alpha-\beta}. \tag{3.10}$$

ve

$$GE_{H\mathcal{L}}(t) = \breve{\alpha}e^{\alpha t} + \breve{\beta}e^{\beta t}. \tag{3.11}$$

şeklindedir.

İspat. Eşitlik (27) den

$$GE_{H\mathcal{F}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{F}_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\breve{\alpha}\alpha^n - \breve{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\breve{\alpha}\alpha^n - \breve{\beta}\beta^n\right) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\breve{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} - \breve{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{\breve{\alpha}e^{\alpha t} - \breve{\beta}e^{\beta t}}{\alpha - \beta}.$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur. Eşitlik (30) benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 10. Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için poisson üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$GP_{H\mathcal{F}}(t) = \frac{\breve{\alpha}e^{\alpha t} - \breve{\beta}e^{\beta t}}{(\alpha - \beta)e^t} \tag{3.12}$$

ve

$$GP_{H\mathcal{L}}(t) = \frac{\breve{\alpha}e^{\alpha t} + \breve{\beta}e^{\beta t}}{e^t} \tag{3.13}$$

şeklindedir.

İspat.

$$GP(t) = e^{-t}GE$$

eşitliği

$$GP_{H\mathcal{F}}(t) = e^{-t}GE_{H\mathcal{F}}(t)$$

bağıntısını verir. Bu bağıntı eşitlik (3.9) da yerine yazılırsa ispat tamamlanır. Böylece

$$GP_{H\mathcal{F}}(t) = \frac{\breve{\alpha}e^{\alpha t} - \breve{\beta}e^{\beta t}}{(\alpha - \beta)e^{t}}$$

elde edilir. Eşitlik (3.13) benzer şekilde ispatlanabilir.

Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için bazı özdeşlikler bir sonraki teoremde verilmiştir.

Teorem 11. Her *m* ve *n* tamsayıları için

$$H\mathcal{F}_{n+1}^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{n}^{(x+1,y+1,z+1)} + F_{n-1}, \tag{3.14}$$

$$H\mathcal{L}_{n+1}^{(x,y,z)} = H\mathcal{L}_{n}^{(x+1,y+1,z+1)} + L_{n-1}, \tag{3.15}$$

$$H\mathcal{L}_{n}^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{n-1}^{(x+1,y+1,z+1)} + H\mathcal{F}_{n+1}^{(x,y,z)}, \tag{3.16}$$

$$H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)} + (-1)^{n}H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{m}^{(x,y,z)}L_{n}, \tag{3.17}$$

$$H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)}F_{m+n} - H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)}F_{m-n} = H\mathcal{F}_{2m}^{(x,y,z)}F_{2n} \tag{3.18}$$

$$H\mathcal{L}_{m+n}^{(x,y,z)}L_{m+n} - H\mathcal{L}_{m-n}^{(x,y,z)}L_{m-n} = 5H\mathcal{L}_{2m}^{(x,y,z)}F_{2n} \tag{3.19}$$

ve

$$\sqrt{5}H\mathcal{F}_{2m}^{(x,y,z)} = F_{m+1}H\mathcal{F}_{m}^{(x,y,z)} + F_{m}H\mathcal{F}_{m-1}^{(x,y,z)} \tag{3.20}$$

dir.

İspat. Kısıtlamasız Fibonacci hibrit sayılarının tanımın

$$HF_n^{(x,y,z)} = F_n + iF_{n+x} + \varepsilon F_{n+y} + hF_{n+z}$$

idi. $n \to n+1$ için

$$\begin{aligned} H\mathcal{F}_{n+1}^{(x,y,z)} &= F_{n+1} + iF_{n+x+1} + \varepsilon F_{n+y+1} + hF_{n+z+1} \\ &= F_n + F_{n-1} + iF_{n+x+1} + \varepsilon F_{n+y+1} + hF_{n+z+1} \\ &= F_n + iF_{n+x} + \varepsilon F_{n+y} + hF_{n+z} + F_{n-1} \\ &= H\mathcal{F}_n^{(x+1,y+1,z+1)} + F_{n-1} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise eşitlik (3.14)'ü ispatlar. Eşitlik (34) benzer şekilde ispatlanır. Bir sonraki ispat eşitlik (3.17) olacaktır. Bunun için

$$\begin{aligned} & H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)} + (-1)^n H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)} \\ &= \frac{\breve{\alpha}\alpha^{m+n} - \breve{\beta}\beta^{m+n}}{\alpha - \beta} + (-1)^n \frac{\breve{\alpha}\alpha^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\breve{\alpha}\alpha^{m+n} - \breve{\beta}\beta^{m+n}}{\alpha - \beta} + \frac{(\alpha\beta)^n(\breve{\alpha}\alpha^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{m-n})}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n\left(\breve{\alpha}\alpha^{m} - \breve{\beta}\beta^{m}\right) + \beta^n\left(\breve{\alpha}\alpha^{m} - \breve{\beta}\beta^{m}\right)}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\breve{\alpha}\alpha^m - \breve{\beta}\beta^m\right)}{\alpha - \beta}(\alpha^n + \beta^n)$$

$$= H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)} L_n$$

Bulunur ki ispat tamamlanır. Sonraki ispat eşitlik (3.18) içindir;

$$H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)} F_{m+n} - H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)} F_{m-n}$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\left(\breve{\alpha}\alpha^{m+n} - \breve{\beta}\beta^{m+n}\right)(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) - \left(\breve{\alpha}\alpha^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{m-n}\right)(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\breve{\alpha}\alpha^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{m+n}\beta^{m+n} - \breve{\beta}\alpha^{m+n}\beta^{m+n} + \breve{\beta}\beta^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{2m-2n} + \breve{\alpha}\alpha^{m-n}\beta^{m-n} + \breve{\beta}\alpha^{m-n}\beta^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{2m-2n}\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\breve{\alpha}\alpha^{2m+2n} + \breve{\beta}\beta^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{2m-2n} - \breve{\beta}\beta^{2m-2m}\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\breve{\alpha}\alpha^{2m+2n} + \breve{\beta}\beta^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{2m}\beta^{2n} - \breve{\beta}\alpha^{2n}\beta^{2m}\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\breve{\alpha}\alpha^{2m} - \breve{\beta}\beta^{2m}\right)(\alpha^{2n} - \beta^{2n})$$

$$= H\mathcal{F}_{2m}^{(x,y,z)} F_{2n}$$

olur ki ispat tamamlanır. Eşitlik (3.19)'in ispatı için yine kısıtlamasız hibrit sayılarının Binet formülünden

$$H\mathcal{F}_{m+n}^{(x,y,z)} F_{m+n} - H\mathcal{F}_{m-n}^{(x,y,z)} F_{m-n}$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\left(\breve{\alpha}\alpha^{m+n} - \breve{\beta}\beta^{m+n}\right)(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}) - \left(\breve{\alpha}\alpha^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{m-n}\right)(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\breve{\alpha}\alpha^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{m+n}\beta^{m+n} - \breve{\beta}\alpha^{m+n}\beta^{m+n} + \breve{\beta}\beta^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{2m-2n} + \breve{\alpha}\alpha^{m-n}\beta^{m-n} + \breve{\beta}\alpha^{m-n}\beta^{m-n} - \breve{\beta}\beta^{2m-2n}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\breve{\alpha}\alpha^{2m+2n} + \breve{\beta}\beta^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{2m-2n} - \breve{\beta}\beta^{2m-2m}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\breve{\alpha}\alpha^{2m+2n} + \breve{\beta}\beta^{2m+2n} - \breve{\alpha}\alpha^{2m}\beta^{2n} - \breve{\beta}\alpha^{2n}\beta^{2m}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\breve{\alpha}\alpha^{2m} - \breve{\beta}\beta^{2m}\right)(\alpha^{2n} - \beta^{2n})$$

$$= H\mathcal{F}_{2m}^{(x,y,z)}F_{2n}$$

elde edilir. Geriye son özdeşlik olan (3.20) kalır;

$$F_{m+1}H\mathcal{F}_m^{(x,y,z)} + F_m H\mathcal{F}_{m-1}^{(x,y,z)}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\breve{\alpha}\alpha^m - \breve{\beta}\beta^m}{\alpha - \beta}\right) + \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\breve{\alpha}\alpha^{m-1} - \breve{\beta}\beta^{m-1}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\breve{\alpha}\alpha^{2m+1} - \breve{\beta}\alpha^{m+1}\beta^m - \breve{\alpha}\alpha^m\beta^{m+1} + \breve{\beta}\beta^{2m+1}\right) + \left(\breve{\alpha}\alpha^{2m-1} - \breve{\beta}\alpha^m\beta^{m-1} - \breve{\alpha}\alpha^{m-1}\beta^m + \breve{\beta}\beta^{2m-1}\right)\right]$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m}(\alpha + \alpha^{-1}) + \breve{\beta}\beta^{2m}(\beta + \beta^{-1}) - \breve{\beta}(\alpha^{m+1}\beta^m + \alpha^m\beta^{m-1}) - \breve{\alpha}(\alpha^m\beta^{m+1} + \alpha^{m-1}\beta^m)$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m}(\alpha + \frac{1}{\alpha}) + \breve{\beta}\beta^{2m}(\beta + \frac{1}{\beta}) - \breve{\beta}(\alpha\beta)^m(\alpha + \beta^{-1}) - \breve{\alpha}(\alpha\beta)^m(\beta + \alpha^{-1})$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m}(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}) + \breve{\beta}\beta^{2m}(\frac{\beta^2 + 1}{\beta}) - \breve{\beta}(-1)^m(\alpha + \frac{1}{\beta}) - \breve{\alpha}(-1)^m(\beta + \frac{1}{\alpha})$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m}(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}) + \breve{\beta}\beta^{2m}(\frac{\beta^2+1}{\beta}) - \breve{\beta}(-1)^m(\frac{\alpha\beta+1}{\beta}) - \breve{\alpha}(-1)^m(\frac{\alpha\beta+1}{\alpha})$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m}\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right) + \breve{\beta}\beta^{2m}\left(\frac{\beta^2+1}{\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[\breve{\alpha}\alpha^{2m}(\frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}) + \breve{\beta}\beta^{2m}(\frac{5-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}})$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+5}\right) + \breve{\beta}\beta^{2m}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-5}\right)$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m} - \breve{\beta}\beta^{2m}\left(\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-5}\right)$$

$$= \breve{\alpha}\alpha^{2m} - \breve{\beta}\beta^{2m}$$

$$= \sqrt{5}H\mathcal{F}_{2m}^{(x,y,z)}$$

bulunur ki ispat tamamlanır.

Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları için son vereceğimiz özellikler bazı toplam özdeşlikleri olacaktır.

Teorem 12. Her pozitif *n* tamsayı için

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{F}_i^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{n+2}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_1^{(x,y,z)}, \tag{3.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{L}_i^{(x,y,z)} = H\mathcal{L}_{n+2}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_1^{(x,y,z)}, \tag{3.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{F}_{2i-1}^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{2n}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_0, \tag{3.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{L}_{2i-1}^{(x,y,z)} = H\mathcal{L}_{2n}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_0, \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{F}_{2i}^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{2n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_1, \tag{3.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{L}_{2i}^{(x,y,z)} = H\mathcal{L}_{2n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{L}_1, \tag{3.26}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H\mathcal{F}_i^{(x,y,z)} = H\mathcal{F}_{2n}^{(x,y,z)} \tag{3.27}$$

and

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H\mathcal{L}_i^{(x,y,z)} = H\mathcal{L}_{2n}^{(x,y,z)} \tag{3.28}$$

dir.

İspat.

$$a_i = H\mathcal{F}_{i+2}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_1^{(x,y,z)}$$

olarak tanımlayalım. Buna göre

$$a_i - a_{i-1} = H\mathcal{F}_i^{(x,y,z)}$$

olur. Buradan

$$\sum_{i=0}^{n} H\mathcal{F}_i^{(x,y,z)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{i-1})$$

$$= (a_n - a_{-1})$$

$$= a_n$$

elde edilir ki $a_{-1} = 0$ ve $a_n = H\mathcal{F}_{n+2}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_1^{(x,y,z)}$ özdeşlikleri eşitlik (3.21)'ı ispatlar. Sonraki ispatlanacak özdeşlik eşitlik (3.23) dir.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - q$$

olduğundan

$$\sum_{i=0}^{n} H\mathcal{F}_{2i-1}^{(x,y,z)}$$

$$= (F_{2n} - q) + i(F_{2n+x} - p) + \varepsilon\big(F_{2n+y} - q - p\big) + h(F_{2n+} - 2p - q)$$

$$= \big(F_{2n} + iF_{2n+x} + \varepsilon F_{2n+y} + hF_{2n+y}\big) - \big(q + ip + \varepsilon(p+q) + h(2p+q)\big)$$

$$= H\mathcal{F}_{2n}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_0$$

elde edilir ki ispat tamamlanır. Şimdi ise eşitlik (3.25) ispatlanacaktır.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - p$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} H\mathcal{F}_{2i}^{(x,y,z)}$$

$$= (F_{2n+1} - p) + i(F_{2n+x+1} - q - p) + \varepsilon\left(F_{2n+y+1} - 2p - q\right) + h(F_{2n+z+1} - 3p - q)$$

$$= \left(F_{2n+1} + iF_{2n+x+1} + \varepsilon F_{2n+y+1} + hF_{2n+z+1}\right) - \left(p + i(p+q) + \varepsilon(2p+q) + h(3p+2q)\right)$$

$$= H\mathcal{F}_{2n+1}^{(x,y,z)} - (F_1 + iF_2 + \varepsilon F_3 + hF_4)$$

$$= H\mathcal{F}_{2n+1}^{(x,y,z)} - H\mathcal{F}_1$$

elde edilir. Son ispatlanacak özdeşlik eşitlik (3.27) dır. Buna göre

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} H\mathcal{F}_i^{(x,y,z)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\breve{\alpha}\alpha^n - \breve{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\breve{\alpha}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^n - \breve{\beta}\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \beta^n\right)$$

$$= \frac{\breve{\alpha}(\alpha+1)^n - \breve{\beta}(\beta+1)^n}{\alpha - \beta}$$

$\alpha^2 = \alpha + 1, \beta^2 = \beta + 1$ özdeşlikleri yardımıyla

$$= \frac{\breve{\alpha}\alpha^{2n} - \breve{\beta}\beta^{2n}}{\alpha - \beta}$$

$$= H\mathcal{F}_{2n}^{(x,y,z)}$$

bulunur.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., Perera, K. & Pindas, S. (2011). An Introduction to Complex Analysis, *Springer Science +Business Media*, LLC.

Akkus, I., & Keçilioglu, O. (2015). Split Fibonacci and Lucas Octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(3), 517-525.

Akyiğit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2013). Split Fibonacci Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 535-545.

Aydın, F. T. (2018). Bicomplex Fibonacci Quaternions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 106, 147-153.

Bilgici, G., & Daşdemir, A. (2020). Some Unrestricted Fibonacci and Lucas Hyper-Complex Numbers. *Acta Et Commentationes Universitatis Tartuensis De Mathematica*, 24(1), 37-48.

Bilgici, G., Tokeşer, Ü., & Ünal, Z. (2017). k-Fibonacci and k-Lucas Generalized Quaternions. *Konuralp Journal of Mathematics*, 5(2), 102-113.

Bilgici, G., Tokeser, Ü., & Ünal, Z. (2017). Fibonacci and Lucas Sedenions. *J. Integer Seq.*, 20(1), 17-1.

Catarino, P. (2019). On k-Pell hybrid numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 22(1), 83-89.

Choo, Y. (2019). On the Generalized Bi-Periodic Fibonacci and Lucas Quaternions. *Miskolc Mathematical Notes*, 20(2), 807-821.

Flaut, C., & Shpakivskyi, V. (2013). Real Matrix Representations for the Complex Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 657-671.

Godase, A. D. (2019). Properties of k-Fibonacci and k-Lucas Octonions. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 50(4), 979-998.

Gül, K. (2018). On ***k***-Fibonacci and ***k***-Lucas Trigintaduonions. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 13(1), 1-10.

Halici, S. (2012). On Fibonacci Quaternions. *Advances in applied Clifford algebras*, 22(2), 321-327.

Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289-291.

Iyer, M. R. (1969). Some Results on Fibonacci Quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 7(3), 201-210.

Keçilioğlu, O., & Akkus, I. (2015). The Fibonacci Octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(1), 151-158.

Koshy T. (2018). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. John Wiley and Sons. New Jersey. USA.

Mora, F., Camino, C. A. & Cosenza, N., (2018). Fuzzy Dual Numbers Theory and Applications, *Speringer International Publishing*, Warsaw, Poland.

Özdemir, M. (2018). Introduction to Hybrid Numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(1), 11.

Ramírez, J. L. (2015). Some Combinatorial Properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas quaternions. *Analele Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica*, 23(2), 201-212.

Szynal-Liana, A. (2018). The Horadam Hybrid Numbers. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications*, 38(1), 91-98.

Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2018). On Pell and Pell− Lucas Hybrid Numbers. *Commentationes Mathematicae*, 58(1-2).

Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2019, September). On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. *Annales Mathematicae Silesianae*, 33(1), 276-283.

Tan, E., Yilmaz, S., & Sahin, M. (2016). On a New Generalization of Fibonacci Quaternions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 82, 1-4.

Tasci, D., & Yalcin, F. (2015). Fibonacci-p Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(1), 245-254.

Taşyurdu, Y. (2019). Tribonacci and Tribonacci-Lucas Hybrid Numbers. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 14(4), 245-254.

Yüce, S., & Aydın, F. T. (2016). A New Aspect of Dual Fibonacci Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(2), 873-884.

ÖZGEÇMİŞ



Adı Soyadı	: Mohamed Ali ELFISHUK
Doğum Yeri ve Yılı	: 06.05.1979, Libya
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: totolibyaali@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: İbrahim Alrfahy, 1997
Lisans	: Tripoli Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2003