T.C.
KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

k-JACOBSTHAL VE k −JACOBSTHAL LUCAS OKTONYONLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

RAGEA AHMED HUSAYN BOHAGR

DOKTORA TEZİ

DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT TOKEŞER

MART - 2022
KASTAMONU

TEZ ONAYI

Ragea Ahmed Husayn BOHAGR tarafından hazırlanan "k-**Jacobsthal ve** k-**Jacobsthal Lucas Oktonyonların Genelleştirilmesi**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **07.02.2022** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Ana Bilim Dalı Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER Kastamonu Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Ünvan Ad SOYAD XXX Üniversitesi	.....
Jüri Üyesi	Ünvan Ad SOYAD XXX Üniversitesi	.....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Enstitü Müdürü Prof. Dr. İzzet ŞENER .....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.

Ragea Ahmed BOHAGR

ÖZET

DOKTORA TEZİ

k -JACOBSTHAL VE k -JACOBSTHAL LUCAS OKTONYONLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

RAGEA AHMED HUSAYN BOHAGR

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI
DANIŞMAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ ÜMİT TOKEŞER

Bu tezde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizisi ve bunların belirli tanım durumlarını içeren formları ve bazı özdeşlikleri tartışılmıştır. Ayrıca bu diziler için bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ikinci mertebeden lineer yinelemenin ünlü tam sayıları olan Fibonacci, Fibonacci Lucas, Pell ve Pell Lucas sayıları hakkında bilgi verilmiştir. Bu dizilerin birçok özdeşliği, özelliği ve bu dizilerle ilgili uygulamaları vardır. İkinci bölümde Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizisi ile ilgili temel tanım ve teoremleri hatırlatıyoruz. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Jacobsthal dizisini sunuyoruz. Dördüncü bölümde Horadam dizisinden katsayılarla Horadam oktonyonlarını inceleyeceğiz. Tezin özgün bölümü olan beşinci bölümde, bazı özdeşlikleri ile $h(x)$ - Jacobsthal oktonyon polinomları verilmiştir. Son olarak, k - Jacobsthal ve k - Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlarını inceliyoruz ve bazı özelliklerini veriyoruz.

ANAHTAR KELİMELER: Jacobsthal ve Jacobsthal lucas dizisi, $k-$Jacobsthal ve k - Jacobsthal lucas dizisi, kuaterniyonları ve oktonyonları, $h(x)$-Jacobsthal ve $h(x)$- Jacobsthal Lucas oktonyon polinomları

Mart 2022, 103 Sayfa

ABSTRACT

PH.D THESIS

k-JACOBSTHAL AND k-JACOBSTHAL LUCAS GENERALIZED OCTONIONS

RAGEA AHMED HUSAYN BOHAGR

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. ÜMİT TOKEŞER

In this thesis, Jacobsthal and Jacobsthal lucas sequence and their forms containing specific cases of definition, some identities,dicussed and some new results are obtained for these sequence. The thesis consists of five chapters. In the first chapter, information about the famous integer numbers of the second order linear recurrence,the Fibonacci, Fibonacci lucas, Pell and Pell lucas numbers. This sequences have many identites,properties and aplications with related to this sequences. In the second chapter, we remind the basic definitions and theorms related to Jacobsthal and Jacobsthal lucas sequence. The third chapter we remind the Generalized Jacobsthal sequence. The fourth chapter we investigate Horadam octonions with coefficients from Horadam sequence. In the fifth chapter the original chapter of thesis,in the first section, the $h(x)$-Jacobsthal octonion polynomials with some identities are given. In the second sectio, we investigate k-Jacobsthal and k-Jacobsthal lucas generalized octonions and give some properties of them.

KEYWORDS: Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Sequence, k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas Sequence, its Quaternions and Octonions, $h(x)$-Jacobsthal and $h(x)$-Jacobsthal Lucas Octonion Polynomials

March 2022, 103 Page

TEŞEKKÜR

Araştırmamı sevgili anneme, aileme ve bu çalışmanın tamamlanmasında büyük emeği geçen danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit TOKEŞER'e ithaf ediyorum.

Ragea Ahmed BOHAGR

Kastamonu, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TEZ ONAYI ... **ii**
TAAHHÜTNAME ... **iii**
ÖZET ... **iv**
ABSTRACT ... **v**
TEŞEKKÜR ... **vi**
İÇİNDEKİLER ... **vii**
TABLOLAR DİZİNİ ... **ix**
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ... **x**
1. GİRİŞ ... **1**
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER ... **7**
2.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları ... 7
2.1.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları için Binet Formülleri ... 7
2.1.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Bazı Özellikleri ... 11
2.2 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$ - Jacobsthal Lucas Sayıları ... 12
2.2.1 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Sayıları için Binet Formülleri ... 14
2.2.2 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Sayılarının Bazı Özellikleri ... 18
2.3 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları ... 20
2.3.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları için Binet Formülleri 23
2.3.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Kuaterniyonlarının Bazı Özellikleri ... 25
2.4 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$ -Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları ... 27
2.4.1 $\boldsymbol{k}$ −Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları için Binet Formülleri ... 28
2.5 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Polinomları ... 33
2.5.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Polinomları için Binet Formülleri ... 34
2.5.2 Jacobsthal Polinomlarının ve Jacobsthal Lucas Polinomlarının Bazı Özellikleri ... 37
2.6 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$- Jacobsthal ve $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$- Jacobsthal Lucas Polinomları ... 39
2.6.1 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$-Jacobsthal Lucas Polinomları için Binet Formülleri ... 40
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ k-JACOBSTHAL DİZİSİNE GİRİŞ ... **44**
3.1 Genelleştirmeler ... 44
3.1.1 Binet Formülü ... 44
3.2 Genelleştirilmiş Jacobsthal Dizisi ... 45
3.2.1 Genelleştirilmiş Jacobsthal Dizileri için Binet Formülleri ... 46
3.2.2 Genelleştirilmiş Jacobsthal Dizileri Bazı Özellikleri ... 48
3.3 Genelleştirilmiş $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Dizisi ... 49
3.3.1 Genelleştirilmiş $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Sayıları için Binet Formülleri ... 49
4. HORADAM OKTONYONLARI ... **52**
4.1 Horadam Sayıları ... 53
4.1.1 Horadam Dizileri için Binet Formülleri ... 53
4.2 Horadam Oktonyonları ... 54
4.2.1 Horadam Oktonyonları için Binet Formülleri ... 54
4.3 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Oktonyonlar ... 57

4.3.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Oktonyonlar için Binet Formülleri 59
4.3.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Oktonyonlarının Bazı Özellikleri 61
4.4 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Oktonyonlar ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Oktonyonlar 62
4.4.1 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Oktonyonları ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Oktonyonları için Binet Formülü 64
4.4.2 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Oktonyonların Bazı Özellikleri .. 66
4.5 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonları 67
4.5.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonları için Binet Formülleri 68
4.5.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonları için Bazı Özellikler 72
5. $\boldsymbol{k}$-JACOBSTHAL VE $\boldsymbol{k}$ -JACOBSTHAL LUCAS GENELLEŞTİRİLMİŞ OKTONYONLAR 75
5.1 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$-Jacobsthal Oktonyon Polinomları 75
5.1.1 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$-Jacobsthal Oktonyon Polinomlarının Binet Formülü 79
5.2 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonlar 79
5.2.1 Bazı Özdeşlikler için Binet Formülleri ve Genellemeler 80
5.2.2 $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal ve $\boldsymbol{k}$-Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonların Bazı Özellikleri 86
KAYNAKLAR 100
ÖZGEÇMİŞ 103

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 2.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının ilk on üyesi 7
Tablo 2.2 k-Jacobsthal sayıları ve k-Jacobsthal Lucas sayılarının ilk on üyesi 13
Tablo 2.3 $H(1,1)$ tabanlı çarpım tablosu 21
Tablo 2.4 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas polinomlarının ilk on üyesi 33
Tablo 3.1 ξn genel dizisinin özel durumları..... 45
Tablo 3.2 Genelleştirilmiş Jacobsthal dizisinin on üyesi 45
Tablo 4.1 $O(1,1,1)$ bazında çarpım tablosu..... 52
Tablo 4.2 $H(a,b)$ nin tabanının çarpım tablosu 67
Tablo 4.3 $O(a,b,c)$ bazında çarpım tablosu..... 68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$	**:** Elemanlardan oluşan küme
$[\boldsymbol{a}]$	**:** a dan küçük en büyük tam sayı
$\mid \boldsymbol{a} \mid$	**:** a nın mutlak değeri
$\overline{\boldsymbol{a}}$	**:** a nın eşleniği
$\|\boldsymbol{a}\|$	**:** a nın normu
$\{\boldsymbol{b_n}\}_{\boldsymbol{1}}^{\infty}$	**:** b_n genel terimli dizi
$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	**:** Genelleştirilmiş kuaterniyon
$\mathbb{N}$	**:** Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{O_R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$	**:** R üzerinde genelleştirilmiş oktonyon
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	**:** Tam sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas sayıları ikinci mertebeden doğrusal yineleme ile oluşturulan tam sayı dizileridir. Fibonacci dizisi $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ yineleme bağıntısı ile $\{F_n\}_0^\infty$ şeklinde tanımlanmıştır. Lucas sayıları $L_0 = 0$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ yineleme bağıntısı ile $\{L_n\}_0^\infty$ şeklinde tanımlanmıştır. Fibonacci ve Lucas sayılarının birçok özdeşliği, özelliği ve uygulaması vardır. Diğer yandan Fibonacci, Lucas ile $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ özdeşligini sağlar.

Ayrıca, Pell sayıları $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ başlangıç koşulları ile $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$ yineleme bağıntısı kullanılarak, Pell Lucas sayıları da $PL_0 = 2$ ve $PL_1 = 2$ başlangıç koşulları ile $PL_{n+2} = 2PL_{n+1} + PL_n$ yineleme bağıntısı kullanılarak tanımlanmıştır. Bunların karakteristik denklemi $r^2 - r - 1 = 0$ dır ve kökleri $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

$r^2 - 2r - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri de $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$, $\beta_2 = 1 - \sqrt{2}$ dir. Sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas sayıları için Binet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.1}$$

$$L_n = \alpha_1^n + \beta_1^n \tag{1.2}$$

$$P_n = \frac{\alpha_2^n - \beta_2^n}{\alpha_2 - \beta_2} \tag{1.3}$$

$$PL_n = \alpha_2^n + \beta_2^n \tag{1.4}$$

Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas sayıları için üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2} \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n t^n = \frac{2-t}{1-t-t^2} \tag{1.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n = \frac{t}{1-2t-t^2} \tag{1.7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} PL_n t^n = \frac{2-2t}{1-2t-t^2} \tag{1.8}$$

Fibonacci sayılarının ve Lucas sayılarının genellemelerinden biri k -Fibonacci sayıları ve k-Lucas sayılarıdır. k -Fibonacci sayısı (Ramirez, 2015),(Bilgici vd., 2017), $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ başlangıç koşulları ve $F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}$ bağıntısı kullanılarak tanımlanır. k-Lucas sayıları, $L_{k,0} = 2$ ve $L_{k,1} = k$ başlangıç koşulları ve $L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n}$ yineleme bağıntısı kullanılarak tanımlanır. k pozitif reel sayısı için sırasıyla aşağıdaki bağıntılar tanımlanır (Ramirez, 2015),(Bilgici vd., 2017):

$k = 1$ için, k -Fibonacci, k -Lucas sayıları klasik Fibonacci ve Lucas sayılarına indirgenir.

$k = 2$ için k-Fibonacci ve k-Lucas sayıları Pell ve Pell Lucas sayılarına indirgenir.

k -Fibonacci ve k -Lucas sayılarının $r^2 - kr - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha_3 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_3 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ dir. Binet formülleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$F_{k,n} = \frac{\alpha_3^n - \beta_3^n}{\alpha_3 - \beta_3} \tag{1.9}$$

$$L_{k,n} = \alpha_3^n + \beta_3^n \tag{1.10}$$

k -Fibonacci ve k-Lucas dizisi için üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} t^n = \frac{t}{1-kt-t^2} \tag{1.11}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{k,n} t^n = \frac{2-kt}{1-kt-t^2} \tag{1.12}$$

$a, b \in R$ ve $H(a,b)$, $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ ile tabanlı genelleştirilmiş kuaterniyon cebir olsun. Eğer $a = b = 1$ ise o zaman $H(1,1)$ kuaterniyon bölüm cebiridir. $a = 1, b = -1$ ise $H(1,-1)$, split kuaterniyon cebiridir. Yineleme bağıntısı ile tanımlanan Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas kuaterniyonları aşağıdaki gibidir:

$$Q_{F_n} = \sum_{s=0}^{3} F_{n+s} e_s \tag{1.13}$$

$$Q_{L_n} = \sum_{s=0}^{3} L_{n+s} e_s \tag{1.14}$$

$$Q_{P_n} = \sum_{s=0}^{3} P_{n+s} e_s \tag{1.15}$$

$$Q_{PL_n} = \sum_{s=0}^{3} PL_{n+s} e_s \tag{1.16}$$

Burada F_n, L_n, P_n ve PL_n sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas sayılarıdır. Binet formülleri sırasıyla bu kuaterniyonlar için aşağıdaki gibidir:

$$Q_{F_n} = \frac{\tilde{\alpha}_1 \alpha_1 - \tilde{\beta}_1 \beta_1}{\sqrt{5}} \tag{1.17}$$

$$Q_{L_n} = \tilde{\alpha}_1 \alpha_1 + \tilde{\beta}_1 \beta_1 \tag{1.18}$$

$$Q_{P_n} = \frac{\tilde{\alpha}_2 \alpha_2 - \tilde{\beta}_2 \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} \tag{1.19}$$

$$Q_{PL_n} = \frac{\tilde{\alpha}_2\alpha_2 - \tilde{\beta}_2\beta_2}{2} \tag{1.20}$$

Burada $\tilde{\alpha}_1 = \sum_{s=0}^{3} \alpha_1^s e_s$, $\tilde{\beta}_1 = \sum_{s=0}^{3} \beta_1^s e_s$, $\tilde{\alpha}_2 = \sum_{s=0}^{3} \alpha_2^s e_s$ ve $\tilde{\beta}_2 = \sum_{s=0}^{3} \beta_2^s e_s$ dir. Herhangi bir n tamsayı için, k-Fibonacci $Q_{F_{k,n}}$, k-Lucas $Q_{L_{k,n}}$ ve $H(a,b)$ cebri üzerinde genelleştirilen kuaterniyonlar sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q_{F_{k,n}} = \sum_{s=0}^{3} F_{k,n+s} e_s \tag{1.21}$$

$$Q_{L_{k,n}} = \sum_{s=0}^{3} L_{k,n+s} e_s \tag{1.22}$$

Burada $F_{k,n}$, k-Fibonacci kuaterniyon ve $L_{k,n}$, k-Lucas kuaterniyondur. $k = 1$ için k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarına, $k = 2$ için k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları Pell ve Pell Lucas kuaterniyonlarına indirgenir. k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonunun Binet formülü aşağıdaki gibidir:

$$Q_{F_{k,n}} = \frac{\tilde{\alpha}_3\alpha_3^n - \tilde{\beta}_3\beta_3^n}{\alpha_3 - \beta_3} \tag{1.23}$$

$$Q_{L_{k,n}} = \tilde{\alpha}_3\alpha_3^n + \tilde{\beta}_3\beta_3^n \tag{1.24}$$

Burada $\tilde{\alpha}_3 = \sum_{s=0}^{3} \alpha_3^s e_s$, $\tilde{\beta}_3 = \sum_{s=0}^{3} \beta_3^s e_s$, $\alpha_3 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta_3 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ dir. k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonları dizileri için üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{F_{k,n}} t^n = \frac{t + e_1 + (k+t)e_2 + (k^2+1+kt)e_3}{1 - kt - t^2} \tag{1.25}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{L_{k,n}} t^n = \frac{2 - kt + (k+2t)e_1 + (k^2+2+kt)e_2 + (k^3+3k+k^2t+2t)e_3}{1 - kt - t^2} \tag{1.26}$$

$O(a,b,c)$, $\{1,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ tabanlı $\mathbb{R}$ üzerinde genelleştirilmiş oktonyon cebiri olsun. Bu cebir değişmeli ve birleşmeli değildir. Eğer $a=b=c=1$ ise $O(1,1,1)$ oktonyon cebirdir ve $a=b=1$ ise $c=-1$ bir split oktonyonları cebirdir. $n \geq 0$ için n'inci Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas oktonyonları aşağıdaki gibidir:

$$\hat{F}_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}\, e_s \tag{1.27}$$

$$\hat{L}_n = \sum_{s=0}^{7} L_{n+s}\, e_s \tag{1.28}$$

$$\hat{P}_n = \sum_{s=0}^{7} P_{n+s}\, e_s \tag{1.29}$$

$$\widehat{PL}_n = \sum_{s=0}^{7} PL\, e_s \tag{1.30}$$

F_n, L_n, P_n ve PL_n sırasıyla Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell Lucas sayılarıdır. Fibonacci ve Lucas oktonyonları için Binet formülü $n \geq 0$ için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{F}_n = \frac{\tilde{\alpha}_1 \alpha_1^n - \tilde{\beta}_1 \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1} \tag{1.31}$$

$$\hat{L}_n = \tilde{\alpha}_1 \alpha_1^n + \tilde{\beta}_1 \beta_1^n \tag{1.32}$$

Burada $\tilde{\alpha}_1 = \sum_{s=0}^{7} \alpha_1^s\, e_s, \tilde{\beta}_1 = \sum_{s=0}^{7} \beta_1^s\, e_s, \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} ve\ \beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. Fibonacci ve Lucas oktonyonları dizisi için üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{F}_n = \frac{\sum_{s=0}^{7} (F_s + F_{s-1}t) e_s}{1-t-t^2} \tag{1.33}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{L}_n = \frac{\sum_{s=0}^{7} (L_s + L_{s-1}t) e_s}{1-t-t^2} \tag{1.34}$$

Bazı özdeşlikler ile k pozitif reel sayısı için k-Jacobsthal sayıları $\{J_{k,n}\}$ ve k-Jacobsthal Lucas sayıları $\{j_{k,n}\}$ Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşlikleri ile çalışılacaktır. Ayrıca, Jacobsthal $\{Q_{J_n}\}$, Jacobsthal Lucas kuaterniyonları $\{Q_{j_n}\}$, k-Jacobsthal $\{Q_{J_{k,n}}\}$ ve k -Jacobsthal lucas kuaterniyonları $\{Q_{j_{k,n}}\}$ tanımlanacaktır. Bu

kuaterniyonlar için Binet formülü ve bazı özdeşlikleri verilecektir. Diğer yandan, $n > 0$ ve $h(x)$ reel katsayılı bir polinom olmak üzere $h(x)$- Jacobsthal polinomlar $\{J_{h,n}(x)\}$ ve $h(x)$-Jacobsthal Lucas polinomlardır $\{j_{h,n}(x)\}$. Bu polinomlar için Binet formülü, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri sağlanmıştır. Bundan sonra genelleştirilmiş k-Jacobsthal dizisini tanımlanabilir ve bu dizinin bazı özellikleri araştırılabilir. Ayrıca O, $\{1, e_1, e_2, \dots, e_7\}$ tabanlı sekiz boyutlu reel cebirden $\mathbb{R}$ üzerindeki oktonyon cebiri olarak gösterilsin. Bu taban, birleşmeli ve değişmeli olmayan cebirdir ve Jacobsthal'ı $\{\hat{J}_n\}$ ve Jacobsthal Lucas oktonyonları $\{\hat{j}_n\}$ tanımını verir. Son olarak, k -Jacobsthal $\{\hat{J}_{k,n}\}$ ve k - Jacobsthal Lucas üreteç oktonyonları $\{\hat{j}_{k,n}\}$ tanımlanmıştır. Ayrıca bu oktonyonların Binet formülü, Catalan ve Cassini özdeşlikleri tanıtılmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

2.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizilerini ilk olarak Slone (Slone, 1973) ve Horadam (Horadam, 1988) gösterilsin.Yani. Bu bölüme Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının tanımları ile başlanmıştır.

Tanım 2.1 $n > 0$ için Jacobsthal dizisi $J_0 = 0,\ J_1 = 1$ başlangıç şartları ile sağlayan aşağıdaki bağıntıyla tanımlanır.

$$J_{n+1} = J_n + 2J_{n-1},\ \ n \geq 1 \tag{2.1}$$

Tanım 2.2 $n > 0$ için Jacobsthal Lucas dizisi $j_0 = 2,\ j_1 = 1$ başlangıç şartları ile şu şekılde tanımlanır.

$$j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1},\quad n \geq 1 \tag{2.2}$$

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının sırasıyla ilk on üyesi aşağıdaki gibidir.

Tablo 2.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının ilk on elemanı

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$J_n(x)$	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171
$j_n(x)$	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511

2.1.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları için Binet Formülleri

Eşitlik (2.1)'in karakteristik denklemi $x^2 - x - 2 = 0$ ve kökleri $u = 2\,, v = -1$ dir. Öyle ki,

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = -2 \\ u - v = 3\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Teorem 2.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizisi Binet formülleri sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

$$J_n = \frac{u^n - v^n}{u-v} = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n), \tag{2.4}$$

$$j_n = u^n + v^n = 2^n + (-1)^n \, . \tag{2.5}$$

Binet formülünün $\{J_n\}$ in negatif üsleri için geçerli olduğunu varsayarsak,

$$J_{-n} = \frac{u^{-n} - v^{-n}}{u-v} \, , \tag{2.6}$$

$uv = -2$ olduğu için,

$$J_{-n} = \frac{v^n - u^n}{(uv)^n (u-v)} = -(-2)^{-n} \frac{u^n - v^n}{u-v} = (-1)^{1-n} 2^{-2} J_n \tag{2.7}$$

olur. Ayrıca, Binet formülünün $\{j_n\}$ nin negatif üsleri için geçerli olduğunu da varsayarsak,

$$j_{-n} = u^{-n} + v^{-n} = \frac{u^n + v^n}{(uv)^n} = \frac{(-1)^{-n}}{2^n} j_n \tag{2.8}$$

olur. Diğer yandan,

$$J_n = \begin{cases} \frac{2^n - 1}{3} \, , n \text{ çift ise} \\ \frac{2^n + 1}{3} \, , n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.9}$$

ve

$$j_n = \begin{cases} 2^n + 1, n \text{ çift ise} \\ 2^n - 1 \, , n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.10}$$

Her bir $n \geq 1$ değeri için $\sum_1^n J_s$ toplamı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$J_1 = 1$

$J_1 + J_2 = J_3 - 1$

$J_1 + J_2 + J_3 = 9 = 2J_3 - 1$

$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 20 = J_5 - 1$

$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 = 41 = 2J_5 - 1$

$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 = 84 = J_7 - 1$

Ayrıca, her bir $n \geq 1$ değeri için $\sum_1^n j_s$ toplamı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$j_1 = 1 = 2j_1 - 1$

$j_1 + j_2 = 1 + 5 = 6 = j_3 - 1$

$j_1 + j_2 + j_3 = 1 + 5 + 7 = 13 = 2j_3 - 1$

$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 1 + 5 + 7 + 17 = 30 = j_5 - 1$

$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 = 1 + 5 + 7 + 17 + 31 = 61 = 2j_5 - 1$

Bu adımlara göre aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2

$$\sum_{n=1}^{n} J_s = \begin{cases} J_{n+1} - 1, & n \text{ çift ise} \\ 2J_n - 1, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.11}$$

Teorem 2.3

$$\sum_{n=1}^{n} j_s = \begin{cases} j_{n+1} - 1, & n \text{ çift ise} \\ 2j_n - 1, & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.12}$$

Aşağıda ihtiyacımız olan bir sonraki özelliği araştırıyoruz.

$J_3J_1 - J_2^2 = 3 - 1 = 2 = (-1)^2.2$

$J_4J_2 - J_2^3 = 5 - 9 = -4 = (-1)^3.2^2$

$J_5J_3 - J_4^2 = 33 - 25 = 8 = (-1)^4.2^3$

$\vdots$

$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}, n \geq 2$

Ayrıca,

$j_3j_1 - j_2^2 = 7 - 25 = -18 = 3^2(-1)^3 2^1$

$j_4j_2 - j_3^2 = 85 - 49 = 36 = 3^2(-1)^4 2^2$

$\vdots$

$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = 3^2(-1)^{n+1} 2^{n-1}$

Horadam (Horadam, 1996), Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizisi için Cassini formülü aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}, \tag{2.13}$$

$$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = 3^2(-1)^{n+1} 2^{n-1}. \tag{2.14}$$

Sanırım üreteç fonksiyondan bahsediliyor. $\{J_n\}$ ve $\{j_n\}$ dizilerinin sırasıyla $G_J(x)$ ve $G_j(x)$ üreteç fonksiyonları aşağıda tanımlanmıştır:

$$G_J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n \tag{2.15}$$

$$G_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n \tag{2.16}$$

Teorem 2.4 $\{J_n\}$ ve $\{j_n\}$ dizileri için üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$G_J(x) = \frac{x}{1-x-2x^2} \tag{2.17}$$

$$G_j(x) = \frac{2-x}{1-x-2x^2}. \tag{2.18}$$

2.1.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayılarının Bazı Özellikleri

$n, m \geq 1$ ve $r \geq 0$ için aşağıdakiler sağlanır:

1. $j_n = 2J_{n+1} - J_n$
2. $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$
3. $j_n J_n = J_{2n}$
4. $3J_n + j_n = 2^{n+1}$
5. $J_n j_m + J_m j_n = 2J_{n+m}$
6. $J_n j_m - J_m j_n = (-1)^m 2^{m+1} J_{n-m}$
7. $j_{m+1} + j_m = 3(J_{m+1} + J_m) = 3.2^m$
8. $j_m J_{n+1} + 2j_{m-1} J_n = j_{n+m}$
9. $j_{m+1} - j_m = 2^m + 2(-1)^{m+1}$
10. $j_{m+r} - j_{n-r} = 2^{m-r}(2^{2r} - 1)$
11. $j_{m+r} + j_{m-r} = 2^{m-r}(2^{2r} + 1) + 2(-1)^{m-r}$

12. $j_n j_m + 9J_n J_m = 2j_{n+m}$

Teorem 2.5

J_n ve j_n nin açık formları aşağıdaki gibidir:

$$J_n = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-s}{s} 2^r \tag{2.19}$$

$$j_n = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-s} \binom{n-s}{s} 2^s. \tag{2.20}$$

Örnek 2.1

$$J_5 = \sum_{s=0}^{2} \binom{4-s}{s} 2^s = \binom{4}{0} + \binom{3}{1}(2) + \binom{2}{2}(2)^2 = 11 \tag{2.21}$$

$$j_4 = \sum_{s=0}^{2} \frac{5}{5-s} \binom{5-s}{s} 2^s = \frac{5}{5}\binom{5}{0} + \frac{5}{4}\binom{4}{2}(2) + \frac{5}{3}\binom{3}{2}(2)^2 = 31 \tag{2.22}$$

Teorem 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{j_{n+1}}{j_n}\right) = 2 \tag{2.23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{j_n}{J_n}\right) = 3. \tag{2.24}$$

2.2 *k*-Jacobsthal ve *k* - Jacobsthal Lucas Sayıları

Jhala vd. (Jhala vd., 2013) ve Compos vd. (Compos vd., 2014) sırasıyla Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizisini k-Jacobsthal sayılarının dizisini tanımlamıştır. Uygun (Uygun ve Eldogan, 2016) k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas sayıları için denklemler önermiştir. Ayrıca k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas sayıları için

Catalan'ın ve d'Ocagne'nin özdeşliklerinin de dahil olduğu bazı özellikleri Binet formülleri kullanılarak elde edilmiştir.

Tanım 2.3

Herhangi bir pozitif reel sayı k için $J_{k,0} = 0$ ve $J_{k,1} = 1$ başlangıç şartları ile k-Jacobsthal dizisi $\{J_{k,n}\}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$J_{k,n+1} = kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1}; \quad n \geq 1 \tag{2.25}$$

Tanım 2.4

Herhangi bir pozitif reel sayı k için $j_{k,0} = 2$ ve $j_{k,1} = k$ başlangıç şartları ile k-Jacobsthal dizisi $\{j_{k,n}\}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$j_{k,n+1} = kj_{k,n} + 2j_{k,n-1}; \quad n \geq 1 \tag{2.26}$$

Aşağıdaki tabloda sırasıyla k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayılarının ilk on elemanı verilmiştir.

Tablo 2.2 k-Jacobsthal sayıları ve k-Jacobsthal Lucas sayılarının ilk on elemanı

n	$J_{k,n}$	$j_{k,n}$
0	0	2
1	1	k
2	k	$k^2 + 4$
3	$k^2 + 2$	$k^3 + 6k$
4	$k^3 + 4k$	$k^4 + 8k^2 + 8$
5	$k^4 + 6k^2 + 4$	$k^5 + 10k^3 + 20k$
6	$k^5 + 8k^3 + 12k$	$k^6 + 12k^4 + 36k^2 + 16$
7	$k^6 + 10k^4 + 24k^2 + 8$	$k^7 + 14k^5 + 56k^3 + 56k$
8	$k^7 + 12k^5 + 40k^3 + 32k$	$k^8 + 16k^6 + 80k^4 + 128k^2 + 32k$
9	$k^8 + 14k^6 + 60k^4 + 80k^2 + 16$	$k^9 + 18k^7 + 108k^5 + 140k^3 + 144k$

2.2.1 k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Sayıları için Binet Formülleri

$x^2 - kx - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$, $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$ ve $\alpha > \beta$ dır, öyle ki

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k \\ \alpha\beta = -2 \\ \alpha - \beta = \sqrt{k^2+8} \end{cases} \tag{2.27}$$

dir.

Teorem 2.7

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayıları için Binet formülü şu şekilde tanımlanır:

$$J_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.28}$$

$$j_{k,n} = \alpha^n + \beta^n \tag{2.29}$$

İspat.

Teoremin ispatı (Compos vd., 2014) ve (Jhala vd., 2013) den açıktır.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizisi için üreteç fonksiyonları sırasıyla $G_{J_k}(x)$ ve $G_{j_k}(x)$ ile gösterilsin. Yani

$$G_{J_k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n} x^n \tag{2.30}$$

$$G_{j_k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j_{k,n} x^n \tag{2.31}$$

Teorem 2.8

$G_{J_k}(x)$ ve $G_{j_k}(x)$ için üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$G_{J_k}(x) = \frac{x}{1-kx-2x^2} \tag{2.32}$$

$$G_{j_k}(x) = \frac{2-kx}{1-kx-2x^2} \tag{2.33}$$

İspat.

Teoremin ispatı (Compos vd., 2014) ve (Jhala vd., 2013) den açıktır.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizilerinin Binet formülünü kullanarak ve $\alpha\beta = -2$ Catalan özdeşliği ve d'Ocagne özdeşliğini elde etmemizi sağlar.

Teorem 2.9 (Catalan özdeşliği)

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizisi için Catalan özdeşliği sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$J_{k,n-r}J_{k,n+r} - J_{k,n}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}J_{k,r}^2 \tag{2.34}$$

$$j_{k,n-r}j_{k,n+r} - j_{k,n}^2 = (-1)^{n-r+1}2^{n-r}\left((-2)^{r+2} - j_{k,r}^2\right) \tag{2.35}$$

İspat.

(Compos vd., 2014) deki ikinci ispattan aşağıdaki eşitliği elde ederiz,

$$J_{k,n-r}J_{k,n+r} - J_{k,n}^2 = \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2$$

$$= \frac{-(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - 2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r\right]$$

$$= -(\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2$$

$$= -(-2)^{n-r} J_{k,r}^2 = (-1)^{n-r+1} 2^{n-r} J_{k,r}^2.$$

Teorem 2.9 daki Catalan'ın özdeşliğinde $r = 1$ alırsak ve $J_{k,1} = 1$, $j_{k,1} = k$ başlangıç koşulunu kullanırsak, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizisi için Cassini'nin özdeşliğini sırasıyla aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$J_{k,n-1}J_{k,n+1} - J_{k,n}^2 = (-1)^n 2^{n-1} \tag{2.36}$$

$$j_{k,n-1}j_{k,n+1} - j_{k,n}^2 = (-2)^{n-1}\left(j_{k,1} + 8\right) \tag{2.37}$$

Teorem 2.10 (d'Ocagne özdeşliği)

$n > m$ ise o zaman,

$$J_{k,n}J_{k,m+1} - J_{k,n+1}J_{k,m} = (-2)^m J_{k,n-m} \tag{2.38}$$

$$j_{k,n}j_{k,m+1} - j_{k,n+1}j_{k,m} = (-2)^m\sqrt{k^2+8}\left(j_{k,n-m} - 2^{m-n+1}\left(k + \sqrt{k^2+8}\right)^{n-m}\right) \tag{2.39}$$

İspat.

Teoremin ispatı (Compos vd., 2014) ve (Jhala vd., 2013) den açıktır.

Teorem 2.11

$J_{k,n}$, $j_{k,n}$ $(n \geq 1)$ için açık ifadeler:

$$J_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{s=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2s+1}k^{n-1-2s}\left(k^2+8\right)^s, \tag{2.40}$$

$$j_{k,n} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-s}\binom{n-s}{s} k^{n-2s} 2^s. \tag{2.41}$$

İspat.

Teoremin ispatı (Compos vd., 2014) ve (Jhala vd., 2013) den açıktır.

Örnek 2.2

Eğer $n = 3$ ise o zaman,

$$J_{k,3} = \frac{1}{4}\left[\binom{3}{1}k^2 + \binom{3}{3}(k^2+8)\right] = \frac{1}{4}[3k^2 + k^2 + 8] = k^2 + 2 \tag{2.42}$$

$$j_{k,3} = \binom{3}{0}k^3 + \frac{3}{2}\binom{2}{1}2k = k^3 + 6k \tag{2.43}$$

Aşağıdaki teoremde, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas dizisinden terimleri ayırma bölümünün limiti.

Teorem 2.12

$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{k,n}}{J_{k,n-1}} = \alpha$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{j_{k,n}}{j_{k,n-1}} = \alpha$ dir.

İspat.

Binet formülünden,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{k,n}}{j_{k,n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}$$

$|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$ olduğu için, o zaman $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_{k,n}}{j_{k,n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \frac{1}{\beta}} = \alpha.$$

2.2.2 k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Sayılarının Bazı Özellikleri

$n \geq 1$ için, $r \geq 0$ ve k pozitif bir tam sayı olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır.

1. $J_{k,4n+r} - 2^{2n} J_{k,r} = J_{k,2n} j_{k,2n+r}$
2. $J_{k,4n+r} + 2^{2n} J_{k,r} = j_{k,2n} J_{k,2n+r}$
3. $j_{k,4n+r} - 2^{2n} j_{k,r} = (k^2+8) J_{k,2n} J_{k,2n+r}$
4. $j_{k,4n+r} + 2^{2n} j_{k,r} = j_{k,2n} j_{k,2n+r}$
5. $J_{k,3n+r} - (-2)^n J_{k,n+r} = J_{k,n} j_{k,2n+r}$
6. $J_{k,3n+r} + (-2)^n J_{k,n+r} = j_{k,n} J_{k,2n+r}$
7. $j_{k,3n+r} - (-2)^n j_{k,n+r} = (k^2+8) J_{k,n} J_{k,2n+r}$
8. $j_{k,3n+r} + (-2)^n j_{k,n+r} = j_{k,n} j_{k,2n+r}$

İspat.

k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas sayılarının Binet formulleriyle aşağıdaki özdeşlikleri ispatlayabiliriz.

$$J_{k,2n} j_{k,2n+r} = \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} \right) (\alpha^{2n+r} + \beta^{2n+r})$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{4n+r} - \beta^{4n+r} - (\alpha\beta)^{2n} (\alpha^r - \beta^r)]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{4n+r} - \beta^{4n+r} - 2^{2n} (\alpha^r - \beta^r)]$$

$$= (\frac{\alpha^{4n+r} - \beta^{4n+r}}{\alpha - \beta}) - 2^{2n}(\frac{\alpha^{r} - \beta^{r}}{\alpha - \beta})$$

$$= J_{k,4n+r} - 2^{2n}J_{k,r}.$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

$$(k^2+8)J_{k,2n}J_{k,2n+r} = (k^2+8)\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{2n+r} - \beta^{2n+r}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= (\alpha^{4n} + \beta^{4n}) - (\alpha\beta)^{2n}(\alpha^{r} + \beta^{r})$$

$$= j_{k,4n+r} - 2^{2n}j_{k,r}.$$

$$J_{k,n}j_{k,2n+r} = \left(\frac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^{2n+r} + \beta^{2n+r})$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{3n+r} - \beta^{3n+r} - (\alpha\beta)^{n}(\alpha^{n+r} - \beta^{n+r})]$$

$$= J_{k,3n+r} - (-2)^{n}J_{k,n+r}$$

Diğer özdeşlikler de aynı şekilde ispatlanabilir.

Teorem 2.13

α, β kökleri, k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas sayıları arasında farklı bir ilişki vardır.

$$\alpha^{n} = \alpha J_{k,n} + 2J_{k,n-1} \tag{2.43}$$

$$\beta^{n} = \beta J_{k,n} + 2J_{k,n-1} \tag{2.44}$$

$$\sqrt{k^2+8}\alpha^{n} = \alpha j_{k,n} + 2j_{k,n-1} \tag{2.45}$$

$$-\sqrt{k^2+8}\beta^n = \beta j_{k,n} + 2j_{k,n-1} \tag{2.46}$$

İspat.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayılarının Binet formülüne göre, $\alpha\beta = -2$ ve $\alpha + \beta = k$ dır.

$$\alpha J_{k,n} + 2J_{k,n-1} = \alpha\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + 2\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{n+1} + 2\beta^{n-1} + 2\alpha^{n-1} - 2\beta^{n-1}]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{n+1} + 2\alpha^{n-1}]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}[\alpha^{n-1}(\alpha^2 - \alpha\beta)] = \alpha^n$$

$$\beta j_{k,n} + 2j_{k,n-1}$$

$$= \beta(\alpha^n + \beta^n) + 2(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$$= \alpha^{n-1}(\alpha\beta) + \beta^{n+1} + 2\alpha^{n-1} + 2\beta^{n-1}$$

$$= \beta^{n-1}(2 + \beta^2)$$

$$= -\beta^n(\alpha - \beta)$$

$$= -\beta^n\sqrt{k^2+8}.$$

2.3 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları

Kuaterniyonlar ilk kez İrlandalı matematikçi William Rown Hamiton (William, 1843) tarafından tasvir edilmiştir. Protrayal, şaşırtıcı sayıların karmaşıklığının daha

yüksek uzamsal boyutlara bir tür genişlemesidir. Kuaterniyonların düzenlenmesi $\{Q\}$, $\{\mathbb{R}\}$ ve non-qenuine sayısı üzerindeki değişmeli olmayan normlu bölme değişkenidir. Jacobsthal sayıları ve Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki farklı ilişkileri araştırılmış ve bu kuaterniyonlar için sırasıyla Binet formülü ve Cassini özdeşlikleri verilmiştir. Ayrıca, Binet formülü ve üreteç fonksiyonları dahil olmak üzere başvurulan kuaterniyonların birkaç özelliği verilmiştir. $\{Q\}$ kuaterniyonları aşağıdaki gibi gösterilsin. Yani:

$$Q = \{q = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \tag{2.47}$$

Tablo 2.3 $H(1,1)$ tabanlı çarpım tablosu

·	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	e_1	1

Szynal-Lizana ve Wloch (Szynal-Lizana ve Wloch, 2015) Jacobsthal kuaterniyonlarını $\{Q_{J_n}\}$ ve Jacobsthal Lucas kuaterniyonları $\{Q_{j_n}\}$'ı aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 2.5

$n \geq 0$ için Jacobsthal kuaterniyonları şu şekilde tanımlanır,

$$Q_{J_n} = J_n + J_{n+1} e_1 + J_{n+2} e_2 + J_{n+3} e_3 \,. \tag{2.48}$$

Tanım 2.6

$n \geq 0$ için aşağıdaki bağıntıyla tanımlanan Jacobsthal Lucas kuaterniyonları şu şekilde tanımlanır,

$$Q_{j_n} = j_n + j_{n+1} e_1 + j_{n+2} e_2 + j_{n+3} e_3 \,. \tag{2.49}$$

Teorem 2.14

$n \geq 0$ için Jacobsthal kuaterniyonlarını ve Jacobsthal Lucas kuaterniyonlarını sırasıyla şu şekilde tanımlayabiliriz,

$$Q_{J_{n+2}} = Q_{J_{n+1}} + 2Q_{J_n}, \tag{2.50}$$

$$Q_{j_{n+2}} = Q_{j_{n+1}} + 2Q_{j_n}. \tag{2.51}$$

İspat.

Jacobsthal sayıların tanımından,

$$Q_{J_{n+1}} + 2Q_{J_n} = J_{n+1} + J_{n+2}e_1 + J_{n+3}e_2 + J_{n+4}e_3 + 2(J_n + J_{n+1}e_1 + J_{n+2}e_2 + J_{n+3}e_3)$$

$$= J_{n+1} + 2J_n + (J_{n+2} + 2J_{n+1})e_1 + (J_{n+3} + 2J_{n+2})e_2 + (J_{n+4} + 2J_{n+3})e_3$$

$$= J_{n+2} + J_{n+3}e_1 + J_{n+4}e_2 + J_{n+5}e_3 = Q_{J_{n+2}}$$

İkinci eşitliğin ispatı (Yasarsoy vd., 2018) den açıktır.

Jacobsthal kuaterniyon Q_{J_n} ve Jacobsthal Lucas kuaterniyon Q_{j_n} eşleniği sırasıyla $\overline{Q}_{J_n}$ ve $\overline{Q}_{j_n}$ dır, öyle ki:

$$\overline{Q}_{J_n} = J_n - J_{n+1}e_1 - J_{n+2}e_2 - J_{n+3}e_3, \tag{2.52}$$

$$\overline{Q}_{j_n} = j_n - j_{n+1}e_1 - j_{n+2}e_2 - j_{n+3}e_3. \tag{2.53}$$

Teorem 2.15

$n \geq 1$ için aşağıdaki bağıntıları verebiliriz,

$$Q_{J_n} + \overline{Q}_{J_n} = 2J_n, \tag{2.54}$$

$$Q_{j_n} + \overline{Q}_{j_n} = 2j_n. \tag{2.55}$$

İspat.

$$Q_{J_n} + \overline{Q}_{J_n} = J_n + J_{n+1}e_1 + J_{n+2}e_2 + J_{n+3}e_3 + J_n - J_{n+1}e_1 - J_{n+2}e_2 - J_{n+3}e_3 = 2J_n$$

İkinci denklemin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Jacobsthal kuaterniyon ve Jacobsthal Lucas kuaterniyon normları şu şekilde tanımlanır:

$$\left\|Q_{J_n}\right\| = J_n^2 + J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2, \tag{2.56}$$

$$\left\|Q_{j_n}\right\| = j_n^2 + j_{n+1}^2 + j_{n+2}^2 + j_{n+3}^2. \tag{2.57}$$

2.3.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları için Binet Formülleri

u ve υ, $x^2 - x - 2 = 0$ için karakteristik denklemin kökleridir, öyle ki $u = 2$ ve $\upsilon = -1$, $u + \upsilon = 1$, $u - \upsilon = 3$ ve $u\upsilon = -2$ dir.

Teorem 2.16

$n \geq 1$ için Jacobsthal kuaterniyonları ve Jacobsthal Lucas kuaterniyonları için sırasıyla Binet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$Q_{J_n} = \frac{\tilde{u}u^n - \tilde{\upsilon}\upsilon^n}{u-\upsilon}, \tag{2.58}$$

$$Q_{j_n} = \tilde{u}_1 u^n - \tilde{v}_1 \upsilon^n. \tag{2.59}$$

Burada $\tilde{u} = 1 + 2e_1 + 4e_2 + 8e_3$, $\tilde{\upsilon} = 1 - e_1 + e_2 - e_3$, $\tilde{u}_1 = 3 + 6e_1 + 12e_2 + 24e_3$, ve $\tilde{v}_1 = 3 - 3e_1 + 3e_2 - 3e_3$ dir.

İspat.

(Torunbalcı-Aydın ve Yüce, 2017) daki gibidir.

Teorem 2.17 (Cassini özdeşliği)

$n \geq 1$ için Q_{J_n} ve Q_{j_n} için Cassini özdeşliği aşağıdaki gibidir:

$$Q_{J_{n-1}}Q_{J_{n+1}} - Q_{J_n}^2 = (-1)^n 2^{n-1}(7 + 5e_1 + 7e_2 + 5e_3), \tag{2.60}$$

$$Q_{j_{n-1}}Q_{j_{n+1}} - Q_{j_n}^2 = (-2)^{n-1}3^2(7 + 5e_1 + 7e_2 + 5e_3). \tag{2.61}$$

İspat.

İspat için aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır.

$$J_m J_{n-1} - J_{m-1}J_n = (-1)^n 2^{n-1} J_{m-n},$$

$$j_m j_{n-1} - j_{m-1}j_n = (-2)^n 2^{n-1}3^2 j_{m-n}.$$

$$Q_{J_{n-1}}Q_{J_{n+1}} - Q_{J_n}^2$$

$$= (J_{n-1} + J_n e_1 + J_{n+1}e_2 + J_{n+2}e_3)(J_{n+1} + J_{n+2}e_1 + J_{n+3}e_2 + J_{n+4}e_3) -$$
$$(\mathrm{J_n} + \mathrm{J_{n+1}e_1} + \mathrm{J_{n+2}e_2} + \mathrm{J_{n+3}e_3})^2$$

$$= [(J_{n-1}J_{n+1} - J_n^2) - (J_n J_{n+2} - J_{n+1}^2) - (J_{n+1}J_{n+3} - J_{n+2}^2) - (J_{n+2}J_{n+4} - J_{n+3}^2)]$$

$$+[-(J_n J_{n+1} - J_{n-1}J_{n+2}) - (J_{n+2}J_{n+3} - J_{n+1}J_{n+4})]e_1$$

$$+[-(J_n J_{n+2} - J_{n-1}J_{n+3}) - j_n J_{n+4} - (J_n J_{n+2} - J_{n+1}^2) + J_{n+2}^2]e_2$$

$$+[-(J_n J_{n+3} - J_{n-1}J_{n+4}) - (J_{n+2}J_{n+1} - J_{n+1}J_{n+2})]e_3$$

$$= (-1)^n 2^{n-1}(7 + 5e_1 + 7e_2 + 5e_3)\ .$$

Örnek 2.3

J_1, J_2 ve J_3 Jacobsthal kuaterniyonları olsun, öyle ki

$J_1 = 1 + e_1 + 3e_2 + 5e_3,$

$J_2 = 1 + 3e_1 + 5e_2 + 11e_3,$

$J_3 = 3 + 5e_1 + 11e_2 + 21e_3.$

Bu durumda, $J_1 J_3 - J_2^2 = (-1)^3(7 + 5e_1 + 7e_2 + 5e_3)$ dir.

Örnek 2.4

j_2, j_3 ve j_4 Jacobsthal Lucas kuaterniyonları olsun, öyle ki

$j_2 = 5 + 7e_1 + 17e_2 + 31e_3,$

$j_3 = 7 + 17e_1 + 31e_2 + 65e_3,$

$j_4 = 17 + 31e_1 + 65e_2 + 127e_3.$

Bu durumda, $j_2 j_4 - j_3^2 = (-2)^2 3^2(7 + 5e_1 + 7e_2 + 5e_3)$ dir.

2.3.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Kuaterniyonlarının Bazı Özellikleri

Teorem 2.18

$n \geq 1$ ise aşağıdaki ilişkilere sahip olabiliriz.

1. $Q_{J_n}^2 = 2J_n Q_{J_n} - Q_{J_n}\bar{Q}_{J_n}$
2. $J_n - J_{n+1}e_1 - J_{n+2}e_2 - J_{n+3}e_3 = J_n + J_{n+2} + J_{n+4} + J_{n+6}$
3. $Q_{J_n}Q_{J_m} + 2Q_{J_{n-1}}Q_{J_{m-1}} = 2Q_{J_{n+m-1}} - J_{n+m-1} - J_{n+m+1} - J_{n+m+3} - J_{n+m+5}$

4. $Q_{J_{n+1}} + 2Q_{J_{n-1}} = Q_{j_n}$

5. $Q_{J_n}^2 = Q_{J_n}\left(2J_n - \overline{Q}_{J_n}\right)$

6. $Q_{J_n}\bar{Q}_{J_n} + 2Q_{J_{n-1}}\bar{Q}_{J_{n-1}} = J_{2n-1} + J_{2n+1} + J_{2n+3} + J_{2n+5}$

7. $Q_{J_n}^2 + Q_{J_{n-1}}^2 = 2Q_{J_{2n-1}} - (J_{2n-1} + J_{2n+1} + J_{2n+3} + J_{2n+5}) = 2Q_{J_{2n-1}} - Q_{J_n}\bar{Q}_{J_n} - 2Q_{J_{n-1}}\bar{Q}_{J_{n-1}}$

İspat.

$O_{J_n}^2 = (J_n + J_{n+1}e_1 + J_{n+2}e_2 + J_{n+3}e_3)^2$

$= J_n^2 - J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2 + 2J_n(J_{n+1}e_1 + J_{n+2}e_2 + J_{n+3}e_3)$

$= 2J_nQ_{J_n} - Q_{J_n}\bar{Q}_{J_n}$.

$Q_{J_n}Q_{J_m} + 2Q_{J_{n-1}}Q_{J_{m-1}} = J_nJ_m - J_{n+1}J_{m+1} - J_{n+2}J_{m+2} - J_{n+3}J_{m+3}$

$+(J_nJ_{m+1} + J_{n+1}J_m + J_{n+2}J_{m+3} - J_{n+3}J_{m+2})e_1$

$+(J_nJ_{m+2} - J_{n+1}J_{m+3} + J_{n+2}J_m - J_{n+3}J_{m+1})e_2$

$+(J_nJ_{m+3} + J_{n+1}J_{m+2} - J_{n+2}J_{m+1} + J_{n+3}J_m)e_3$

$+2(J_{n-1}J_{m-1} - J_nJ_m - J_{n+1}J_{m+1} - J_{n+2}J_{m+2})$

$+2(J_{n-1}J_m + J_nJ_{m-1} + J_{n+1}J_{m+2} - J_{n+2}J_{m+1})e_1$

$+2(J_{n-1}J_{m+1} - J_nJ_{m+2} + J_{n+1}J_{m-1} - J_{n+2}J_m)e_2$

$+2(J_{n-1}J_{m+2} + J_nJ_{m+1} - J_{n+1}J_m + J_{n+2}J_{m-1})e_3$

$+(J_{n+m-1} - J_{n+m+1} - J_{n+m+3} - J_{n+m+5}) + 2J_{n+m-1}$

$$+2J_{n+m}e_1 + 2J_{n+m+1}e_2 + 2J_{n+m+2}e_3$$

$$= 2Q_{J_{n+m-1}} - J_{n+m-1} - J_{n+m+1} - J_{n+m+3} - J_{n+m+5} .$$

2.4 k-Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları

k-Jacobsthal kuaterniyonları $\{Q_{J_{k,n}}\}$ ve k-Jacobsthal Lucas kuaterniyonları $\{Q_{j_{k,n}}\}$, Jacobsthal Q_{J_n} ve Jacobsthal Lucas Q_{J_n} ın bir genellemesidir. Taşçı (Tasci, 2017), k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayıları ile ilişkili k-Jacobsthal kuaterniyonlar arasındaki farklı bağlantıları araştırmıştır.

Tanım 2.7

k-Jacobsthal kuaterniyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q_{J_{k,n}} = J_{k,n} + J_{k,n+1}e_1 + J_{k,n+2}e_2 + J_{k,n+3}e_3 \tag{2.63}$$

Tanım 2.8

k-Jacobsthal Lucas kuaterniyonları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Q_{j_{k,n}} = j_{k,n} + j_{k,n+1}e_1 + j_{k,n+2}e_2 + j_{k,n+3}e_3 \tag{2.64}$$

Teorem 2.19

$n \geq 0$ için k-Jacobsthal kuaterniyonlarını ve k-Jacobsthal Lucas kuaterniyonları aşağıdaki yineleme formüllerini sağlar.

$$Q_{J_{k,n+2}} = kQ_{J_{k,n+1}} + 2Q_{J_{k,n}} , \tag{2.65}$$

$$Q_{j_{k,n+2}} = kQ_{j_{k,n+1}} + 2Q_{j_{k,n}} . \tag{2.66}$$

İspat.

k-Jacobsthal sayılarının yineleme formülünden,

$$kQ_{J_{k,n+1}} + 2Q_{J_{k,n}} = k\left(J_{k,n+1} + J_{k,n+2}e_1 + J_{k,n+3}e_2 + J_{k,n+4}e_3\right)$$

$$+2\left(J_{k,n} + J_{k,n+1}e_1 + J_{k,n+2}e_2 + J_{k,n+3}e_3\right)$$

$$= kJ_{k,n+1} + 2J_{k,n} + \left(kJ_{k,n+2} + 2J_{k,n+1}\right)e_1$$

$$+\left(kJ_{k,n+3} + 2J_{k,n+2}\right)e_2 + \left(kJ_{k,n+4} + 2J_{k,n+3}\right)e_3$$

$$= J_{k,n+2} + J_{k,n+3}e_1 + J_{k,n+4}e_2 + J_{k,n+5}e_3 = Q_{J_{k,n+2}}$$

2.4.1 $k-$ Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Kuaterniyonları için Binet Formülleri

$x^2 - kx - 2 = 0$ denkleminin kökleri α, β olsun, öyle ki $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}$, $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$ dir.

Teorem 2.20

Sırasıyla k-Jacobsthal kuaterniyonları ve k-Jacobsthal Lucas kuaterniyonları için Binet formülleri şu şekildedir:

$$Q_{J_{k,n}} = \frac{\tilde{\alpha}\alpha^n - \tilde{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{2.67}$$

$$Q_{j_{k,n}} = \tilde{\alpha}\alpha^n + \tilde{\beta}\beta^n. \tag{2.68}$$

Burada $\tilde{\alpha} = 1 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3$, ve $\tilde{\beta} = 1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3$ dir.

İspat.

k -Jacobsthal sayılarının Binet formülünden ve elimizdeki k -Jacobsthal kuaterniyonlarından:

$$Q_{J_{k,n}} = J_{k,n} + J_{k,n+1}e_1 + J_{k,n+2}e_2 + J_{k,n+3}e_3$$

$$= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} + (\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta})e_1 + (\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha-\beta})e_2 + (\frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha-\beta})e_3$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha^n(1 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3) - \beta^n(1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3)]$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}\alpha^n + \tilde{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}.$$

Aynı şekilde, k -Jacobsthal Lucas kuaterniyonları için ikinci Binet formülü ispatlanabilir.

k -Jacobsthal kuaterniyonları ve k -Jacobsthal Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonları sırasıyla $G_{J_k}(x)$ ve $G_{j_k}(x)$ olsun. Yani

$$G_{J_k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{J_{k,n}} x^n, \tag{2.69}$$

$$G_{j_k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{j_{k,n}} x^n. \tag{2.70}$$

Teorem 2.21

$G_{J_k}(x)$ ve $G_{j_k}(x)$ için üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$G_{J_k}(x) = \frac{Q_{J_{k,0}} + (Q_{J_{k,1}} - kQ_{J_{k,0}})x}{1 - kx - 2x^2}, \tag{2.71}$$

$$G_{j_k}(x) = \frac{Q_{j_{k,0}} + (Q_{j_{k,1}} - kQ_{j_{k,0}})x}{1 - kx - 2x^2}. \tag{2.72}$$

Burada,

$$Q_{J_{k,0}} = e_1 + ke_1 + (k^2+2)e_3,$$

$$Q_{J_{k,1}} = 1 + ke_1 + (k^2+2)e_2 + (k^3+4k)e_3,$$

$$Q_{j_{k,0}} = 2 + ke_1 + (k^2+4)e_2 + (k^3+6k)e_3,$$

$$Q_{j_{k,1}} = k + (k^2+4)e_1 + (k^3+6k)e_2 + (k^4+8k^2+8)e_3.$$

İspat.

$$G_{J_k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{J_{k,n}}\, x^n$$

$$G_{J_k}(x) = Q_{J_{k,0}} + Q_{J_{k,1}}x + Q_{J_{k,2}}x^2 + \cdots$$

$$kxG_{J_k}(x) = kQ_{J_{k,0}}x + kQ_{J_{k,1}}x^2 + kQ_{J_{k,2}}x^3 + \cdots$$

ve

$$2x^2G_{J_k}(x) = 2Q_{J_{k,0}}x^2 + 2Q_{J_{k,1}}x^3 + 2Q_{J_{k,2}}x^4 + \cdots$$

$$(1 - kx - 2x^2)G_{J_k}(x) = Q_{J_{k,0}} + \left(Q_{J_{k,1}} - kQ_{J_{k,0}}\right)x$$

$$G_{J_k}(x) = \frac{Q_{J_{k,0}} + \left(Q_{J_{k,1}} - kQ_{J_{k,0}}\right)x}{1 - kx - 2x^2}$$

İkinci ispat (Tasci, 2017) den açıktır.

Teorem 2.22 (Catalan Özdeşliği)

n ve r tam sayıları için aşağıdakilere sahibiz.

$$Q_{J_{k,n-r}}Q_{J_{k,n+r}} - Q_{J_{k,n}}^2 = -(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^{n-r}J_{k,r}^2\,, \tag{2.73}$$

$$Q_{j_{k,n-r}}Q_{j_{k,n+r}} - Q_{j_{k,n}}^2 = -(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^{n-r}\left[j_{k,r}^2 - (-2)^{r+2}\right]. \tag{2.74}$$

Burada, $n, r \in z^+, n > r$, $\tilde{\alpha} = 1 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3$ ve $\tilde{\beta} = 1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3$ dür.

İspat.

k -Jacobsthal lucas kuaterniyonları için Binet formülüne göre,

$$Q_{j_{k,n-r}}Q_{j_{k,n+r}} - Q_{j_{k,n}}^2 = \left(\tilde{\alpha}\alpha^{n-r} + \tilde{\beta}\beta^{n-r}\right)\left(\tilde{\alpha}\alpha^{n+r} + \tilde{\beta}\beta^{n+r}\right) - \left(\tilde{\alpha}\alpha^n + \tilde{\beta}\beta^n\right)^2$$

$$= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r} - 2\right)$$

$$= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^n\left(\frac{\alpha^{2r} + \beta^{2r} - 2\alpha^r\beta^r}{(-2)^r}\right)$$

$$= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^{n-r}[(\alpha^r + \beta^r)^2 - 4(\alpha\beta)^r]$$

$$= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^{n-r}\left(j_{k,n}^2 - (-2)^{r+2}\right)$$

Diğer ispat (Tasci, 2017) de dir.

Teorem 2.23 (Cassini Özdeşliği)

Catalan özdeşliğinde $r = 1$ alırsak, o zaman

$$Q_{J_{k,n-1}}Q_{J_{k,n+1}} - Q_{J_{k,n}}^2 = -(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^{n-1}, \tag{2.75}$$

$$Q_{j_{k,n-1}}Q_{j_{k,n+1}} - Q_{j_{k,n}}^2 = -(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})(-2)^{n-1}(k^2 + 8) \tag{2.76}$$

dir.

Teorem 2.24 (d'ocagne Özdeşliği)

Eğer $n > m$ ise o zaman,

$$Q_{J_{k,n}} Q_{J_{k,m+1}} - Q_{J_{k,n+1}} Q_{J_{k,m}} = -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(-2)^m J_{k,n-m}, \tag{2.77}$$

$$Q_{j_{k,n}} Q_{j_{k,m+1}} - Q_{j_{k,n+1}} Q_{j_{k,m}} \tag{2.78}$$

$$= -(-2)^m \left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)\sqrt{k^2+8}\left[j_{k,n-m} - 2^{m-n+1}\left(k+\sqrt{k^2+8}\right)^{n-m}\right].$$

İspat.

Binet formülü ve köklerin çarpımından,

$$Q_{J_{k,n}} Q_{J_{k,m+1}} - Q_{J_{k,n+1}} Q_{J_{k,m}} = \left(\frac{\tilde{\alpha}\alpha^n - \tilde{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\tilde{\alpha}\alpha^{m+1} - \tilde{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$-\left(\frac{\tilde{\alpha}\alpha^{n+1} - \tilde{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\tilde{\alpha}\alpha^{m} - \tilde{\beta}\beta^{m}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\alpha^n\beta^m(\alpha-\beta) - \tilde{\beta}\tilde{\alpha}\alpha^m\beta^n(\alpha-\beta)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\alpha^n\beta^m - \tilde{\beta}\tilde{\alpha}\alpha^m\beta^n\right]$$

$$= -\frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}(\alpha\beta)^n\left[\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}\right]$$

$$= -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(-2)^n J_{k,m-n}.$$

Benzer yöntemle ikinci denklemi de ispatlayabiliriz.

2.5 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Polinomları

A.F. Horadam (Horadam, 1995) $\{J_n(x)\}$ Jacobsthal polinomlarının ve $\{j_n(x)\}$ Jacobsthal Lucas polinomlarının dizisini incelemiştir.

Tanım 2.9

$n \geq 0$ için Jacobsthal polinomları $J_o(x) = 0,\ J_1(x) = 1$ başlangıç şartları ile aşağıdaki bağıntıyla tanımlanır.

$$J_{n+2}(x) = J_{n+1}(x) + 2xJ_n(x), \quad n \geq 1\ . \tag{2.79}$$

Tanım 2.10

$n \geq 0$ için Jacobsthal Lucas polinomları $j_o(x) = 2,\ j_1(x) = 1$ başlangıç şartları ile şu şekilde tanımlanır:

$$j_{n+2}(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_n(x), \quad n \geq 1. \tag{2.80}$$

$x = 1$ alırsak, Jacobsthal sayılarına ve Jacobsthal Lucas sayılarını elde ederiz. $x = \frac{1}{2}$ alırsak, $J_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n$ ve $j_n\left(\frac{1}{2}\right) = L_n$ elde ederiz. Aşağıdaki tabloda Jacobsthal polinomlarının ve Jacobsthal Lucas polinomlarının ilk on elemanı verilmiştir.

Tablo 2.4 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas polinomlarının ilk on elemanı

n	$J_n(x)$	$j_n(x)$
0	0	2
1	1	1
2	1	$4x + 1$
3	$2x + 1$	$6x + 1$
4	$4x + 1$	$8x^2 + 8x + 1$
5	$4x^2 + 6x + 1$	$20x^2 + 10x + 1$
6	$12x^2 + 8x + 1$	$16x^3 + 36x^2 + 12x + 1$
7	$8x^3 + 24x^2 + 10x + 1$	$56x^3 + 56x^2 + 14x + 1$

8	$32x^3+40x^2+12x+1$	$32x^4+128x^3+80x^2+16x+1$
9	$16x^4+80x^3+60x^2+14x+1$	$144x^4+240x^3+108x^2+18x+1$

2.5.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Polinomları için Binet Formülleri

$u(x)$ ve $v(x)$, $y^2-y-2x=0$ karakteristik denkleminin kökleri olsun, öyle ki $u(x)=\frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}$, $v(x)=\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}$ dir.

$$\begin{cases} u(x)+v(x)=1 \\ u(x)v(x)=-2x \\ u(x)-v(x)=\sqrt{8x+1} \end{cases}. \tag{2.81}$$

Teorem 2.25

Sırasıyla $\{J_n(x)\}$ ve $\{j_n(x)\}$ için Binet formülleri aşağıdaki gibidir (Koshy, 2019).

$$J_n(x)=\frac{u^n(x)-v^n(x)}{u(x)-v(x)}, \tag{2.82}$$

$$j_n(x)=u^n(x)+v^n(x). \tag{2.83}$$

A.F. Horadam (Horadam, 1995) üreteç fonksiyonları vermiştir. Şimdi biz üreteç fonksiyonlarını aşağıda tanımlanmıştır.

$$G_{J_{(x)}}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}J_n(x)\,t^n, \tag{2.84}$$

$$G_{j_{(x)}}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}j_n(x)\,t^n. \tag{2.85}$$

Teorem 2.26

Sırasıyla $\{J_n(x)\}$ ve $\{j_n(x)\}$ için üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$G_{J(x)} = \frac{t}{1-t-2xt^2}, \tag{2.86}$$

$$G_{j(x)} = \frac{2-t}{1-t-2xt^2}. \tag{2.87}$$

İspat.

$f(x) = G_{J(x)}(t)$

$f(x) = J_0(x) + J_1(x)t + J_2(x)t^2 + \ldots$

$f(x)t = J_0(x)t + J_1(x)t^2 + J_2(x)t^3 + \ldots$

olduğunu varsayalım. O zaman

$2xf(x)t^2 = 2xJ_0(x)t^2 + 2xJ_1(x)t^3 + 2xJ_2(x)t^4 + \ldots$

$(1 - t - 2xt^2)f(x) = t$

$$f(x) = \frac{t}{1 - t - 2xt^2}$$

Teorem 2.27 (Catalan Özdeşliği)

n ve $r \leq n$ negatif olmayan tamsayılar olsun (Koshy, 2019).

$$J_{n-r}(x)J_{n+r}(x) - J_n^2(x) = (-1)^{n-r+1}(2x)^{n-r}J_r^2(x), \tag{2.88}$$

$$j_{n-r}(x)j_{n+r}(x) - j_n^2(x) = (-1)^{n+r}(2x)^{n+r}[j_r(x) + 2(2x)^r]. \tag{2.89}$$

Catalan özdeşliğinde $r = 1$ alırsak, Cassini özdeşliği aşağıdaki gibi olur.

Teorem 2.28 (Cassini özdeşliği)

$$J_{n-1}(x)J_{n+1}(x) - J_n^2(x) = (-1)^n(2x)^{n-1}, \tag{2.90}$$

$$j_{n-1}(x)j_{n+1}(x) - j_n^2(x) = (-1)^{n+1}(2x)^{n-1}[1 + 8x]. \tag{2.91}$$

Aşağıdaki teorem, sırasıyla $J_n(x)$, $j_n(x)$ için açık ifadelerdir.

Teorem 2.29

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-s-1}{i} (2x)^s , \tag{2.92}$$

$$j_n(x) = \sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-s} \binom{n-s}{s} (2x)^s . \tag{2.93}$$

Örnek 2.5

$$J_5(x) = \sum_{s=0}^{2} \binom{5-1-s}{s} (2x)^s = \binom{4}{0} + \binom{3}{1}(2x) + \binom{2}{2}(2x)^2$$

$$= 1 + 6x + 4x^2$$

ve

$$j_5(x) = \sum_{s=0}^{2} \frac{5}{5-s} \binom{5-s}{s} (2x)^s = \binom{5}{0} + \frac{5}{4}\binom{4}{1}(2x) + \frac{5}{3}\binom{3}{2}(2x)^2$$

$$= 1 + 10x + 20x^2.$$

2.5.2 Jacobsthal Polinomlarının ve Jacobsthal Lucas Polinomlarının Bazı Özellikleri

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas polinomlarının bazı özellikleri verilmiştir.

1. $j_n(x)J_n(x) = J_{2n}(x)$
2. $j_n(x) = J_{n+1}(x) + 2xJ_{n-1}(x)$
3. $\big(\alpha(x) - \beta(x)\big)^2 J_n(x) = j_{n+1}(x) + 2xj_{n-1}(x)$
4. $J_n(x) + j_n(x) = 2J_{n+1}(x)$
5. $\big(\alpha(x) - \beta(x)\big)^2 J_n(x) + j_n(x) = 2j_{n+1}(x)$
6. $\big(\alpha(x) - \beta(x)\big)J_n(x) + j_n(x) = 2\alpha^n(x)$
7. $\big(\alpha(x) - \beta(x)\big)J_n(x) - j_n(x) = -2\beta^n(x)$
8. $J_n(x)j_m(x) + J_m(x)j_n(x) = 2J_{m+n}(x)$
9. $j_n(x)j_m(x) + \big(\alpha(x) - \beta(x)\big)^2 J_n(x)J_m(x) = 2j_{n+m}(x)$

İspat.

Binet formüllerinden Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas polinomlarının özellikleri aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$J_{n+1}(x) + 2xJ_{n-1}(x) = \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + 2x\,\frac{\alpha^{n-1}(x) - \beta^{n-1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} - \frac{\alpha^n(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$= \frac{\alpha^n(x)\big(\alpha(x)-\beta(x)\big)-\beta^n(x)\big(\alpha(x)-\beta(x)\big)}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

$$= \alpha^n(x)+\beta^n(x) = j_n(x).$$

$$j_{n+1}(x)+2xj_{n-1}(x) = \alpha^{n+1}(x)+\beta^{n+1}(x)-\big(\alpha(x)\beta(x)\big)\big(\alpha^{n-1}(x)+\beta^{n-1}(x)\big)$$

$$= \alpha^{n+1}(x)+\beta^{n+1}(x)-\alpha^n(x)\beta(x)-\alpha(x)\beta^n(x)$$

$$= \alpha^n(x)\big(\alpha(x)-\beta(x)\big)-\beta^n(x)\big(\alpha(x)-\beta(x)\big)$$

$$= \big(\alpha(x)-\beta(x)\big)\big(\alpha^n(x)-\beta^n(x)\big)$$

$$= \big(\alpha(x)-\beta(x)\big)^2\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$$

$$= \big(\alpha(x)-\beta(x)\big)^2 J_n(x).$$

$$\big(\alpha(x)-\beta(x)\big)J_n(x)+j_n(x)$$

$$= \big(\alpha(x)-\beta(x)\big)\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}+\alpha^n(x)+\beta^n(x) = 2\alpha^n(x).$$

$$J_n(x)j_m(x)+J_m(x)j_n(x)$$

$$= \left(\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\big(\alpha^m(x)\big)+\beta^m(x)\right)+\left(\frac{\alpha^m(x)-\beta^m(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)\big(\alpha^n(x)+\beta^n(x)\big)$$

$$= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\big(2\alpha^{n+m}(x)-2\beta^{n+m}(x)\big) = 2J_{n+m}(x).$$

Örnek 2.6

$m = 3$ ve $n = 2$ olsun, o zaman aşağıdakileri elde ederiz.

$J_2(x)j_3(x) + J_3(x)j_2(x) = (1)(6x+1) + (2x+1)^2(4x+1)$

$= 2(4x^2 + 6x + 1) = 2J_5(x)$

ve

$j_2(x)j_3(x) + \left(\alpha(x) + \beta(x)\right)^2 J_2(x)J_3(x) = (4x+1)(6x+1) + \left(\sqrt{8x+1}\right)^2(2x+1)$

$= 2(20x^2 + 10x + 1) = 2j_5(x).$

2.6 $h(x)$- Jacobsthal ve $h(x)$- Jacobsthal Lucas Polinomları

Caterino ve Morgado (Caterino ve Morgado, 2016) $h(x)$- Jacobsthal polinomları $\{J_{h,n}(x)\}$ ve $h(x)$ −Jacobsthal Lucas polinomları $\{j_{h,n}(x)\}$ olmuştur. Öyle ki $h(x)$ gerçek katsayıları, $n > 0$ olan bir polinomdur ve bu polinomlar için Binet formülü ve Catalan, Cassini ve d'Ocagne'nin özdeşliği sağlanmıştır.

Tanım 2.11

$J_{h,0}(x) = 0,\ J_{h,1} = 1$ başlangıç şartları ile $h(x)$ -Jacobsthal polinomları şu şekilde tanımlanır:

$$J_{h,n+1}(x) = J_{h,n}(x) + h(x)J_{h,n-1}(x)\ . \tag{2.94}$$

Tanım 2.12

$h(x)$ -Jacobsthal Lucas polinomları $j_{h,0}(x) = 2,\ j_{h,1} = 1$ başlangıç şartları ile aşağıdaki bağıntıyla tanımlanır:

$$j_{h,n+1}(x) = j_{h,n}(x) + h(x)j_{h,n-1}(x). \tag{2.95}$$

2.6.1 $h(x)$ -Jacobsthal ve $h(x)$ -Jacobsthal Lucas Polinomları için Binet Formülleri

$\{J_{h,n}(x)\}$, $\{j_{h,n}(x)\}$ ve $n \geq 0$ için Binet formülleri sırasıyla şu şekildedir:

$$J_{h,n}(x) = \frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}, \tag{2.96}$$

$$j_{h,n}(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) \tag{2.97}$$

dir. Öyle ki $m^2 - m - h(x) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha(x) = \frac{1+\sqrt{1+4h(x)}}{2}, \beta(x) = \frac{1-\sqrt{1+4h(x)}}{2}$ dır. Böylece,

$$\begin{cases} \alpha(x) + \beta(x) = 1 \\ \alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{1+4h(x)} \\ \alpha(x)\beta(x) = -h(x). \end{cases} \tag{2.98}$$

$h(x)$-Jacobsthal ve $h(x)$ −Jacobsthal Lucas polinomları için üreteç fonksiyonları şu şekilde belirtilmiştir:

$$G_J(t) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{h,n}(x)t^n, \tag{2.99}$$

$$G_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} j_{h,n}(x)t^n. \tag{2.100}$$

Teorem 2.30

$h(x)$- Jacobsthal ve $h(x)$- Jacobsthal Lucas polinomları için üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$G_J(t) = \frac{t}{1-t-t^2h(x)}, \tag{2.101}$$

$$G_j(t) = \frac{2-t}{1-t-t^2h(x)}. \tag{2.102}$$

İspat.

$h(x)$-Jacobsthal Lucas polinomlarından ve üreteç fonksiyonlarından, aşağıdaki elde edilir:

$$G_j(t)=\sum_{n=0}^{\infty} j_{h,n}(x)t^n ,$$

$$G_j(t)=j_{h,0}+j_{h,1}t+\sum_{n=2}^{\infty} j_{h,n}(x)t^n=2+t+\sum_{n=2}^{\infty} j_{h,n}(x)t^n$$

$$=2+t+\sum_{n=2}^{\infty}\left(j_{h,n-1}(x)+h(x)\,j_{h,n-2}(x)\right)t^n$$

$$=2+t+\sum_{n=2}^{\infty} j_{h,n-1}(x)t^{n-1}t+h(x)\sum_{n=2}^{\infty} j_{h,n-2}(x)t^{n-2}t^2$$

$$=2+t+t\left(\sum_{n=1}^{\infty} j_{h,n-1}(x)t^{n-1}-j_{h,0}(x)\right)+h(x)t^2\sum_{n=2}^{\infty} j_{h,n-2}(x)t^{n-2}$$

$$=2-t+t\sum_{s=0}^{\infty} j_{h,s}t^s+h(x)t^2\sum_{s=0}^{\infty} j_{h,s}(x)t^s$$

$$=2-t+\sum_{s=0}^{\infty} j_{h,s}(x)t^s\left[t+h(x)t^2\right]$$

$$G_j(t)=2-t+G_j(t)\left[t+h(x)t^2\right]$$

$$G_j(t)=\frac{2-t}{1-t-h(x)t^2}$$

Diğer ispatlar (Catarino, 2016) da görülebilir.

Teorem 2.31 (Catalan özdeşliği)

n ve r için $n > 0, m > 0$ ve $n \geq r$ tamsayıları için.

$$J_{h,n-m}(x)J_{h,n+m}(x) - J_{h,n}^2(x) = (-1)^{n-m+1}\big(h(x)\big)^{n-m}J_{h,m}(x), \tag{2.103}$$

$$j_{h,n-m}(x)j_{h,n+m}(x) - j_{h,n}^2(x) = h^{n-m}(x)\big[j_{h,m}^2(x) - 4\big(-h(x)\big)^m\big]. \tag{2.104}$$

Diğer ispatlar (Catarino, 2016) da mevcuttur.

Teorem 2.32 (Cassini özdeşliği)

Catalan'ın özdeşliğinde $m = 1$ alırsak,

$$J_{h,n-1}(x)J_{h,n+1}(x) - J_{h,n}^2(x) = (-1)^n\big(h(x)\big)^{n-1}, \tag{2.105}$$

$$j_{h,n-1}(x)j_{h,n+1}(x) - j_{h,n}^2(x) = (-1)^{n-1}h^{n-1}(x)\big(1 + 4h(x)\big) \tag{2.106}$$

olur.

Teorem 2.33 (d'Ocagne özdeşliği)

r negatif olmayan tamsayı ve n herhangi bir doğal sayısı için $n > r$ ise,

$$J_{h,n}(x)J_{h,r+1}(x) - J_{h,n+1}(x)J_{h,r}(x) = (-1)^r h^r(x)J_{h,n-r}(x), \tag{2.107}$$

$$j_{h,n}(x)j_{h,r+1}(x) - j_{h,n+1}(x)j_{h,r}(x)$$

$$= \sqrt{1 + 4h(x)}\big(-h(x)\big)^r\left[j_{h,n-r}(x) - 2^{r-n+1}\left(1 + \sqrt{1 + 4h(x)}\right)^{n-r}\right]. \tag{2.108}$$

İspat.

Binet formülüne ve $h(x)$-Jacobsthal ve $h(x)$-Jacobsthal Lucas polinomlarının kökler çarpımına göre aşağıdakilere sahibiz:

$$J_{h,n}(x)J_{h,r+1}(x) - J_{h,n+1}(x)J_{h,r}(x) = \left(\frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)\left(\frac{\alpha^{r+1}(x)-\beta^{r+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)$$

$$-\left(\frac{\alpha^{n+1}(x)-\beta^{n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)\left(\frac{\alpha^{r}(x)-\beta^{r}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right)$$

$$= \big(\alpha(x)\beta(x)\big)^r \left(\frac{\alpha^{n-r}(x)-\beta^{n-r}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\right) = (-1)^r h^r(x) J_{h,n-r}(x)\ .$$

Diğer ispatlar (Catarino, 2016) da görülebilir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ *k*-JACOBSTHAL DİZİSİNE GİRİŞ

Bu bölümde, genel dizi Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal Lucas'ın özel durumları ile genelleştirilmiş dizi hakkında temel bilgiler sunulmuştur. Daha sonra genelleştirilmiş bazı özdeşlikler ve özellikleri ile Jacobsthal ve k-Jacobsthal dizisi incelenmiştir.

3.1 Genelleştirmeler

a, b, c ve d reel sayılar olsun. $\xi_0 = 2b$, $\xi_1 = a + b$ başlangıç şartları ile $\{\xi_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\xi_{n+2} = c\xi_{n+1} - d\xi_n, \quad n \geq 0. \tag{3.1}$$

3.1.1 Binet Formülü

Aşağıdaki teoremle ξ_n için Binet formülü verilebilir.

Teorem 3.1

u_1 ve υ_1, $x^2 - cx + d = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, $\xi_n = \frac{Au_1^n - B\upsilon_1^n}{u_1 - \upsilon_1}$ dir. Öyle ki $u_1 = \frac{c+\sqrt{c^2-4d}}{2}$, $\upsilon_1 = \frac{c-\sqrt{c^2-4d}}{2}$ dir. Ayrıca,

$$\begin{cases} u_1 + \upsilon_1 = c \\ u_1\upsilon_1 = d \\ u_1 - \upsilon_1 = \sqrt{c^2 - 2d} \end{cases} \tag{3.2}$$

ve

$$\begin{cases} A = a + b - 2b\beta \\ B = a + b - 2b\alpha \end{cases} \tag{3.3}$$

dir. Aşağıdaki tabloda ξ_n dizisinin özel durumları vardır.

Tablo 3.1 ξ_n genel dizisinin özel durumları

Diziler	c	d	a	b	u_1	v_1
Fibonacci $\{F_n\}$	1	-1	1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Lucas $\{L_n\}$	1	-1	0	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Pell $\{P_n\}$	2	-1	1	0	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$
Pell Lucas $\{PL_n\}$	2	-1	1	1	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$
Jacobsthal $\{J_n\}$	1	-2	1	0	2	-1
Jacobsthal Lucas $\{j_n\}$	1	-2	0	1	2	-1

3.2 Genelleştirilmiş Jacobsthal Dizisi

Aydın (Aydın, 2018) genelleştirilmiş Jacobsthal'ı şu şekilde tanıtmıştır:

Tanım 3.1

a ve b keyfi tam sayılar olmak üzere $\mathbb{k}_0 = a, \mathbb{k}_1 = a + b$ başlangıç şartları ile genelleştirilmiş Jacobsthal $\{\mathbb{k}_n\}$ dizisi şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbb{k}_{n+2} = \mathbb{k}_{n+1} + 2\mathbb{k}_n, \quad n \geq 1. \tag{3.4}$$

Tablo 3.2 Genelleştirilmiş Jacobsthal dizisinin on üyesi

n	$\mathbb{k}_n$
0	a
1	$a+b$
2	$3a+b$
3	$5a+3b$
4	$11a+5b$
5	$21a+11b$
6	$43a+21b$
7	$85a+43b$
8	$171a+85b$
9	$341a+171b$

Ayrıca, $b = 1, a = 0$ için Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarını elde ederiz.. Bu iki Jacobsthal katsayı ile ilgili aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.2 $n \geq 0$ için,

$$\mathbb{k}_n = bJ_n + aJ_{n+1} \tag{3.5}$$

$$\mathbb{k}_{n+1} = (a+b)J_{n+1} + 2aJ_n \tag{3.6}$$

$$\mathbb{k}_{n+2} = (3a+b)J_{n+1} + 2(a+b)J_2. \tag{3.7}$$

İspat: İspat tümevarımla yapılabilir. $\mathbb{k}_2 = \mathbb{k}_1 + 2\mathbb{k}_0 = 3a + b$ dir. O zaman $n = 2$ için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. $\mathbb{k}_2 = bJ_2 + aJ_3$ doğrudur. Eğer $k \geq 2$ ise $\mathbb{k}_k = bJ_k + aJ_{k+1}$ dır. $n = k + 1$ varsayalım, öyle ki

$$\mathbb{k}_{k+1} = \mathbb{k}_k + 2\mathbb{k}_{k-1} = a(J_{k+1} + J_k) + b(J_k + J_{k-1}) ,$$

$$\mathbb{k}_{k+1} = aJ_{k+2} + bJ_{k+1} .$$

Böylece, tümevarıma göre özdeşlik her $n \geq 2$ için sağlanır.

Teorem 3.3

$$\sum_{s=0}^{n} \mathbb{k}_{k+s} = b\mathbb{k}_{k+n} + a\mathbb{k}_{k+n+1} \tag{3.8}$$

İspat.

$$\sum_{s=0}^{n} \mathbb{k}_{k+s} = \sum_{s=0}^{n} (bJ_{k+s} + aJ_{k+s+1})$$

$$= b\sum_{s=0}^{n} J_{k+s} + a\sum_{s=0}^{n} J_{k+s+1} = b\left(J_{k+n-1} + 2J_{k+n-2}\right) + a\left(J_{k+n} + 2J_{k+n-1}\right)$$

$$= b\mathbb{k}_{k+n} + a\mathbb{k}_{k+n+1}$$

3.2.1 Genelleştirilmiş Jacobsthal Dizileri için Binet Formülleri

$x^2 - x - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri u ile v yer değişmelidir. $u = 2$, $\upsilon = -1$ olmalı dir ve $u + \upsilon = 1,\ u - v = 3, u\,\upsilon = -2$ dir.

Teorem 3.4

Genelleştirilmiş dizi için Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$\Bbbk_n = \frac{\tilde{u}u^n - \tilde{v}\upsilon^n}{u - \upsilon}. \tag{3.9}$$

Burada $\tilde{u} = b + au$ ve $\tilde{v} = a(u-1) - b$ dir.

İspat.

(Aydın, 2018) de ispat mevcuttur.

Binet'in genelleştirilmiş Jacobsthal dizisi formülüyle Catalan ve Cassini özdeşliği aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 3.5 (Catalan özdeşliği)

n ve r için $n > 0$ ve $n \geq r$ tamsayıları vardır.

$$\Bbbk_{n+r}\Bbbk_{n-r} - \Bbbk_n^2 = \mu(-1)^{n-r}2^{n-r}J_r^2 \tag{3.10}$$

dir. Burada $\mu = b^2 + ab - 2a^2$ dir.

İspat.

$$\Bbbk_{n+r}\Bbbk_{n-r} - \Bbbk_n^2 = \left(\frac{\tilde{u}u^{n+r} - \tilde{v}\upsilon^{n+r}}{u-\upsilon}\right)\left(\frac{\tilde{u}u^{n-r} - \tilde{v}\upsilon^{n-r}}{u-\upsilon}\right) - \left(\frac{\tilde{u}u^n - \tilde{v}\upsilon^n}{u-\upsilon}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(u-\upsilon)^2}\left[-\tilde{u}\tilde{v}(u\upsilon)^n\left(\frac{\upsilon}{u}\right)^r - \tilde{u}\tilde{v}(u\upsilon)^n\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^r + 2\tilde{u}\tilde{v}(u\upsilon)^n\right]$$

$$= \frac{-\tilde{u}\tilde{v}(u\upsilon)^n}{(u-\upsilon)^2}\left[\left(\frac{\upsilon}{u}\right)^r + \left(\frac{u}{\upsilon}\right)^r - 2\right]$$

$$= \frac{-(\tilde{u}\tilde{v})(u\upsilon)^n}{(u-\upsilon)^2}\left[\frac{u^{2r} - 2u^r\upsilon^r + \upsilon^{2r}}{(u\upsilon)^r}\right]$$

$$= -(\tilde{u}\tilde{v})(u\upsilon)^{n-r}\left(\frac{u^r - \upsilon^r}{u-\upsilon}\right)^2$$

$$= \mu(-1)^{n-r}(2)^{n-r}J_r^2.$$

Genelleştirilmiş Jacobsthal dizisi için Catalan özdeşliğinde $r = 1$ koyarsak, Cassini'nin özdeşliğini aşağıdaki gibi elde ederiz.

Teorem 3.5 (Cassini özdeşliği)

$$\mathbb{k}_{n+1}\mathbb{k}_{n-1} - \mathbb{k}_n^2 = \mu(-1)^{n-1}2^{n-1} \tag{3.11}$$

dir. Burada $\mu = b^2 + ab - 2a^2$ dir.

3.2.2 Genelleştirilmiş Jacobsthal Dizileri Bazı Özellikleri

1. $\mathbb{k}_n^2 + 2\mathbb{k}_{n-1}^2 = (a+2b)\mathbb{k}_{2n-1} - \mu J_{2n-1}$

2. $\mathbb{k}_{n+1}^2 - 4\mathbb{k}_{n-1}^2 = (a+2b)\mathbb{k}_{2n} - \mu J_{2n}$

3. $4\mathbb{k}_n^2 + 2\mu J_{n+1}^2 = 2b\mathbb{k}_{2n+1}$

4. $\mathbb{k}_m\mathbb{k}_{n+1} + 2\mathbb{k}_{m-1}\mathbb{k}_n = (a+2b)\mathbb{k}_{m+n} - \mu J_{m+n}$

5. $\mathbb{k}_m\mathbb{k}_{n-1} - \mathbb{k}_{m-1}\mathbb{k}_n = (-1)^n 2^{n-1}\mu J_{m-n}$

Burada $\mu = b^2 + ab - 2a^2$ dir.

3.3 Genelleştirilmiş k-Jacobsthal Dizisi

Srividhya ve Kavitha (Srividhya ve Kavitha, 2021) genelleştirilmiş k-Jacobsthal dizisini tanımlamıştır. Uygun ve Tümbas (Uygun ve Tümbas, 2017)'de k-Jacobsthal dizisini tanımlamış ve bu dizinin bazı özelliklerini araştırmıştır.

Tanım 3.2

k herhangi bir pozitif gerçek sayı, $h(k)$ ve $g(k)$ skaler değerli polinomlar ve $h^2(k) + 8g(k) > 0$ olsun. Genelleştirilmiş k -Jacobsthal dizisi $\{J_{k,n}\}$ aşağıdaki gibi tanımlanır. $J_{k,0} = a,\ J_{k,1} = b$ başlangıç şartları ile

$$J_{k,n+2} = h(k)J_{k,n+1} + 2g(k)J_{k,n}, \quad n \geq 2\ . \tag{3.12}$$

Eğer $h(k) = g(k) = 1, a = 0$ ve $b = 1$ ise, klasik Jacobsthal dizisi elde edilir.

3.3.1 Genelleştirilmiş k-Jacobsthal Sayıları için Binet Formülleri

ψ ve φ, $x^2 - h(k)x - 2g(k) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olsun. Öyle ki $\psi = \frac{h(k)+\sqrt{h^2(k)+8g(k)}}{2},\ \varphi = \frac{h(k)+\sqrt{h^2(k)+8g(k)}}{2}$ dir .Ayrıca,

$$\begin{cases} \psi + \varphi = h(k) \\ \psi\varphi = -2g(k) \\ \psi - \varphi = \sqrt{h^2(k) + 4g(k)}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Teorem 3.6

Genelleştirilmiş k -Jacobsthal sayıları için Binet formülü

$$J_{k,n} = \frac{A\psi^n - B\varphi^n}{\psi - \varphi} \tag{3.14}$$

dir. Burada $A = d - c\varphi,\ B = d - c\psi$ dir.

İspat.

(Horadam, 1997) de ispat mevcuttur.

Teorem 3.7 (Üreteç fonksiyonları)

Genelleştirilmiş k -Jacobsthal sayılarının üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$G_{J_{k,n}}(t) = \frac{J_{k,0}+t\left(J_{k,1}-h(k)J_{k,0}\right)}{1-h(k)t-2g(k)t^2}. \tag{3.15}$$

İspat.

(Uygun ve Tümbas, 2017) ve (Horadam, 1997) de ispat mevcuttur.

Teorem 3.8 (Catalan Özdeşliği)

$r > 0$ olduğunu varsayalım. O zaman,

$$J_{k,n+r}J_{k,n-r} - J_{k,n}^2 = -AB\left(-2g(k)\right)^{n-r}\left(\frac{\psi^r-\varphi^r}{\psi-\varphi}\right)^2. \tag{3.16}$$

İspat.

(Uygun ve Tümbas, 2017) ve (Horadam, 1997) de ispat mevcuttur.

Teorem 3.9 (Cassini Özdeşliği)

Catalan özdeşliğinde $r = 1$ alırsak,

$$J_{k,n+1}J_{k,n-1} - J_{k,n}^2 = -AB\left(-2g(k)\right)^{n-1}. \tag{3.17}$$

Teorem 3.10 (d'ocagne Özdeşliği)

$m, n > 0$ için,

$$J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n} = \frac{-AB}{\sqrt{h^2(k)+4g(k)}}[(-2g(k))^m(\psi^{n-m} - \varphi^{n-m}] \tag{3.18}$$

dir ve burada $A = d - c\varphi,\ B = d - c\psi$ dir.

İspat.

$J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n}$

$$= (\frac{A\psi^m - B\varphi^m}{\psi - \varphi})(\frac{A\psi^{n+1} - B\varphi^{n+1}}{\psi - \varphi}) - (\frac{A\psi^{m+1} - B\varphi^{m+1}}{\psi - \varphi})(\frac{A\psi^{n+1} - B\varphi^{n+1}}{\psi - \varphi})$$

$$= \frac{1}{(\psi - \varphi)^2}[-AB\psi^{n+1}\varphi^m - AB\psi^m\varphi^{n+1} + AB\psi^n\varphi^{m+1} + AB\psi^{m+1}\varphi^n]$$

$$= \frac{AB}{(\psi - \varphi)^2}[-\psi^{n+1}\varphi^m - \psi^m\varphi^{n+1} + \psi^n\varphi^{m+1} + \psi^{m+1}\varphi^n]$$

$$= \frac{AB}{(\psi - \varphi)^2}[\psi^m\varphi^n(\psi - \varphi) - \psi^n\varphi^m(\psi - \varphi)]$$

$$= \frac{-AB}{\sqrt{h^2(k)+4g(k)}}[(-2g(k))^m(\psi^{n-m} - \varphi^{n-m})]\ .$$

Teorem 3.11

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{J_k}{x^k} = \frac{1}{(\psi-\varphi)x^{n-1}}\left[\frac{A(\psi^n - x^n)(\varphi - x) - B(\varphi^n - x^n)(\psi - x)}{x^2 - 2g(k) - h(k)x}\right]. \tag{3.19}$$

İspat.

(Uygun ve Tümbas, 2017) ve (Horadam, 1997) de ispat mevcuttur.

4. HORADAM OKTONYONLARI

Karataş ve Halici (Karataş ve Halici, 2017) Horadam oktonyonlarını ikinci dereceden yineleme ilişkisinin ikinci dereceden bir genellemesi olan diziye göre tanımlamıştır. Ayrıca Binet formüllerine üreteç fonksiyonu, Cassini özdeşliği ve bazı temel özellikleri vermişlerdir. Hamilton (Hamilton, 1843), kuaterniyonlar cebirinin tanımından sonra 4 boyutlu kuaterniyon cebrini tanımlamıştır. Gravs (Gravs, 1843) ise reel oktonyon cebirini tanımlamıştır. Octonion cebiri sekiz boyutlu, birleşmeli değişmeli olmayan ve normlu bölmeli cebirdir.

$O, \{e_0, e_1, \dots, e_7\}$ tabanlı sekiz boyutlu gerçek cebirden $\mathbb{R}$ üzerindeki oktonyon cebir olsun. Bu taban, birleşmeli ve değişmeli olmayan cebirdir.

Bu bölümde Horadam oktonyonları incelenmiştir. Horadam oktonyonları, Horadam dizisinden katsayıları olan oktonyonlardır. Ayrıca Horadam oktonyonları için Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Cassini özdeşliği, toplam formülü ve norm değeri üzerinde çalışılmıştır.

α herhangi bir oktonyon olsun, öyle ki $\alpha = \sum_0^7 \alpha_s\, e_s$, $\alpha_s \in R$ 'da, burada $s = 0,1,2,\dots,7$ taban elemanlardır. Herhangi bir α oktonyonun eşleniği $\overline{\alpha} = \alpha_0 - \sum_0^7 \alpha_s\, e_s$ olarak yazılabilir. Bir oktonyon α'nın normu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha = \bar{\alpha}\alpha = \alpha\bar{\alpha} = \sum_0^7 \alpha_s^2 \,. \tag{4.1}$$

O bazında çarpma kuralı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.1 $O(1,1,1)$ bazında çarpım tablosu

$\cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

4.1 Horadam Sayıları

Tanım 4.1

Horadam sayıları $H_0 = a,\ H_1 = b$ başlangıç şartları ile şu şekilde tanımlanmıştır:

$$H_{n+2} = pH_{n+1} + qH_n,\quad n \geq 0\ . \tag{4.2}$$

Burada a, b, p ve q tamsayılardır.

4.1.1 Horadam Dizileri için Binet Formülleri

α_4 ve β_4 karakteristik denklemin kökleri olsun. Öyle ki $\alpha_4 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $\beta_4 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ dir.

Teorem 4.1

Horadam dizisinin Binet formülü aşağıdaki gibidir:

$$H_n = \frac{A\alpha_4^n - B\beta_4^n}{\alpha_4 - \beta_4}\ . \tag{4.3}$$

Burada $A = b - a\beta_4$ ve $B = b - a\alpha_4$ dür.

Horadam sayıları için üreteç fonksiyonları bir sonraki teoremde $G_H(t)$ ile gösterilmiştir.

Teorem 4.2

Horadam sayıları için üreteç fonksiyonu $G_H(t)$ aşağıdaki gibidir:

$$G_H(t) = \frac{H_0 + (H_1 - pH_0)t}{1 - pt - qt^2}\ . \tag{4.4}$$

Teorem 4.3 (Cassini özdeşliği)

Herhangi bir n tamsayı için aşağıdakiler sağlanır.

$$H_{n+1}H_{n-1} - H_n^2 = q^{n-1}(pH_0H_1 - H_1^2 - H_0^2q). \tag{4.5}$$

Teorem 4.4

Herhangi bir n tamsayı için aşağıdakiler sağlanır.

$$\sum_{0}^{n} H_s = \frac{H_1 - H_0(p-1) + qH_n - H_{n+1}}{1-p-q}. \tag{4.6}$$

4.2 Horadam Oktonyonları

Tanım 4.2

Horadam oktonyonları şu şekilde gösterilsin.Yani:

$$\hat{H} = \sum_{0}^{7} H_{n+s}e_s . \tag{4.7}$$

Burada H_n Horadam sayılarıdır. Ayrıca Horadam oktonyonu aşağıdaki yineleme bağıntısı ile göre tanımlanmıştır.

$$\widehat{H}_{n+2} = p\widehat{H}_{n+1} + q\widehat{H}_n . \tag{4.8}$$

Burada p ve q tamsayılardır.

4.2.1 Horadam Oktonyonları için Binet Formülleri

Teorem 4.5

Horadam oktonyonları için Binet formülü aşağıdaki gibidir:

$$H_n = \frac{A(\tilde{\alpha}_4)(\alpha_4)^n - B(\tilde{\beta}_4)(\beta_4)^n}{\alpha_4 - \beta_4}\,. \tag{4.9}$$

Burada $\tilde{\alpha}_4 = \sum_0^7 \alpha_4^s\, e_s$ ve $\tilde{\beta}_4 = \sum_0^7 \beta_4^s\, e_s$ dir. Ayrıca α_4, β_4 $x^2 - px - q = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Öyle ki $\alpha_4 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $\beta_4 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ dir.

İspat.

(Karataş ve Halici, 2016) da ispat mevcuttur.

Horadam oktonyonlarının Binet formülünde, $a = 0, b = 1$ alırsak, Fibonacci oktonyonu için Binet formülünü elde ederiz. Bir sonraki teoremde, Horadam oktonyonları $\{G_n(t)\}$ dizisi için üreteç fonksiyonu verilmiştir.

Teorem 4.6

Horadam oktonyonları için üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$G_n(t) = \frac{H_0 + (H_1 - pH_0)t}{1 - pt - qt^2}. \tag{4.10}$$

İspat.

$$G_n(t) = \sum_{s=0}^{\infty} H_s t^s$$

$$G_n(t) = H_0 + H_1 t + H_2 t^2 + H_3 t^3 + \cdots$$

$$ptG_n(t) = pH_0 t + pH_1 t^2 + pH_2 t^3 + pH_3 t^4 + \cdots$$

ve

$$qt^2 G_n(t) = qH_0 t^2 + qH_1 t^3 + qH_4 t^2 + qH_3 t^5 + \cdots$$

$$(1 - pt - qt^2)G_n(t) = H_0 + (H_1 - pH_0)t$$

olduğunu varsayalım. O zaman,

$G_n(t) = \frac{H_0+(H_1-pH_0)t}{1-pt-qt^2}$.

Teorem 4.7 (Cassini özdeşliği)

Catalancanın özdeşliğinde $r = 1$alırsak, Horadam oktonyonları için Cassini özdeşliği aşağıdaki gibidir:

$$H_{n-1}H_{n+1} - H_n^2 = \frac{(-1)^{n-1}AB(q)^{n-1}}{\sqrt{p^2+4q}}\left(\beta_4\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4 - \alpha_4\tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4\right), \tag{4.11}$$

$$H_{n+1}H_{n-1} - H_n^2 = \frac{(-1)^{n-1}AB(q)^{n-1}}{\sqrt{p^2+4q}}\left(\beta_4\tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4 - \alpha_4\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4\right). \tag{4.12}$$

İspat:

$H_{n+1}H_{n-1} - H_n^2$

$$= \left(\frac{A\tilde{\alpha}_4\alpha_4^{n+1} - B\tilde{\beta}_4\beta_4^{n+1}}{\alpha_4 - \beta_4}\right)\left(\frac{A\tilde{\alpha}_4\alpha_4^{n-1} - B\tilde{\beta}_4\beta_4^{n-1}}{\alpha_4 - \beta_4}\right) - \left(\frac{A\tilde{\alpha}_4\alpha_4^{n} - B\tilde{\beta}_4\beta_4^{n}}{\alpha_4 - \beta_4}\right)^2$$

$$= \frac{AB(\alpha_4\beta_4)^n}{(\alpha_4 - \beta_4)^2}\left[-\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4\left(\frac{\alpha_4}{\beta_4}\right) - \tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4\left(\frac{\beta_4}{\alpha_4}\right) + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4 + \tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4\right]$$

$$= \frac{AB(\alpha_4\beta_4)^n}{(\alpha_4 - \beta_4)^2}\left[-\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4\alpha_4^2 - \tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4\beta_4^2 + \tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4(\alpha_4\beta_4) + \tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4(\alpha_4\beta_4)\right]$$

$$= \frac{AB(\alpha_4\beta_4)^2}{(\alpha_4 - \beta_4)^2}\left[-\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4\alpha_4(\alpha_4 - \beta_4) + \tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4\beta_4(\alpha_4 - \beta_4)\right]$$

$$= \frac{AB(\alpha_4\beta_4)^2}{\alpha_4 - \beta_4}\left[\beta_4\tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4 - \alpha_4\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}AB(q)^{n-1}}{\sqrt{p^2+4q}}\left(\beta_4\tilde{\beta}_4\tilde{\alpha}_4 - \alpha_4\tilde{\alpha}_4\tilde{\beta}_4\right).$$

Benzer şekilde ilk denklem de ispatlatlanabilir.

Eğer $a = 0, b = 1, p = 1$ ve $q = 1$ alırsak (Kilic, 2011), (Horadam, 1993), Fibonacci oktonyonları için Cassini özdeşliği elde ederiz. Horadam oktonyonlarının ilk $n + 1$ toplamı aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 4.8

Horadam oktonyonlarının toplam formülü aşağıdaki gibidir.

$$\sum_0^n H_s = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{B\tilde{\beta}\beta^{n+1}}{1-\beta} - \frac{A\tilde{\alpha}\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right) + \frac{A\tilde{\alpha}(1-\beta)-B\tilde{\beta}(1-\alpha)}{(\alpha-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)}. \tag{4.13}$$

İspat.

(Karataş ve Halici, 2016) da ispat mevcuttur.

4.3 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Oktonyonlar

Aydın (Aydın, 2017), Jacobsthal Lucas sayılarıyla bağlantılı Jacobsthal kuaterniyonlarını ve Jacobsthal Lucas kuaterniyonlarını. Ayrıca bu kuaterniyonlar için Binet formül ile Cassini özdeşliklerini vermişler ve fonksiyonları araştırmışlardır. Szynal-Liana ve Wloch (Szynal-Liana ve Wloch, 2016), Jacobsthal kuaterniyonları ve Jacobsthal Lucas kuaterniyonları araştırmış ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini vermiştir.

Çimen ve İpek (Cimen ve İpek, 2017) Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonlarını. Ayrıca Binet formülünü, Cassini özdeşliklerini ve bu oktonyonlar için Catalan özdeşliklerini tanıtmışlardır.

$O, \{1, e_1, e_2, \dots, e_7\}$ tabanlı birleşmeli ve değişmeli olmayan cebir ile sekiz boyutlu reel cebirden $\mathbb{R}$ üzerinde oktonyon cebir olsun. Şimdi, Jacobsthal oktonyon sayıları $\{\breve{J}_n\}$ ve Jacobsthal Lucas oktonyon sayıları $\{\breve{j}_n\}$ sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

Tanım 4.3 Jacobsthal oktonyon sayıları aşağıdaki gibi gösterilsin. Yani:

$$\breve{J}_n = \sum_0^7 J_{n+s} e_s, \quad n \geq 0, \qquad (s = 0,1,\ldots,7). \tag{4.14}$$

Burada J_n Jacobsthal sayılardır.

Tanım 4.4

Jacobsthal Lucas oktonyon sayıları şu şekilde tanımlanır:

$$\breve{j}_n = \sum_0^7 j_{n+s} e_s, \quad n \geq 0, \qquad (s = 0,1,\ldots,7). \tag{4.15}$$

Burada j_n Jacobsthal Lucas sayılardır.

Tarafından verilen $\{\breve{J}_n\}$ ve $\{\breve{\jmath}_n\}$ toplamı :

$$\breve{J}_n + \breve{j}_n = \sum_0^7 (J_s + j_s) e_s \tag{4.16}$$

$\{\breve{J}_n\}$ ve $\{\breve{\jmath}_n\}$ nin eşlenikleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\overline{\breve{J}_n} = J_0 e_0 - J_1 e_1 - J_2 e_2 - \cdots - J_{n+7} e_7 \tag{4.17}$$

ve

$$\overline{\breve{j}_n} = j_0 e_0 - j_1 e_1 - j_2 e_2 - \cdots - j_7 e_7. \tag{4.18}$$

$\{\breve{J}_n\}$ ve $\{\breve{\jmath}_n\}$ nin normları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\|\breve{J}_n\| = \breve{J}_n . \overline{\breve{J}_n} = \breve{J}_n^2 + \breve{J}_{n+1}^2 + \breve{J}_{n+2}^2 + \cdots + \breve{J}_{n+7}^2 \tag{4.19}$$

ve

$$\|\breve{\jmath}_n\| = \breve{\jmath}_n . \overline{\breve{\jmath}_n} = \breve{\jmath}_n^2 + \breve{\jmath}_{n+1}^2 + \breve{\jmath}_{n+2}^2 + \cdots + \breve{\jmath}_{n+7}^2. \tag{4.20}$$

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonları için aşağıdaki gibi bir bağlantı elde edilmiştir.

Teorem 4.9

$n \geq 0$ için $\breve{J}_n$ ve $\breve{j}_n$, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları şu şekilde olur:

$$\breve{J}_{n+2} = \breve{J}_{n+1} + 2\breve{J}_n, \tag{4.21}$$

$$\breve{j}_{n+2} = \breve{j}_{n+1} + 2\breve{j}_n. \tag{4.22}$$

İspat.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonlarının tanımını ve Jacobsthal ve Jacobsthal lucas sayılarının bazı bağıntılarını kullanarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonları için aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$\breve{J}_{n+1} + 2\breve{J}_n = \sum_{s=0}^{7} J_{n+1+s}\, e_s + 2\sum_{s=0}^{7} J_{n+s}\, e_s = \sum_{s=0}^{7} J_{n+2+s}\, e_s = \breve{J}_{n+2}$$

İkinci denklemi kanıtlamak için yukarıdaki ile aynı adımlar gerçekleştirilir.

4.3.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Oktonyonlar için Binet Formülleri

Burada α ve β , $x^2 - x - 2 = 0$'ın karakteristik denkleminin kökleridir. Öyle $\alpha = 2$ ve $\beta = -1$'dır.

Teorem 4.10

Eşitlik (2.1) ve eşitlik (2.2) de verilen Binet formülü ve kullanılan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları aşağıdaki gibidir:

$$\breve{J}_n = \frac{\breve{u}u^n - \breve{v}v^n}{3}, \tag{4.23}$$

$$\check{J}_n = \tilde{u}u^n + \tilde{v}v^n \ . \tag{4.24}$$

Burada $\tilde{u} = \sum_0^7 2^s \, e_s$ ve $\tilde{\upsilon} = \sum_0^7 (-1)^s \, e_s$ dir.

İspat.

(Çimen ve İpek, 2017) de ispat mevcuttur.

Bir sonraki teoremde, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonlarının Binet formülü ile bu oktonyonların Cassini özdeşliği hesaplanmıştır.

Teorem 4.11 (Catalan özdeşliği)

n ve $r \leq n$ negatif olmayan tamsayılar olsun. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonları için Catalan özdeşliklerini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\check{J}_{n+r}\check{J}_{n-r} - \check{J}_n^2 = \frac{(-2)^n}{9}[(\tilde{u}\tilde{v})(1-(-2)^r) + (\tilde{\upsilon}\tilde{u})(1-(-2)^{-r})] \ , \tag{4.25}$$

$$\check{J}_{n+r}\check{J}_{n-r} - \check{J}_n^2 = (-2)^n[(\tilde{u}\tilde{v})((-2)^r - 1) - (\tilde{\upsilon}\tilde{u})((-2)^{-r} - 1)] \ . \tag{4.26}$$

İspat.

(Çimen ve İpek, 2017) de ispat mevcuttur.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonları için Catalan özdeşliklerinde $r = 1$ alırsak, Jacobsthal ve Jacobsthal oktonyonları için Cassini özdeşliklerini elde etmiş oluruz.

Teorem 4.12 (Cassini özdeşliği)

Negatif olmayan n tamsayıları için Cassini özdeşliğini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\check{J}_{n+1}\check{J}_{n-1} - \check{J}_n^2 = \frac{(-2)^n}{3}\left(\tilde{u}\tilde{v} + \frac{1}{2}\tilde{\upsilon}\tilde{u}\right), \tag{4.27}$$

$$\check{J}_{n+1}\check{J}_{n-1} - \check{J}_n^2 = -3(-2)^n\left(\tilde{u}\tilde{v} + \frac{1}{2}\tilde{\upsilon}\tilde{u}\right). \tag{4.28}$$

İspat.

(Çimen ve İpek, 2017) de ispat mevcuttur.

4.3.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Oktonyonlarının Bazı Özellikleri

Teorem 4.13

$n \geq 1$, $r \geq 1$ olsun. O zaman aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

1. $\check{J}_{n+1} + \check{J}_n = 2^n\tilde{u}$
2. $\check{J}_n + \check{\jmath}_n = 2\check{J}$
3. $3\check{J}_n + \check{\jmath}_n = 2^{n+1}\tilde{u}$
4. $\check{\jmath}_{n+1} + \check{\jmath}_n = 3(2)^n\tilde{u}$
5. $\check{\jmath}_{n+1} - \check{\jmath}_n = 2^n\tilde{u} + 2(-1)^{n+1}\tilde{v}$
6. $\check{\jmath}_{n+1} + 2\check{\jmath}_n = 9\check{J}_n$
7. $\check{\jmath}_{n+r} + \check{\jmath}_{n-r} = 2^{n-r}(2^{2r} + 1)\tilde{u} + 2(-1)^{n-r}\tilde{v}$

Burada $u = 2,\ v = -1,\ \tilde{u} = \sum_0^7 2^s\, e_s$ ve $\tilde{\upsilon} = \sum_0^7 (-1)^s\, e_s$.

İspat.

Tanımlar ve Binet formülü ile aşağıdaki özdeşlikleri hesaplayabiliriz.

$$\check{J}_{n+1} + \check{J}_n = \frac{1}{u - v}(\tilde{u}v^{n+1} - \tilde{v}v^{n+1} + \tilde{u}u^n - \tilde{v}v^n)$$

$$= \frac{1}{u-\upsilon}[\tilde{u}u^n(u+1) - \tilde{\upsilon}\upsilon^n(\upsilon+1)] = \tilde{u}u^n = 2^n\tilde{u}$$

$$3\check{J}_n + \check{J}_n = 3\frac{\tilde{u}u^n - \tilde{\upsilon}\upsilon^n}{u-\upsilon} + \tilde{u}u^n + \tilde{\upsilon}\upsilon^n$$

$$= \tilde{u}u^n - \tilde{\upsilon}\upsilon^n + \tilde{u}u^n + \tilde{\upsilon}\upsilon^n = 2\tilde{u}u^n = 2^{n+1}\tilde{u}$$

$$\check{J}_{n+1} + 2\check{J}_n = \sum_{s=0}^{7}(J_{n+1+s} + 2J_{n+s})e_s$$

$J_{n+} + 2J_n = 9J_n$ özdeşliğini tanımlayarak aşağıdakini elde ederiz.

$$9\sum_{s=0}^{7} J_n\, e_s = 9\check{J}_n$$

$$\check{J}_{n+r} + \check{J}_{n-r} = \tilde{u}u^{n+r} + \tilde{v}v^{n+r} + \tilde{u}u^{n-r} + \tilde{v}v^{n-r}$$

$$= \tilde{u}u^{n-r}(u^{2r}+1) + \tilde{\upsilon}\upsilon^{n-r}(\upsilon^{2r}+1)$$

$$= 2^{n-r}(2^{2r})\tilde{u} + 2(-1)^{n-r}\tilde{v}$$

Diğer özdeşlikleri ispatlamak için yukarıdaki ile aynı adımlar kullanılır.

4.4 *k*-Jacobsthal Oktonyonlar ve *k*-Jacobsthal Lucas Oktonyonlar

Yasarsoy vd. (Yasarsoy vd., 2018) ve Ahmet (Çimen ve İpek, 2017) Jacobsthal oktonyonları, Jacobsthal Lucas oktonyonlarını araştırarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas oktonyonları için Binet formüllerini, Cassini özdeşliklerini ve Catalan özdeşliklerini sağlamıştır. Ayrıca bu oktonyonların bazı özelliklerini vermişlerdir.

Bu bölümde, k-Jacobsthal oktonyonları ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonlarının tanımını inceleyeceğiz. Ayrıca k-Jacobsthal oktonyonları ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonları için Binet formülü, Catalan özdeşlikleri ve d'Ocagne özdeşlikleri

incelenmiştir. Diğer yandan bu oktonyonların bazı özellikleri verilmiştir. O üzerinde $\{1, e_1, e_2, \cdots, e_7\}$ tabanlı sekiz boyutlu gerçek cebirden, R üzerindeki oktonyon cebir bu taban, birleşmeli ve değişmeli olmayan cebirdir. k -Jacobsthal oktonyon sayılarını $\{J_{k,n}\}$ ve k-Jacobsthal Lucas oktonyon sayılarını $\{j_{k,n}\}$ olarak tanımlarız.

Tanım 4.5

k-Jacobsthal oktonyonları şu şekilde tanımlanır:

$$\breve{J}_{k,n} = \sum_{0}^{7} J_{k,n+s} e_s, \quad n \geq 0 \tag{4.29}$$

Burada $J_{k,n}$, k-Jacobsthal sayılarıdır.

Tanım 4.6

k-Jacobsthal Lucas oktonyonları şu şekilde tanımlanır:

$$\breve{j}_{k,n} = \sum_{0}^{7} j_{k,n+s} e_s, \quad n \geq 0 \tag{4.30}$$

Burada $j_{k,n}$, k-Jacobsthal Lucas sayılarıdır.

Teorem 4.14

$n \geq 0$ için k-Jacobsthal oktonyonları ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonları aşağıdaki gibidir.

$$\check{J}_{k,n+2} = k\check{J}_{k,n+1} + 2\check{J}_{k,n}, \tag{4.31}$$

$$\check{\jmath}_{k,n+2} = k\check{\jmath}_{k,n+1} + 2\check{\jmath}_{k,n}. \tag{4.32}$$

4.4.1 k-Jacobsthal Oktonyonları ve k-Jacobsthal Lucas Oktonyonları için Binet Formülü

k -Jacobsthal oktonyonları ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonları için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 4.15

k-Jacobsthal oktonyonları ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonları için Binet formülü aşağıdaki eşitliği verier.

$$\check{J}_{k,n} = \frac{\tilde{\alpha}\alpha^n - \tilde{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{4.33}$$

$$\check{j}_{k,n} = \tilde{\alpha}\alpha^n - \tilde{\beta}\beta^n. \tag{4.34}$$

Burada $\tilde{\alpha} = \sum_{s=0}^{7} \alpha^s \, e_s$ ve $\tilde{\beta} = \sum_{s=0}^{7} \beta^s \, e_s$ dir. α ve β, k -Jacobsthal oktonyonlarının ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonlarının $x^2 - kx - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir.

İspat.

k-Jacobsthal sayıları için Binet formülü tarafından aşağıdaki elde edilir.

$$\check{J}_{k,n} = \sum_{s=0}^{7} J_{k,n+s} \, e_s = \sum_{s=0}^{7} \left(\frac{\alpha^{n+s} - \beta^{n+s}}{\alpha - \beta} \right) e_s$$

$$= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)e_1 + \cdots + \left(\frac{\alpha^{n+7} - \beta^{n+7}}{\alpha - \beta}\right)e_7$$

$$= \frac{\alpha^n(1 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \cdots + \alpha^7 e_7) - \beta^n(1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \cdots + \beta^7 e_7)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^n \tilde{\alpha} - \beta^n \tilde{\beta}}{\alpha - \beta}$$

k -Jacobsthal Lucas oktonyonun Binet formülünün ispatı (Yasarsoy vd., 2018) de mevcuttur.

Aşağıdaki teoremlerde, k -Jacobsthal oktonyonları ve k -Jacobsthal Lucas oktonyonlarının Binet formülüyle Catalan özdeşliği ve d'ocagn özdeşliği hesaplanmıştır.

Teorem 4.16 (Catalan özdeşliği)

$n \geq 1$ için, $r \geq 0$ ve k pozitif bir tam sayi olsun.

$$\check{J}_{k,n-r}\check{J}_{k,n+r} - \check{J}_{k,n}^2 = -(\tilde{\alpha}\beta)(-2)^{n-r}\check{J}_{k,n}^2 , \tag{4.35}$$

$$\check{J}_{k,n-r}\check{J}_{k,n+r} - \check{J}_{k,n}^2 = -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(-2)^{n-r}\left(\check{J}_{k,n}^2 - 4(-2)^r\right). \tag{4.36}$$

İspat.

k -Jacobsthal Lucas oktonyonlarının Binet formülünden,

$$\check{J}_{k,n-r}\check{J}_{k,n+r} - \check{J}_{k,n}^2 = \left(\tilde{\alpha}\alpha^{n-r} - \tilde{\beta}\beta^{n-r}\right)\left(\tilde{\alpha}\alpha^{n+r} - \tilde{\beta}\beta^{n+r}\right) - \left(\tilde{\alpha}\alpha^n - \tilde{\beta}\beta^n\right)^2$$

$$= -\tilde{\alpha}\tilde{\beta}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}(\alpha\beta)^n - \check{\alpha}\tilde{\beta}(\alpha\beta)^n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r + \tilde{\alpha}\check{\beta}(\alpha\beta)^n$$

$$= -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(\alpha\beta)^n\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - 2\right]$$

$$= -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(\alpha\beta)^{n-r}[\alpha^{2r} + \beta^{2r} + 2(\alpha\beta)^r - 4(\alpha\beta)^r]$$

$$= -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(-2)^{n-r}\left(\hat{J}_{k,r}^2 - 4(-2)^r\right)$$

İlk denklemin ispatı (Yasarsoy vd., 2018) de mevcuttur.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonlarının Catalan özdeşliğine $r = 1$ koyarsak, bu oktonyonlar için Cassini'nin özdeşliğini elde ederiz.

Teorem 4.17 (Cassini özdeşliği)

n ve r tam sayıları için aşağıdakilere sahibiz.

$$\check{J}_{k,n-1}\check{J}_{k,n+1} - \check{J}_{k,n}^2 = -(-2)^{n-1}\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right), \tag{4.37}$$

$$\check{\jmath}_{k,n-1}\check{\jmath}_{k,n+1} - \check{\jmath}_{k,n}^2 = -\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right)(-2)^{n-1}(k^2 - 8). \tag{4.38}$$

Teorem 4.18 (d'Ocagne özdeşliği)

$m > n$ ise,

$$\check{J}_{k,m}\check{J}_{k,n+1} - \check{J}_{k,m+1}\check{J}_{k,n} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}(-2)^n\check{J}_{k,m-n}, \tag{4.39}$$

$$\check{\jmath}_{k,m}\check{\jmath}_{k,n+1} - \check{\jmath}_{k,m+1}\check{\jmath}_{k,n} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\sqrt{k^2+8}\left(\check{\jmath}_{k,m-n} - k - \sqrt{k^2+8}\right)^{m-n}. \tag{4.40}$$

İspat.

(Yasarsoy vd., 2018) de mevcuttur.

4.4.2 *k*-Jacobsthal ve *k*-Jacobsthal Lucas Oktonyonların Bazı Özellikleri

Teorem 4.19

$n \geq 1$ olsun. O zaman

1. $\check{J}_{k,n+1} + 2\check{J}_{k,n-1} = \check{\jmath}_{k,n}$ (4.41)

2. $k\check{J}_{k,n} + 4\check{J}_{k,n-1} = \check{\jmath}_{k,n}$ (4.42)

3. $k\check{J}_{k,n} + \check{\jmath}_{k,n} = 2\check{J}_{k,n+1}$ (4.43)

k-Jacobsthal ve $k-$ Jacobsthal Lucas oktonyonların tanımına göre,

$$\check{J}_{k,n+1} + 2\check{J}_{k,n-1} = \sum_{s=0}^{7} J_{n+1+s}\, e_s + 2\sum_{s=0}^{7} J_{k,n-1+s}\, e_s$$

$$= \sum_{s=0}^{7} \left(J_{k,n+1+s} + 2J_{k,n-1+s}\right) e_s \; = \sum_{s=0}^{7} j_{k,n}\, e_s = \check{j}_{k,n}$$

Diğer ispatlar (Yasarsoy vd., 2018) de mevcuttur.

4.5 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonları

$a, b \epsilon R$ ve genelleştirilmiş kuaterniyon cebiri 4 boyutlu $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ tabanlı $H(a,b)$ olsun. $H(a,b)$ nin tabanının çarpım tablosu şu şekilde verilebilir:

Tablo 4.2 $H(a,b)$ nin tabanının çarpım tablosu

$\cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-a$	e_3	$-ae_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$-b$	be_1
e_3	ae_3	e_2	$-be_1$	$-ab$

$a = b = 1$ ise, $H(1,1)$ kuaterniyon bölünmedir. $a = 1,\ b = -1$ ise, $H(1,-1)$ split kuaterniyonların cebiridir veya eş kuaterniyonlardır (hiperbolik). Oktonyonlar, reel sayılar üzerinde en büyük normlu bölme cebrini oluşturur ve O harfi ile gösterilir. $O(a,b,c)$, değişmeli ve birleşmeli olmayan $\{1, e_1, e_2, \cdots, e_7\}$ tabanı ile R üzerindeki genelleştirilmiş oktonyon cebir olsun. Şimdi cebirin temel tanımını veriyoruz. $\alpha \epsilon O(a,b,c)$ olsun, öyle ki

$$\alpha = \sum_{s=0}^{7} a_s e_s, \quad a_j \left(j = 0,1,2,...,7\right) \tag{4.44}$$

dir. O bazında çarpma kuralı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.3 $O(a,b,c)$ bazında çarpım tablosu

$\cdot$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-a$	e_3	$-ae_2$	e_5	$-ae_4$	$-e_7$	ae_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-b$	be_1	e_6	e_7	$-be_4$	$-be_5$
e_3	e_3	ae_2	$-be_1$	$-ab$	e_7	$-ae_6$	be_5	$-abe_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-c$	ce_1	ce_2	ce_3
e_5	e_5	ae_4	$-e_7$	ae_6	$-ce_1$	$-ac$	$-ce_3$	ace_2
e_6	e_6	e_7	be_4	$-be_5$	$-ce_2$	ce_3	$-bc$	$-bce_1$
e_7	e_7	$-ae_6$	be_5	abe_4	$-ce_3$	$-ace_2$	bce_1	$-abc$

Bu bölümde Horadam (Horadam, 1993), Keçilioğlu ve Akkus (Keçilioğlu ve Akkus , 2015) ve Çimen ve İpek (Çimen ve İpek, 2017) Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları, $O(a,b,c)$ oktonyon cebiri üzerinde tanımlamışlardır. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas'ın genelleştirilmiş oktonyonlarının Binet formülünü araştırmış ve Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve bu oktonyonların d'Ocagne özdeşliğini hesaplamışlardır.

Tanım 4.7

Jacobsthal genelleştirilmiş oktonyonları $\{\hat{J}_n\}$ aşağıdaki gibidir.

$$\hat{J}_n = \sum_{s=0}^{7} J_{n+s} e_s. \tag{4.45}$$

Tanım 4.8

Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları $\{\hat{j}_n\}$ aşağıdaki gibidir.

$$\hat{j}_n = \sum_{0}^{7} j_{n+s} e_s. \tag{4.46}$$

4.5.1 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonları için Binet Formülleri

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Binet formülü aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 4.20

Herhangi bir n tamsayısı için nth Jacobsthal ve nth Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları sırasıyla aşağıdaki bağıntılarla verilmiştir.

$$\hat{J}_n = \frac{\tilde{u}u^n - \tilde{\upsilon}\upsilon^n}{u-\upsilon}, \tag{4.47}$$

$$\hat{j}_n = \tilde{u}u^n + \tilde{\upsilon}\upsilon^n. \tag{4.48}$$

Burada $u\ ve\ \upsilon$, $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Öyle ki $u = 2$, $\upsilon = -1$, $\tilde{u} = \sum_{s=0}^{7} u^s\, e_s$ve $\tilde{\upsilon} = \sum_{s=0}^{7} \upsilon^s\, e_s$ dir.

İspat.

İlk denklem

$$u\hat{J}_n + \hat{J}_{n-1} = \sum_{s=0}^{7} (uJ_{n+s} + J_{n+s-1})e_s$$

olduğunu varsayalım. Aşağıdaki özdeşliklere ihtiyaç duyarız.

$$uJ_n + J_{n-1} = u^n,$$

$$\upsilon J_n + J_{n-1} = \upsilon^n.$$

Buna göre,

$$u\hat{J}_n + \hat{J}_{n-1} = \tilde{u}u^n,$$

$$\upsilon\hat{J}_n + \hat{J}_{n-1} = \tilde{\upsilon}\upsilon^n$$

elde ederiz. Buradan,

$$\hat{J}_n = \frac{\tilde{u}u^n - \tilde{\upsilon}\upsilon^n}{u-\upsilon}$$

elde ederiz. Benzer şekilde ikinci denklemde bulunur.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Binet formüller ve $O(a,b,c)$ bazındaki çarpım tablosu ile $\tilde{u}^2, \tilde{v}^2, \tilde{u}\tilde{v}$ ve $\tilde{\upsilon}\tilde{u}$ aşağıdaki teoremde olduğu gibi hesaplanır.

Teorem 4.21

$$\tilde{u}^2 = \xi_1 + \hat{J}_0 + 3\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right), \tag{4.49}$$

$$\tilde{v}^2 = \xi_1 + \hat{J}_0 - 3\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right), \tag{4.50}$$

$$\tilde{u}\tilde{v} = \mu_1 + \hat{J}_0 + 6\mu_2, \tag{4.51}$$

$$\tilde{\upsilon}\tilde{u} = \mu_1 + \hat{J}_0 - 6\mu_2. \tag{4.52}$$

Burada,

$$\xi_1 = -1 - \frac{5}{2}a - \frac{17}{2}b - \frac{65}{2}ab - \frac{257}{2}c - \frac{1025}{2}ac - \frac{4097}{2}bc - \frac{16385}{2}abc,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}a - \frac{5}{2}b - \frac{21}{2}ab - \frac{85}{2}c - \frac{341}{2}ac - \frac{1365}{2}bc - \frac{5461}{2}abc,$$

$$\mu_1 = 128abc + 8ab + 32ac - 64bc + 2a - 4b - 16c - 1$$

$$\mu_2 = 2(16bc - b - 4c)e_1 + (16ac - a - 8c)e_2 + 40ce_3 + 5(-4ab - a + 2b)e_4 + 34be_5 + 17ae_6.$$

İspat.

(Tokeşer vd., 2020) de ispat mevcuttur.

Teorem 4.22 (Catalan özdeşliği)

Herhangi bir n, r tamsayıları için Jacobsthal ve Jacobsthal lucas genelleştirilmiş oktonyonlarını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\hat{J}_{n+r}\hat{J}_{n-r} - \hat{J}_n^2 = -(-2)^{n-r}\left[\frac{1}{9}(\mu_1 + \hat{j}_0)(j_{2r} - (-2)^{r+1}) + 2\mu_2 J_{2r}\right], \quad (4.53)$$

$$\hat{j}_{n+r}\hat{j}_{n-r} - \hat{j}_n^2 = -(-2)^{n-r}[(\mu_1 + \hat{j}_0)(j_{2r} - (-2)^{r+1}) + 18\mu_2 J_{2r}]. \quad (4.54)$$

İspat:

$$\hat{J}_{n+r}\hat{J}_{n-r} - \hat{J}_n^2 = [(\tilde{u}u^{n+r} + \tilde{v}v^{n+r})(\tilde{u}u^{n-r} + \tilde{v}v^{n-r}) - (\tilde{u}u^n + \tilde{v}v^n)^2]$$

$$= -\tilde{u}\tilde{v}u^{n+r}\upsilon^{n-r} - \tilde{\upsilon}\tilde{u}u^{n-r}\upsilon^{n+r} + \tilde{u}\tilde{v}u^n\upsilon^n + \tilde{\upsilon}\tilde{u}u^n\upsilon^n$$

$$= -u^{n-r}\upsilon^{n-r}(\tilde{u}\tilde{v}u^{2r} + \tilde{\upsilon}\tilde{u}\upsilon^{2r}) + (u\upsilon)^n(\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\upsilon}\tilde{u})$$

$$= -(-2)^{n-r}[(\mu_1 + \hat{j}_0)(u^{2r} + \upsilon^{2r}) + 6\mu_2(u^{2r} - \upsilon^{2r})] + 2(-2)^n(\mu_1 + \hat{j}_0)$$

$$= -(-2)^{n-r}[(\mu_1 + \hat{j}_0)j_{2r} + 18\mu_2 J_{2r} + 2(-2)^n(\mu_1 + \hat{j}_0)]$$

$$= (-2)^{n-r}[(\mu_1 + \hat{j}_0)(j_{2r} - (-2)^{r+1}) + 18\mu_2 J_{2r}] .$$

İspat.

(Tokeşer vd., 2020) de ispat mevcuttur.

Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Catalan özdeşliğine $r = 1$ alırsak, aşağıdaki teoremde verilen Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlar için Cassini özdeşliği elde edilmiş olur.

Teorem 4.23 (Cassini özdeşliği)

Herhangi bir n tamsayı için aşağıdakiler sağlanır.

$$\hat{J}_{n+1}\hat{J}_{n-1} - \hat{J}_n^2 = -(-2)^{n-1}\left[\frac{-3}{9}(\mu_1 + \hat{j}_0) + 2\mu_2\right], \tag{4.55}$$

$$\hat{j}_{n+1}\hat{j}_{n-1} - \hat{J}_n^2 = (-1)^{n-1}[-3(\mu_1 + \hat{j}_0) + 18\mu_2]. \tag{4.56}$$

Teorem 4.23 (d'Ocagne özdeşliği)

Herhangi bir n ve m tamsayıları için aşağıdakiler sağlanır.

$$\hat{J}_m\hat{J}_{n+1} - \hat{J}_{m+1}\hat{J}_n = (-2)^n[(\mu_1 + \hat{j}_0)j_{m-n} + 2\mu_2 J_{m-n}], \tag{4.57}$$

$$\hat{j}_m\hat{j}_{n+1} - \hat{j}_{m+1}\hat{j}_n = (-2)^{n+1}[3(\mu_1 + \hat{j}_0)j_{m-n} + 18\mu_2 J_{m-n}]. \tag{4.58}$$

İspat:

$\hat{J}_m\hat{J}_{n+1} - \hat{J}_{m+1}\hat{J}_n$

$= (\tilde{u}u^m - \tilde{v}v^m)(\tilde{u}u^{n+1} - \tilde{v}v^{n+1}) - (\tilde{u}u^{m+1} - \tilde{v}v^{m+1})(\tilde{u}u^n - \tilde{v}v^n)$

$= -\tilde{u}\tilde{v}u^n\upsilon^m(u-\upsilon) - \tilde{\upsilon}\tilde{u}u^m\upsilon^n(u-\upsilon)$

$= -\left(\mu_1 + \hat{J}_0 + 6\mu_2\right)u^n\upsilon^m(u-\upsilon) - (\mu_1 + \hat{j}_0 - 6\mu_2)u^m\upsilon^n(u-\upsilon)$

$= -3(-2)^n[(\mu_1 + \hat{j}_0)(u^{m-n} + \upsilon^{m-n}) - 6\mu_2(u^{m-n} - \upsilon^{m-n})]$

$= -(-2)^n\left[3(\mu_1 + \hat{j}_0)j_{m-n} - 18\mu_{2J_{m-n}}\right]$

İlk denklemin ispatı (Tokeşer vd., 2020) de mevcuttur.

4.5.2 Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonları için Bazı Özellikler

1. $\hat{J}_n^2 + \hat{j}_n^2 = \frac{10}{9}(\xi_1 + \hat{j}_0)j_{2n} + 10\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right)J_{2n} - \frac{8}{9}(-2)^{n+1}(\mu_1 + \hat{j}_0)$

2. $\hat{J}_n^2 - \hat{j}_n^2 = -\frac{8}{9}(\xi_1 + \hat{j}_0)j_{2n} - 8\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right)J_{2n} - \frac{10}{9}(-2)^{n+1}(\mu_1 + \hat{j}_0)$

3. $\hat{J}_{n+r}\hat{J}_{n+s} - \hat{J}_{n+s}\hat{J}_{n+r} = 2(-1)^{n+r+1}(\mu_1 + \hat{\jmath}_0)J_{s-r}$

4. $\hat{\jmath}_{m+n} - (-2)^n\hat{\jmath}_{m-n} = J_n\hat{\jmath}_m$

5. $\hat{\jmath}_m\hat{J}_n - \hat{\jmath}_n\hat{J}_m = -(-2)^{m+1}(\mu_1 + \hat{\jmath}_0)J_{n-m}$

6. $\hat{\jmath}_m\hat{J}_n - \hat{J}_m\hat{\jmath}_n = -(-2)^{m+1}[(\mu_1 + \hat{\jmath}_0)J_{n-m} + 2\mu_2 j_{n-m}]$

7. $\hat{J}_n\hat{J}_m - \hat{J}_m\hat{J}_n = 4(-1)^{m+n}\mu_2 J_{n-m}$

8. $\hat{\jmath}_n\hat{\jmath}_m - \hat{\jmath}_m\hat{\jmath}_n = 36(-2)^n\mu_2 J_{m-n}$

İspat.

$$\hat{J}_n^2 + \hat{\jmath}_n^2 = \left(\frac{\tilde{u}u^n - \tilde{v}v^n}{u - v}\right)^2 + (\tilde{u}u^n + \tilde{v}v^n)^2$$

$$= \frac{1}{9}[\tilde{u}^2u^{2n} + \tilde{v}^2\upsilon^{2n} - (-2)^n\tilde{u}\tilde{v} - (-2)^n\tilde{\upsilon}\tilde{u}] + \tilde{u}^2u^{2n} + \tilde{v}^2\upsilon^{2n} + (-2)^n\tilde{u}\tilde{v} + (-2)^n\tilde{\upsilon}\tilde{u}$$

$$= \frac{10}{9}(\tilde{u}^2u^{2n} + \tilde{v}^2\upsilon^{2n}) + \frac{8(-2)^n}{9}(\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{\upsilon}\tilde{u})$$

$$= \frac{10}{9}\left[\left(\xi_1 + \hat{\jmath}_0 + 3\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right)\right)u^{2n} + \left(\xi_1 + \hat{\jmath}_0 - 3\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right)\right)\upsilon^{2n}\right] - \frac{8(-2)^{n+1}}{9}[\mu_1 + \hat{\jmath}_0]$$

$$= \frac{10}{9}\left[(\xi_1 + \hat{\jmath}_0)(u^{2n} + \upsilon^{2n}) + 3\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right)(u^{2n} - \upsilon^{2n})\right] - \frac{8(-2)^{n+1}}{9}(\mu_1 + \hat{\jmath}_0)$$

$$= \frac{10}{9}(\xi_1 + \hat{\jmath}_0)j_{2n} + 10\left(\xi_2 + \hat{J}_0\right)J_{2n} - \frac{8}{9}(-2)^{n+1}(\mu_1 + \hat{\jmath}_0).$$

$\hat{\jmath}_m\hat{J}_n - \hat{\jmath}_n\hat{J}_m$

$$= \left(\tilde{\alpha}\alpha^m + \tilde{\beta}\beta^m\right)\left(\frac{\tilde{u}u^n - \tilde{\upsilon}\upsilon^n}{u-\upsilon}\right) - \left(\tilde{u}u^n + \tilde{\upsilon}\upsilon^n\right)\left(\frac{\tilde{u}u^m - \tilde{\upsilon}\upsilon^m}{u-\upsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{u-v}\left[u^n\upsilon^m(\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{v}\tilde{u}) - u^m\upsilon^n(\tilde{u}\tilde{v} + \tilde{v}\tilde{u})\right]$$

$$= \frac{1}{u-\upsilon}\left[2u^n\upsilon^m(\mu_1 + \hat{J_0}) - 2u^m\upsilon^n(\mu_1 + \hat{J}_0)\right]$$

$$= 2(\mu_1 + \hat{J}_0)(u\upsilon)^m\left[\frac{u^{n-m} - \upsilon^{n-m}}{u-\upsilon}\right]$$

$$= -(-2)^{m+1}(\mu_1 + \hat{J}_0)J_{n-m}.$$

$\hat{J}_n\hat{J}_m - \hat{J}_m\hat{J}_n$

$$= (\tilde{u}u^n + \tilde{\upsilon}\upsilon^n)(\tilde{u}u^m + \tilde{\upsilon}\upsilon^m) - (\tilde{u}u^m + \tilde{\upsilon}\upsilon^m)(\tilde{u}u^n + \tilde{\upsilon}\upsilon^n)$$

$$= u^n\upsilon^m(\tilde{\upsilon}\tilde{u} - \tilde{u}\tilde{v}) + u^m\upsilon^n(\tilde{u}\tilde{v} - \tilde{\upsilon}\tilde{u})$$

$$= u^n\upsilon^m(-12\mu_2) + u^m\upsilon^n(12\mu_2)$$

$$= 12\mu_2(u^m\upsilon^n - u^n\upsilon^m)$$

$$= 12\mu_2(u\upsilon)^n(u^{m-n} - \upsilon^{m-n})$$

$$= 36(-2)^n\mu_2 J_{m-n}.$$

Diğer ispatlar (Tokeşer vd., 2020) de mevcuttur.

5. k-JACOBSTHAL VE k -JACOBSTHAL LUCAS GENELLEŞTİRİLMİŞ OKTONYONLAR

Bu bölümde hem k-Jacobsthal oktonyon sayılarını hem de Horadam Jacobsthal oktonyon polinomlarını genelleştirmek için $h(x)$-Jacobsthal oktonyon polinomları tanımlanmıştır. Ayrıca $h(x)$ -Jacobsthal oktonyon polinomlarının genelleştirilen fonksiyonu ve bu oktonyon polinomları için Binet formülü tanımlanmış ve daha detaylı açıklanmıştır. Ayrıca $h(x)$ -Jacobsthal oktonyon polinomları dizisinin genelleştirilmiş fonksiyonu bulunmuştur. Ayrıca bu bölüm, bu tür matematiksel alan ve formüllerle ilgilenen araştırmacılar için faydalı olabileceği gibi öğrenciler ve öğrenenler için de faydalı olabilir. Ayrıca a, b ve c 'nin reel sayılar olduğu Q_R cebiri üzerinde k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas oktonyonları üzerinde çalışılmıştır. Daha sonra da k -Jacobsthal $\{\hat{J}_{k,n}\}$ ve k -Jacobsthal Lucas $\{\hat{j}_{k,n}\}$ için Binet formüllerini elde ettiğimiz genelleştirilmiş oktonyonlar elde edilmiştir. Son olarak, bu oktonyonlar için k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlarının bazı özellikleriyle Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve d'Ocagne özdeşliği tanıtılmıştır.

5.1 $h(x)$-Jacobsthal Oktonyon Polinomları

Bu bölümde $h(x)$-Jacobsthal oktonion polinomlarını tanımladık. Hem k-Jacobsthal oktonyon sayılarını $\hat{J}_{k,n}$ hem de Horadam'ın Jacobsthal oktonyon polinomlarını genelleştirilmiştir. Ayrıca $h(x)$-Jacobsthal oktonyon polinom dizisinin genelleştirilen fonksiyonları, $h(x)$-Jacobsthal oktonyon polinomları $Q_{h,n}(x)$ için Binet formülü ve $h(x)$ -Jacobsthal oktonyon polinomlarının $G_{\hat{J}}(x)$ genelleştirilen fonksiyonları incelenmiştir.

$h(x)$ reel katsayılı bir polinom olsun. $e_s(s = 0,1,2,3,4,5,6,7)$, O'ın değişmeli ve birleşmeli olmayan bir tabanı olsun.

Tanım 5.1

$h(x)$-Jacobsthal oktonyon polinomları $\hat{J}_{h,n}(x)$ şu şekilde verilir:

$$\hat{J}_{h,n}(x) = \sum_{s=0}^{7} J_{h,n+s}(x) e_s \tag{5.1}$$

$J_{h,n}(x)$, n inci $h(x)$-Jacobsthal polinomudur.

Tanıma göre özel durumlar:

1. $h(x) = k$ için k-Jacobsthal sayılarına sahibiz $J_{k,n}$ ve $h(x) = k$ için k-Jacobsthal oktonyon sayıları $J_{k,n}$ elde edilir.

2. $h(x) = 2x$ için $h(x)$- Jacobsthal oktonyon polinomlarından $\hat{J}_{h,n}(x)$, Horadam Jacobsthal oktonyon polinomları $H_n(x)$ elde edilir.

$\hat{J}_{h,n}(x)$ dizisinin üreteç fonksiyonu $G_{\hat{J}}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$G_{\hat{J}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{J}_{h,n}(x) t^n \tag{5.2}$$

Kuvvet serisi ancak ve ancak $| t | < min\left(\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\beta|}\right)$ ise yakınsar.

Teorem 5.1

$\hat{J}_{h,n}(x)$ için genelleştirilen fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{\hat{J}_{h,0} + (\hat{J}_{h,1} - \hat{J}_{h,0})t}{1 - t - h(x)t^2}, \tag{5.3}$$

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{1}{1 - t - h(x)t^2} \sum_{s=0}^{7} \left(J_{h,s}(x) + h(x) J_{h,s-1}(x) t \right) e_s \tag{5.4}$$

İspat.

$h(x)$-Jacobsthal oktonyon polinomlarının $G_{\hat{J}}(t)$ üreteç fonksiyonundan,

$$G_{\hat{J}}(t) = \hat{J}_{h,0} + \hat{J}_{h,1}t + \hat{J}_{h,2}t^2 + \hat{J}_{h,3}t^3 + \cdots$$

dir. Denklemin her iki tarafını t ve $h(x)t^2$ ile çarparak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$G_{\hat{J}}(t)t = \hat{J}_{h,0}t + \hat{J}_{h,1}t^2 + \hat{J}_{h,2}t^3 + \hat{J}_{h,3}t^4 + \cdots,$$

$$h(x)G_{\hat{J}}(t)t^2 = h(x)\hat{J}_{h,0}t^2 + h(x)\hat{J}_{h,1}t^3 + h(x)t\hat{J}_{h,2}{}^4 + h(x)\hat{J}_{h,3}t^5 + \cdots$$

Yukarıdaki denklemlerden,

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{\hat{J}_{h,0} + (\hat{J}_{h,1} - \hat{J}_{h,0})t}{1 - t - h(x)t^2}.$$

Eşitlik (5.2) den aşağıdakiler elde edilir.

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{\sum_{s=0}^{7} J_{h,s}(x)e_s + t\sum_{s=0}^{7} h(x)J_{h,s-1}(s)e_s}{1 - t - h(x)t^2}$$

$$G_{\hat{J}}(\mathrm{t}) = \frac{1}{1 - t - h(x)t^2}\sum_{s=0}^{7}(J_{h,s}(x) + h(x)J_{h,s-1}(x)t)e_s$$

$\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, $m^2 - m - h(x) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olsun. Öyle ki,

$$\alpha(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4h(x)}}{2},\ \beta(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4h(x)}}{2}$$

dir. Ek olarak, aşağıdaki temel özdeşliklere sahibiz.

$$\begin{cases} \alpha(x) + \beta(x) = 1, \\ \alpha(x) - \beta(x) = \sqrt{1 + 4h(x)}, \\ \alpha(x)\beta(x) = -h(x). \end{cases}$$

Sonuç olarak, aşağıdaki teorem Binet formülünü bulmak için yararlıdır.

Teorem 5.2

$h(x)$ -Jacobsthal oktonyon polinomlarının $G_{\hat{J}}(t)$ üreteç fonksiyonu için $\hat{J}_{h,n}(x)$ aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\frac{\hat{J}_{h,1}-\beta(x)\hat{J}_{h,0}}{1-\alpha(x)t} - \frac{\hat{J}_{h,1}-\alpha(x)\hat{J}_{h,0}}{1-\beta(x)t}\right]. \tag{5.5}$$

İspat.

Eşitlik (5.3) den,

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{\hat{J}_{h,0}+(\hat{J}_{h,1}-\hat{J}_{h,0})t}{1-t-h(x)t^2} = \frac{\widehat{J_{h,0}}+(\hat{J}_{h,1}-(\alpha(x)+\beta(x))\hat{J}_{h,0})t}{(1-\alpha(x)t)(1-\beta(x)t)}.$$

Denklemi $\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}$ ile çarparsak aşağıdakini elde ederiz.

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{(\alpha(x)-\beta(x))\hat{J}_{h,0}+(\alpha(x)-\beta(x))\hat{J}_{h,1}t-(\alpha(x)-\beta(x))(\alpha(x)+\beta(x))\hat{J}_{h,0}t}{(1-\alpha(x)t)(1-\beta(x)t)(\alpha(x)-\beta(x))},$$

$$= \frac{(1-\beta(x)t)(\hat{J}_{h,1}-\beta(x)\hat{J}_{h,0})-(1-\alpha(x)t)(\hat{J}_{h,1}(x)-\alpha(x)\hat{J}_{h,0})}{(1-\alpha(x)t)(1-\beta(x)t)(\alpha(x)-\beta(x))},$$

$$= \frac{1}{\alpha(x)-\beta(x)}\left[\frac{\hat{J}_{h,1}-\beta(x)\hat{J}_{h,0}}{1-\alpha(x)t} - \frac{\hat{J}_{h,1}-\alpha(x)\hat{J}_{h,0}}{1-\beta(x)t}\right].$$

Lemma 5.1

$J_{h,n}(x)$, $h(x)$-Jacobsthal polinomu olsun (Öztürk ve Porsuk, 2018).

$$J_{h,n+1}(x) - \beta(x)J_{h,n}(x) = \alpha^n(x),$$

$$J_{h,n+1}(x) - \alpha(x)J_{h,n} = \beta^n(x).$$

İspat.

Tümevarım ile ispat yapılır.

5.1.1 $h(x)$-Jacobsthal Oktonyon Polinomlarının Binet Formülü

Teorem 5.3

$n \geq 0$ için, $h(x)$ -Jacobsthal oktonyon polinomlarının Binet formülü $\hat{J}_{h,n}(x)$ aşağıdaki gibidir.

$$\hat{J}_{h,n} = \frac{\tilde{\alpha}(x)\alpha^n(x) - \tilde{\beta}(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}. \tag{5.6}$$

Burada $\tilde{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{7} \alpha^k(x) e_k$ ve $\tilde{\beta}(x) = \sum_{k=0}^{7} \beta^k(x) e_k$ dir.

İspat.

$\frac{1}{1-a(x)t} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(x)t^n$ ve eşitlik (5.5) den,

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \left[\sum_{k=0}^{7} \left(J_{h,k+1}(x) - \beta(x) J_{h,k}(x) \right) e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(x) t^n \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{7} \left(J_{h,k+1}(x) - \alpha(x) J_{h,k}(x) \right) e_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n(x) t^n \right]$$

dir. Lemma 5.1'den,

$$G_{\hat{J}}(t) = \frac{1}{\alpha(x) - \beta(x)} \left[\sum_{k=0}^{7} \alpha^k(x) e_k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(x) t^n - \sum_{k=0}^{7} \beta^k(x) e_k \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n(x) t^n \right],$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}(x)\alpha^n(x) - \tilde{\beta}(x)\beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} t^n.$$

5.2 k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonlar

Herhangi bir pozitif gerçek sayı k için k-Jacobsthal dizisi $\{J_{k,n}\}$ ve k-Jacobsthal dizisi $\{j_{k,n}\}$ incelenmiştir. Ayrıca k-Jacobsthal sayıları ve k-Jacobsthal Lucas sayılarına göre k-Jacobsthal kuaterniyon $\{Q_{J_{k,n}}\}$ ve k-Jacobsthal Lucas kuaterniyonları $\{Q_{j_{k,n}}\}$ ve bunların bazı özellikleri araştırılmıştır.

Diğer bir yandan $O_R(a,b,c)$, R üzerinde, $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ tabanı ile genelleştirilen oktonyon cebir olsun. Bu cebir iyi tanımlı, sekiz boyutlu değişmeli ve birleşmeli olmayan bir cebirdir. Herhangi bir pozitif k için, k-Jacobsthal $\{\hat{J}_{k,n}\}$, k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyon $\{\hat{j}_{k,n}\}$ tanımları çalışılmıştır. Aşağıda Binet formülleri verilmiştir ve bazı özdeşlikleri ve özellikleri elde edilmiştir.

5.2.1 Bazı Özdeşlikler için Binet Formülleri ve Genellemeler

Bir sonraki teoremde, k-Jacobsthal ve k- Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Binet formülü ispatlanmıştır.

Teorem 5.4

Herhangi bir n tamsayı için k-Jacobsthal genelleştirilmiş oktonyonları

$$\hat{J}_{k,n} = \frac{\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}}{\alpha - \beta} \tag{5.7}$$

ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyon ise

$$\hat{j}_{k,n} = \alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta} \tag{5.8}$$

dır. Burada $\tilde{\alpha} = \sum_{s=0}^{7} \alpha^s\, e_s,\ ve\ \tilde{\beta} = \sum_{s=0}^{7} \beta^s\, e_s$ dir. Öyle ki, $\alpha\ ve\ \beta, m^2 - km - 2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}, \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}$ dir.

İspat.

$$\alpha\hat{J}_{k,n} + 2\hat{J}_{k,n-1} = \sum_{s=0}^{7} (\alpha J_{k,n+s} + 2J_{k,n+s-1})\, e_s$$

olsun. Aşağıdaki özdeşliklere ihtiyaç duyarız:

$$\alpha J_{k,n} + 2J_{k,n-1} = \alpha^n,$$

$$\beta J_{k,n} + 2J_{k,n-1} = \beta^n.$$

Buradan $\alpha\hat{J}_{k,n} + 2\hat{J}_{k,n-1} = \alpha^n\tilde{\alpha}$ elde ederiz. Aynı zamanda $\beta\hat{J}_{k,n} + 2\hat{J}_{k,n-1} = \beta^n\tilde{\beta}$ dır. Bu denklemlerin farkından,

$$\hat{J}_{k,n} = \frac{\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}$$

elde ederiz. Aynı şekilde,

$$\alpha\hat{j}_{k,n} + 2\hat{j}_{k,n-1} = \sqrt{k^2+8}\,\alpha^n\tilde{\alpha}$$

dır. Benzer şekilde aynı özdeşliği kullanarak,

$$\beta\hat{j}_{k,n} + 2\hat{j}_{k,n-1} = \sqrt{k^2+8}\,\beta^n\tilde{\beta}$$

elde ederiz. Denklemlerin farkından,

$$\hat{j}_{k,n} = \alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}$$

elde ederiz. k-Jacobsthal genelleştirilmiş oktonyon için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$\hat{J}(x) = \sum_{s=0}^{7} \hat{J}_{k,s}\, x^n$.

Teorem 5.5

k-Jacobsthal genelleştirilmiş oktonyon için üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\hat{J}(x)=\frac{1}{1-kx-2x^2}\sum_{0}^{7}\left(J_{k,s}+2J_{k,s-1}\right)e_s. \tag{5.9}$$

İspat.

Eşitlik (5.6) dan aşağıdakine sahibiz.

$$\hat{J}(x)=\hat{J}_{k,0}+\hat{J}_{k,1}x+\hat{J}_{k,2}x^2+\cdots.$$

Denklemin her iki tarafını da kx ve $2x^2$ ile çarparak aşağıdakileri elde ederiz.

$$kx\hat{J}(x)=k\hat{J}_{k,0}x+k\hat{J}_{k,1}x^2+k\hat{J}_{k,2}x^3+\cdots$$

$$2x^2\hat{J}(x)=2\hat{J}_{k,0}x^2+2\hat{J}_{k,1}x^3+\cdots.$$

Son olarak gerekli düzenlemeleri yaparak aşağıdakileri elde ederiz.

$$(1-kx-2x^2)\hat{J}(x)=\hat{J}_{k,0}+\left(\hat{J}_{k,1}-k\hat{J}_{k,1}\right)x,$$

$$\hat{J}(x)=\frac{1}{1-kx-2x^2}\sum_{s=0}^{7}\left(J_{k,s}+2J_{k,s-1}x\right)e_s.$$

Lemma 5.2

$$\tilde{\alpha}^2=\psi_1+W_0+\sqrt{k^2+8}(\psi_2+N_0),$$

$$\tilde{\beta}^2=\psi_1+W_0-\sqrt{k^2+8}(\psi_2+N_0),$$

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}=\varepsilon_1+W_0+\varepsilon_2\sqrt{k^2+8},$$

$$\tilde{\beta}\tilde{\alpha}=\varepsilon_1+W_0-\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}.$$

Burada,

$$\psi_1 = 1 - 4b - 16c - 2a - 8ab - 32ac - 64bc - \frac{1}{2}ak^2 - 4bk^2 - 8ck^6\frac{1}{2}ck^8$$

$$-18abk^2 - 6abk^4 - \frac{1}{2}abk^6 - 200ack^2 - 200ack^4 - 70ack^6 - -576bck^2$$

$$-840bck^4 - 448bck^6 - 108bck^8 - 10ack^8 - 840bck^4 - \frac{1}{2}ack^{10} - 12bck^{10}$$

$$-1568abck^2 - 3136abck^4 - 2352abck^6 - \frac{1}{2}bk^4 - 64ck^2 - 128abc$$

$$-840abck^8 - 154abck^{10} - 14abck^{12} - \frac{1}{2}abck^{14} - \frac{1}{2}ack^{10}.$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{2}bk^3 - 20ck^3 - 6ck^5 - \frac{1}{2}ck^7 - \frac{1}{2}ak + 2bk - 16ck - 6abk - 40ack$$

$$-96bck - 4abk^3 - \frac{1}{2}abk^5 - 80ack^3 - 42ack^5 - 8ack^7 - \frac{1}{2}ack^9 - 280bck^3$$

$$-224bck^5 - 72bck^7 - 10bck^9 - \frac{1}{2}bck^{11} - 224abck - 896abck^3 - 1008abck^5$$

$$-480abck^7 - 110abck^9 - 12abck^{11} - \frac{1}{2}abck^3.$$

$$\varepsilon_2 = (4b - 16c + 64bc)e_1 + (-2ak - 16ck + 32ack)e_2 + (2 - 64c - 16ck^2)e_3$$

$$+(-8ak + 16bk - 2ak^3 + 4bk^3 + 32abk - 8abk^3)e_4$$

$$+(4 + 2k^2 + 32b + 32bk^2)e_5 + (-4k + 16ak + 16ak^3 + 2ak^5)e_6$$

$$+(-8 - 16k^2 - 2k^4)e_7.$$

$$W_0 = ke_1 + (k^2 + 4)e_2 + (6k + k^3)e_3 + (8 + 8k^2 + k^4)e_4$$

$+(20k+k^5+10k^3)e_5+(16+12k^4+36k^2+k^6)e_6$

$+(56k+56k^3+14k^5+k^7)e_7.$

$\varepsilon_1=2a-4b-16c+8ab+32ac-64bc+128+1.$

$N_0=e_1+ke_2+(2+k^2)e_3+(k^3+4)e_4+(4+6k^2+k^4)e_5$

$+(8k^3+k^5+12k)e_6+(8+24k^2+10k^4+k^6)e_7.$

$Q_R(a,b,c)$ temeli için çarpım tablosunu ve $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ tanımını kullanarak yukarıdaki sonucu elde ederiz.

Binet formüllerini kullanarak k-Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için özdeşlikler elde edebiliriz. k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve d'Ocagne özdeşliği aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 5.6 (Catalan özdeşliği)

n ve r tam sayıları için aşağıdakilere sahibiz.

$$\hat{J}_{k,n+r}\hat{J}_{k,n-r}-\hat{J}_{k,n}^2=-(-2)^{n-r}\left[(\varepsilon_1+W_0)J_{k,r}^2+\varepsilon_2J_{k,2r}\right], \tag{5.10}$$

$$\hat{J}_{k,n+r}\hat{J}_{k,n-r}-\hat{J}_{k,n}=(-2)^{n-r}(k^2+8)\left[(\varepsilon_1-W_0)J_{k,r}^2+\varepsilon_2J_{k,2r}\right]. \tag{5.11}$$

İspat.

k -Jacobsthal için Binet formülünü kullanarak genelleştirilmiş oktonyonlar aşağıdaki gibidir.

$\hat{J}_{k,n+r}\hat{J}_{k,n-r}-\hat{J}_{k,n}^2$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^{n+r}\tilde{\alpha}-\beta^{n+r}\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^{n-r}\tilde{\alpha}-\beta^{n-r}\tilde{\beta}\right)-\left(\alpha^{n}\tilde{\alpha}-\beta^{n}\tilde{\beta}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[-(\alpha\beta)^{n-r}\left(\alpha^{2r}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}+\beta^{2r}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right)+(\alpha\beta)^{n}\left(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}+\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right)\right]$$

Lemma 5.2'deki son iki denklemde yerine koyarak ve bazı temel işlemleri yaparak,

$$\hat{J}_{k,n+r}\hat{J}_{k,n-r}-\hat{J}_{k,n}^2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}[-(\alpha\beta)^{n-r}(\varepsilon_1+W_0)(\alpha^{2r}+\beta^{2r})$$

$$-(\alpha\beta)^{n-r}\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}(\alpha^{2r}-\beta^{2r})+2(\alpha\beta)^{n}(\varepsilon_1+W_0)\Big]$$

$$= \frac{-(\alpha\beta)^{n-r}}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\varepsilon_1+W_0)(k^2+8)\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2+\varepsilon_2(k^2+8)\frac{\alpha^{2r}-\beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right]$$

$$= -(-2)^{n-r}\left[(\varepsilon_1+W_0)J_{k,r}^2+\varepsilon_2 J_{k,2r}\right].$$

Teoremdeki ikinci özdeşliği de benzer şekilde elde edebiliriz.

Sonuç 5.1 (Cassini özdeşliği)

Catalan özdeşliğindeki denklemler için $r=1$ alınırsa k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Cassini özdeşliğini elde etmiş oluruz.

$$\hat{J}_{k,n+1}\hat{J}_{k,n-1}-\hat{J}_{k,n}^2 = -(-2)^{n-1}(\varepsilon_1+W_0+k\varepsilon_2), \tag{5.12}$$

$$\hat{J}_{k,n+1}\hat{J}_{k,n-1}-\hat{J}_{k,n}^2 = (-2)^{n-1}(k^2+8)(\varepsilon_1+W_0+k\varepsilon_2) \tag{5.13}$$

Teorem 5.7 (d'Ocagne özdeşliği)

n ve m tam sayıları için, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları aşağıdaki gibidir.

$$\hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n+1}-\hat{J}_{k,m+1}\hat{J}_{k,n} = (-2)^n\left[(\varepsilon_1+W_0)J_{k,m-n}+\varepsilon_2 j_{k,m-n}\right] \tag{5.14}$$

$$\hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n+1} - \hat{J}_{k,m+1}\hat{J}_{k,n} = -(-2)^n(k^2+8)\left[(\varepsilon_1 + W_0)J_{k,m-n} + \varepsilon_2 j_{k,m-n}\right] \qquad (5.15)$$

İspat: k- Jacobsthal için Binet formülünü kullanarak genelleştirilmiş oktonyonlar, elde ederiz.

$$\hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n+1} - \hat{J}_{k,m+1}\hat{J}_{k,n}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^{n+1}\tilde{\alpha} - \beta^{n+1}\tilde{\beta}\right) - \left(\alpha^{m+1}\tilde{\alpha} - \beta^{m+1}\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\alpha^{m+1}\beta^n - \alpha^m\beta^{n+1})\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + (\beta^{m+1}\alpha^n - \alpha^{n+1}\beta^m)\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^m\beta^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha-\beta}\left[\alpha^{m-n}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \beta^{m-n}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$$

Bazı temel işlemler ile aşağıdaki denklem elde edilmiştir.

$$\hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n+1} - \hat{J}_{k,m+1}\hat{J}_{k,n}$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha-\beta}\left[(\varepsilon_1 + W_0)(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}(\alpha^{m-n} + \beta^{m-n})\right]$$

$$= (-2)^n\left[(\varepsilon_1 + W_0)J_{k,m-n} + \varepsilon_2 j_{k,m-n}\right]$$

5.2.2 k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas Genelleştirilmiş Oktonyonların Bazı Özellikleri

Bu bölümde, k-Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlarının Binet formüllerinden ve tanımlarından, onların bazı özellikleri elde edilmiştir.

Önerme 5.1

Herhangi bir n, r tamsayı için, $\hat{J}_{k,n}$ ve $\hat{\jmath}_{k,n}$, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlar ise ve $J_{k,n}$ ve $j_{k,n}$, k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas sayıları ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$\hat{J}_{k,n}^2 + \hat{\jmath}_{k,n}^2 = \frac{k^2+9}{k^2+8}\left[(\psi_1 + W_0)j_{k,2n} + (k^2+8)(\psi_2 + N_0)J_{k,2n}\right] - (-2)^{n+1}\frac{k^2+7}{k^2+8}(\varepsilon_1 + W_0) \tag{5.16}$$

$$\hat{J}_{k,n}^2 - \hat{\jmath}_{k,n}^2 = -\frac{(k^2+7)}{k^2+8}(\psi_1 + W_0)j_{k,2n} - (k^2+7)(\psi_2 + N_0)J_{k,2n} + (-2)^{n+1}\frac{k^2+9}{k^2+8}(\varepsilon_1 + W_0) \tag{5.17}$$

$$\hat{\jmath}_{k,n+r}\hat{J}_{k,n+s} - \hat{\jmath}_{k,n+s}\hat{J}_{k,n+r} = 2(-2)^{n+r}(\varepsilon_1 + W_0)J_{k,s-r} \tag{5.18}$$

$$\hat{J}_{k,m+n} + (-2)^n\hat{J}_{k,m-n} = \hat{J}_{k,m}j_{k,n} \tag{5.19}$$

$$\hat{J}_{k,m}\hat{\jmath}_{k,n} - \hat{J}_{k,n}\hat{\jmath}_{k,m} = (-2)^{m+1}J_{k,n-m}(\varepsilon_1 + W_0) \tag{5.20}$$

$$\hat{J}_{k,m}\hat{\jmath}_{k,n} - \hat{\jmath}_{k,m}\hat{J}_{k,n} = (-2)^{m+1}\left[(\varepsilon_1 + W_0)J_{k,n-m} - \varepsilon_2 j_{k,n-m}\right] \tag{5.21}$$

İspat.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlar için Binet formüllerini kullanarak ve $\tilde{\alpha}^2, \tilde{\beta}^2, \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$ ve $\tilde{\beta}\tilde{\alpha}$ yı yerine koyarak,

$$\hat{J}_{k,n}^2 + j_{k,n}^2 = \left(\frac{\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)^2 + \left(\alpha^n\tilde{\alpha} + \beta^n\tilde{\beta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\tilde{\alpha}^2\alpha^{2n} + \tilde{\beta}^2\beta^{2n} - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\alpha^n\beta^n - \tilde{\beta}\tilde{\alpha}\alpha^n\beta^n\right]$$

$$+\left[\tilde{\alpha}^2\alpha^{2n} + \tilde{\beta}^2\beta^{2n} + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\alpha^n\beta^n + \tilde{\beta}\tilde{\alpha}\alpha^n\beta^n\right]$$

$$= \frac{k^2+9}{k^2+8}\left[(\psi_1 + W_0)j_{k,2n} + (k^2+8)(\psi_2 + N_0)J_{k,2n}\right]$$

$$-(-2)^{n+1}\frac{k^2+7}{k^2+8}(\varepsilon_1 + W_0)$$

elde ederiz. Aşağıdaki özdeşlikleri ispatlamak için benzer adımlar kullanılır.

$$\hat{f}_{k,n}^2 - \hat{j}_{k,n}^2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\tilde{\alpha}^2\alpha^{2n} + \tilde{\beta}^2\beta^{2n} - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\alpha^n\beta^n - \tilde{\beta}\tilde{\alpha}\alpha^n\beta^n\right]$$

$$-\left[\alpha^{2n}\tilde{\alpha}^2 + \beta^{2n}\tilde{\beta}^2 + (\alpha\beta)^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^n\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\left(\psi_1 + W_0 + \sqrt{k^2+8}(\psi_2 + N_0)\right)\alpha^{2n}\right.$$

$$+\left(\psi_1 + W_0 - \sqrt{k^2+8}\,(\psi_2 + N_0)\right)\beta^{2n} - \alpha^n\beta^n\left(\varepsilon_1 + W_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right) + \varepsilon_1$$

$$\left.+W_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8} - \alpha^n\beta^n\left(\varepsilon_1 + W_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right) + \varepsilon_1 + W_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right]$$

$$-\left[\alpha^{2n}\left(\psi_1 + W_0 + \sqrt{k^2+8}\,(\psi_2 + N_0)\right) + \left(\psi_1 + W_0 - \sqrt{k^2+8}\,(\psi_2 + N_0)\right)\beta^{2n}\right.$$

$$\left.+(\alpha\beta)^n\left(\varepsilon_1 + W_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right) + (\alpha\beta)^n\left(\varepsilon_1 + W_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\psi_1 + W_0)(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \sqrt{k^2+8}\,(\psi_2 + N_0)(\alpha^{2n} - \beta^{2n})\right.$$

$$\left.-2\alpha^n\beta^n(\varepsilon_1 + W_0)\right]$$

$$-\left[(\psi_1 + W_0)(\alpha^{2n} + \beta^{2n}) + \sqrt{k^2+8}\,(\psi_2 + N_0)(\alpha^{2n} - \beta^{2n}) + 2(\alpha\beta)^n(\varepsilon_1 + W_0)\right]$$

$$= \frac{-(k^2+7)}{k^2+8}(\alpha^{2n} + \beta^{2n})(\psi_1 + W_0) - \frac{(k^2+7)}{k^2+8}\sqrt{k^2+8}\,(\psi_2 + N_0)(\alpha^{2n} - \beta^{2n})$$

$$-2(\alpha\beta)^n(\varepsilon_1 + W_0)(\frac{k^2+9}{k^2+8})$$

$$= -\frac{(k^2+7)}{k^2+8}(\psi_1 + W_0)j_{k,2n} - (k^2+7)(\psi_2 + N_0)J_{k,2n}$$

$$+(-2)^{n+1}\frac{k^2+9}{k^2+8}(\varepsilon_1 + W_0).$$

$$\hat{J}_{k,n+r}\hat{J}_{k,n+s} - \hat{J}_{k,n+s}\hat{J}_{k,n+r}$$

$$= \left(\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} + \beta^{n+r}\tilde{\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+s}\tilde{\alpha} - \beta^{n+s}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\alpha^{n+s}\tilde{\alpha} + \beta^{n+s}\tilde{\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\left(\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} + \beta^{n+r}\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^{n+s}\tilde{\alpha} - \beta^{n+s}\tilde{\beta}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\alpha^{n+s}\tilde{\alpha} + \beta^{n+s}\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{2n+r+s}\tilde{\alpha}^2 - \beta^{2n+r+s}\tilde{\beta}^2 - (\alpha\beta)^n\alpha^r\beta^s\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^n\beta^r\alpha^s\tilde{\beta}\tilde{\alpha} - \alpha^{2n+s+r}\tilde{\alpha}^2\right.$$
$$\left. + (\alpha\beta)^n\alpha^s\beta^r\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - (\alpha\beta)^n\beta^s\alpha^r\tilde{\beta}\tilde{\alpha} + \beta^{2n+s+r}\tilde{\beta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(\alpha\beta)^n\tilde{\beta}\tilde{\alpha}(\beta^r\alpha^s - \beta^s\alpha^r) + (\alpha\beta)^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta}(\alpha^s\beta^r - \alpha^r\beta^s)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(\alpha\beta)^n(\beta^r\alpha^s - \beta^s\alpha^r)\left(\varepsilon_1 + W_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right)\right.$$

$$\left.+(\alpha\beta)^n(\alpha^s\beta^r - \alpha^r\beta^s)\left(\varepsilon_1 + W_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right)\right]$$

$$= 2(-2)^{n+r}(\varepsilon_1 + W_0)\left(\frac{\alpha^{s-r} - \beta^{s-r}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= 2(-2)^{n+r}(\varepsilon_1 + W_0)J_{k,s-r}.$$

$$\hat{J}_{k,m+n} + (-2)^n \hat{J}_{k,m-n} = \frac{\alpha^{m+n}\tilde{\alpha} - \beta^{m+n}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta} + (-2)^n \frac{\alpha^{m-n}\tilde{\alpha} - \beta^{m-n}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{m+n}\tilde{\alpha} - \beta^{m+n}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^n\left(\alpha^{m-n}\tilde{\alpha} - \beta^{m-n}\tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{m+n}\tilde{\alpha} - \beta^{m+n}\tilde{\beta} + \alpha^m\beta^n\tilde{\alpha} - \alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^m\tilde{\alpha}(\alpha^n + \beta^n) - \beta^m\tilde{\beta}(\alpha^n + \beta^n)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha^n + \beta^n)\left(\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}\right)$$

$$= \hat{J}_{k,m}j_{k,n}.$$

$$\hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n} - \hat{J}_{k,n}\hat{J}_{k,m}$$

$$= \left(\frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)\left(\alpha^n\tilde{\alpha} + \beta^n\tilde{\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)\left(\alpha^m\tilde{\alpha} + \beta^m\tilde{\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{m+n}\tilde{\alpha}^2 + \alpha^m\beta^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha} - \beta^{m+n}\tilde{\beta}^2 - \alpha^{n+m}\tilde{\alpha}^2 - \alpha^n\beta^m\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right.$$

$$\left.+\alpha^m\beta^n\tilde{\beta}\tilde{\alpha} + \beta^{n+m}\tilde{\beta}^2\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^m\beta^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha} - \alpha^n\beta^m\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \alpha^m\beta^n\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(\alpha\beta)^m(\beta^{n-m} - \alpha^{n-m})\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - (\alpha\beta)^m(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$$

$$= -(\alpha\beta)^m\frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha - \beta}\left[\varepsilon_1 + W_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2 + 8} + \varepsilon_1 + W_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2 + 8}\right]$$

$= (-2)^{m+1} J_{k,n-m}(\varepsilon_1 + W_0).$

Son olarak,

$\hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n} - \hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n}$

$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\left(\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^n\tilde{\alpha} + \beta^n\tilde{\beta}\right) - \left(\alpha^m\tilde{\alpha} + \beta^m\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}\right)\right]$

$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{m+n}\tilde{\alpha}^2 + \alpha^m\beta^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha} - \beta^{m+n}\tilde{\beta}^2 - \alpha^{m+n}\tilde{\alpha}^2 + \alpha^m\beta^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right.$

$\left. -\alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha} + \beta^{m+n}\tilde{\beta}^2\right]$

$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[2\alpha^m\beta^n\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - 2\alpha^n\beta^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$

$= \frac{2(\alpha\beta)^m}{\alpha - \beta}\left[\beta^{n-m}\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \alpha^{n-m}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\right]$

$= \frac{(-2)^{m+1}}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{n-m}\left(\varepsilon_1 + W_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right) - \beta^{n-m}\left(\varepsilon_1 + W_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right)\right]$

$= \frac{(-2)^{m+1}}{\alpha - \beta}\left[(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})(\varepsilon_1 + W_0) - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\,(\alpha^{n-m} + \beta^{n-m})\right]$

$= (-2)^{m+1}\left[(\varepsilon_1 + W_0)J_{k,n-m} - \varepsilon_2 j_{k,n-m}\right]$

Önerme 5.2

k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları aşağıdakileri sağlar.

$\hat{J}_{k,n+r}J_{k,n+r} - (-2)^{2r}\hat{J}_{k,n-r}J_{k,n-r} = J_{k,2r}\hat{J}_{k,2n}$

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n+r} + (-2)^{2r}\hat{J}_{k,n-r}j_{k,n-r} = j_{k,2r}\hat{J}_{k,2n} - (-2)^{n+r+1}\hat{J}_{k,0}$$

$$\hat{j}_{k,n+r}j_{k,n+r} + (-2)^{2r}\hat{j}_{k,n-r}j_{k,n-r} = j_{k,2r}\hat{j}_{k,2n} - (-2)^{n+r}\hat{j}_{k,0}$$

$$\hat{j}_{k,n+r}J_{k,n+r} - (-2)^{2r}\hat{j}_{k,n-r}J_{k,n-r} = J_{k,2r}\hat{j}_{k,2n}$$

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n+r} - (-2)^{2r}\hat{J}_{k,n-r}j_{k,n-r} = \hat{J}_{k,2n+2r} - (-2)^{2r}\hat{J}_{k,2n+2r}$$

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n-r} + \hat{J}_{k,n-r}j_{k,n+r} = 2\hat{J}_{k,2n} + (-2)^{n-r}\hat{J}_{k,0}j_{k,2r}$$

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n+t} - \hat{J}_{k,n+t}j_{k,n+r} = (-2)^{n+t}\hat{j}_{k,0}J_{k,n-t}$$

$$\hat{J}_{k,n+r}J_{k,n+t} - \hat{J}_{k,n+t}J_{n+r} = (-2)^{n+r}\hat{J}_{k,0}J_{k,t-r}$$

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n+t} + \hat{J}_{k,n+t}j_{k,n+r} = 2\hat{J}_{k,2n+r+t} + (-2)^{n+t}J_{k,n-t}\hat{J}_{k,0}$$

İspat.

k -Jacobsthal ve k -Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Binet formüllerinden denklemler ispatlanabilir.

$$\hat{J}_{k,n+r}J_{k,n+r} - (-2)^{2r}\hat{J}_{k,n-r}J_{k,n-r} = \left(\frac{\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$-(-2)^{2r}\left(\frac{\alpha^{n-r}\tilde{\alpha} - \beta^{n-r}\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{2n+2r}\tilde{\alpha} + \beta^{2n+2r}\tilde{\beta} - \alpha^{2n}\beta^{2r}\tilde{\alpha} - \alpha^{2r}\beta^{2n}\tilde{\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[\alpha^{2n}(\alpha^{2r} - \beta^{2r})\tilde{\alpha} + \beta^{2n}(\beta^{2r} - \alpha^{2r})\tilde{\beta}\right]$$

$$= \left(\frac{\alpha^{2r} - \beta^{2r}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{2n}\tilde{\alpha} - \beta^{2n}\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right)$$

$= J_{k,2r}\hat{J}_{k,2n}.$

Aşağıdaki özdeşlikleri kanıtlamak için benzer adımlar takip edilir.

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n+r} + (-2)^{2r}\hat{J}_{k,n-r}j_{k,n-r}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) + \left(\frac{\alpha^{n-r}\tilde{\alpha} - \beta^{n-r}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{2n+2r}\tilde{\alpha} - (\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{2n+2r}\tilde{\beta} + (-2)^{2r}\alpha^{2n-2r}\tilde{\alpha}\right.$$

$$\left.-(-2)^{2r}(\alpha\beta)^{n-r}\tilde{\beta} + (-2)^{2r}(\alpha\beta)^{n-r}\tilde{\alpha} - (-2)^{2r}\beta^{2n-2r}\tilde{\beta}\right.$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{2n+2r}\tilde{\alpha} - \beta^{2n+2r}\tilde{\beta} + \alpha^{2n}\beta^{2r}\tilde{\alpha} - \alpha^{2r}\beta^{2n}\tilde{\beta}\right.$$

$$\left.-2(\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\beta} + 2(\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\alpha^{2n}\tilde{\alpha}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) - \beta^{2n}\tilde{\beta}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + 2(\alpha\beta)^{n+r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[(\alpha^{2r} + \beta^{2r})\left(\alpha^{2n}\tilde{\alpha} - \beta^{2n}\tilde{\beta}\right) + 2(\alpha\beta)^{n+r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= j_{k,2r}\hat{J}_{k,2n} - (-2)^{n+r+1}\hat{J}_{k,0}$$

$$\hat{j}_{k,n+r}j_{k,n+r} + (-2)^{2r}j_{k,n-r}\hat{j}_{k,n-r} = \left(\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}\right)(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r})$$

$$+(-2)^{2r}\left(\alpha^{n-r}\tilde{\alpha} - \beta^{n-r}\tilde{\beta}\right)(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})$$

$$= \alpha^{2n+2r}\tilde{\alpha} - \beta^{2n+2r}\tilde{\beta} + \alpha^{2n}\beta^{2r}\tilde{\alpha} - \beta^{2n}\alpha^{2r}\tilde{\beta} - (\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\beta}$$

$$+(\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\alpha} - (\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\alpha}$$

$$= \alpha^{2n}\tilde{\alpha}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) - \beta^{2n}\tilde{\beta}(\alpha^{2r} + \beta^{2r}) - 2(\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\beta} + 2(\alpha\beta)^{n+r}\tilde{\alpha}$$

$$= (\alpha^{2r} + \beta^{2r})\left(\alpha^{2n}\tilde{\alpha} - \beta^{2n}\tilde{\beta}\right) + 2(\alpha\beta)^{n+r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)$$

$$= j_{k,2r}\hat{J}_{k,2n} - (-2)^{n+r}\hat{J}_{k,0}.$$

$$\hat{J}_{k,n+r}j_{k,n-r} + \hat{J}_{k,n-r}j_{k,n+r}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^{n-r} + \beta^{n-r}) + \left(\frac{\alpha^{n-r}\tilde{\alpha} - \beta^{n-r}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r})$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[2\alpha^{2n}\tilde{\alpha} - 2\beta^{2n}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right) + (\alpha\beta)^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[2\left(\alpha^{2n}\tilde{\alpha} - \beta^{2n}\tilde{\beta}\right) + (\alpha\beta)^{n-r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)(\alpha^{2r} + \beta^{2r})\right]$$

$$= 2\hat{J}_{k,2n} + (-2)^{n-r}\hat{J}_{k,0}j_{k,2r}.$$

$$\hat{J}_{k,n+r}J_{k,n+t} - \hat{J}_{k,n+t}J_{k,n+r}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{n+r}\tilde{\alpha} - \beta^{n+r}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+t} - \beta^{n+t}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n+t}\tilde{\alpha} - \beta^{n+t}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^{2}}\left[\alpha^{2n+r+t}\tilde{\alpha} - (\alpha\beta)^{n}\alpha^{t}\beta^{r}\tilde{\beta} - (\alpha\beta)^{n}\alpha^{r}\beta^{t}\tilde{\alpha}\right.$$

$$\left.+\beta^{2n+r+t}\tilde{\beta} - \alpha^{2n+r+t}\tilde{\alpha} + (\alpha\beta)^{n}\alpha^{r}\beta^{t}\tilde{\beta} + (\alpha\beta)^{n}\alpha^{t}\beta^{r}\tilde{\alpha} - \beta^{2n+r+t}\tilde{\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha - \beta)^{2}}\left[(\alpha\beta)^{n}\alpha^{t}\beta^{r}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right) - (\alpha\beta)^{n}\alpha^{r}\beta^{t}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)\right]$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^{n+r}}{(\alpha - \beta)^{2}}\left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\right)(\alpha^{t-r} - \beta^{t-r}) = (-2)^{n+r}\hat{J}_{k,0}J_{k,t-r}$$

Diğerleri de benzer şekilde kanıtlanabilir.

O cebirinde değiştirilen iki k-Jacobsthal veya k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonların çarpımlarının ne gibi değişiklikler gösterdiğini aşağıdaki önermede görebiliriz.

Önerme 5.3

n ve m tam sayıları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$\hat{J}_{k,n}\hat{J}_{k,m} - \hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n} = (-2)^{m+1}\varepsilon_2 J_{k,n-m}, \tag{5.22}$$

$$\hat{j}_{k,n}\hat{j}_{k,m} - \hat{j}_{k,m}\hat{j}_{k,n} = (-2)^{m+1}\varepsilon_{2\sqrt{k^2+8}} j_{k,n-m}. \tag{5.23}$$

İspat.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için Binet formüllerinden ilk denklemi aşağıdaki gibi ispatlayabiliriz.

$$\hat{J}_{k,n}\hat{J}_{k,m} - \hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n}$$

$$= \left(\frac{\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[(\beta^m\alpha^n - \beta^n\alpha^m)\tilde{\beta}\tilde{\alpha} + (\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m)\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left[-2\alpha^n\beta^m\varepsilon_2\sqrt{k^2+8} + 2\alpha^m\beta^n\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right]$$

$$= \frac{-2\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}}{k^2+8}(\alpha^n\beta^m - \alpha^m\beta^n)$$

$$= (-2)^{m+1}\varepsilon_2\left(\frac{\alpha^{n-m} - \beta^{n-m}}{\alpha-\beta}\right) = (-2)^{m+1}\varepsilon_2 J_{k,n-m}.$$

$\hat{J}_{k,n}\hat{J}_{k,m} - \hat{J}_{k,m}\hat{J}_{k,n}$

$= \left(\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}\right) - \left(\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}\right)\left(\alpha^n\tilde{\alpha} - \beta^n\tilde{\beta}\right)$

$= \alpha^{n+m}\tilde{\alpha}^2 - \beta^n\alpha^m\tilde{\beta}\tilde{\alpha} - \alpha^n\beta^m\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \beta^{n+m}\tilde{\beta}^2$

$-\alpha^{n+m}\tilde{\alpha}^2 + \beta^m\alpha^n\widetilde{\beta\alpha} + \alpha^m\beta^n\widetilde{\alpha\beta} - \beta^{m+n}\tilde{\beta}^2$

$= (\beta^m\alpha^n - \beta^n\alpha^m)\tilde{\beta}\tilde{\alpha} + (\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m)\tilde{\alpha}\tilde{\beta}$

$= (\beta^m\alpha^n - \beta^n\alpha^m)\left(\varepsilon_1 + w_0 - \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right)$

$+(\alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m)\left(\varepsilon_1 + w_0 + \varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\right)$

$= -2\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}(\beta^m\alpha^n - \beta^n\alpha^m)$

$= -2\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}(\alpha\beta)^m(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})$

$= (-2)^{m+1}\varepsilon_2\sqrt{k^2+8}\hat{j}_{k,n-m}$

Şimdi tanımlardan ve Binet formüllerinden elde edilen k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal-Lucas genelleştirilmiş oktonyonları için aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 5.4

$$\hat{J}_{k,n} = k\hat{J}_{k,n-1} + 2\hat{J}_{k,n-2} \tag{5.24}$$

$$\hat{j}_{k,n} = k\hat{j}_{k,n-1} + 2\hat{j}_{k,n-2} \tag{5.25}$$

$$\hat{j}_{k,n} = \hat{J}_{k,n-1} + 2\hat{J}_{k,n+1} \tag{5.26}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\hat{J}_{k,n+m}x^n = \frac{\hat{J}_{k,m} + 2\hat{J}_{k,m-1}x}{1-kx-2x^2} \tag{5.27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{j}_{k,n+m} x^n = \frac{\hat{j}_{k,m} + 2\hat{j}_{k,m-1} x}{1 - kx - 2x^2}. \tag{5.28}$$

İspat.

k-Jacobsthal ve k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyonlarının tanımlarıyla ilk üç denklemi aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$k\hat{J}_{k,n-1} + 2\hat{J}_{k,n-2} = k\sum_{s=0}^{7} J_{k,n+s-1}\, e_s + 2\sum_{s=0}^{7} J_{k,n+s-2}\, e_s$$

$$= k\left[J_{k,n-1}e_0 + J_{k,n}e_1 + \cdots + J_{k,n+6}e_7\right] + 2\left[J_{k,n-2}e_0 + J_{k,n-1}e_1 + \cdots + J_{k,n+5}e_7\right]$$

$$= \left(kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}\right)e_0 + \left(kJ_{k,n} + 2J_{k,n-1}\right)e_1 + \cdots + \left(kJ_{k,n+6} + 2J_{k,n+5}\right)e_7$$

$$= J_{k,n}e_0 + J_{k,n+1}e_1 + \cdots + J_{k,n+7}e_7$$

$$= \sum_{s=0}^{7} J_{k,n+s}\, e_s = \hat{J}_{k,n}.$$

$$k\hat{j}_{k,n-1} + 2\hat{j}_{k,n-2} = k\sum_{s=0}^{7} j_{k,n+s-1}\, e_s + 2\sum_{s=0}^{7} j_{k,n+s-2}\, e_s$$

$$= k\left[j_{k,n-1}e_0 + j_{k,n}e_1 + \cdots + j_{k,n+6}e_7\right] + 2\left[j_{k,n-2}e_0 + j_{k,n-1}e_1 + \cdots + j_{k,n+5}e_7\right]$$

$$= \left(kj_{k,n-1} + 2j_{k,n-2}\right)e_0 + \left(kj_{k,n} + 2j_{k,n-1}\right)e_1 + \cdots + \left(kj_{k,n+6} + 2j_{k,n+5}\right)e_7$$

$$= j_{k,n}e_0 + j_{k,n+1}e_1 + \cdots + j_{k,n+7}e_7$$

$$= \sum_{s=0}^{7} j_{k,n+s}\, e_s = \hat{j}_{k,n}.$$

$$k\hat{J}_{k,n-1} + 2\hat{J}_{k,n+1} = \sum_{s=0}^{7} J_{k,n+s-1}\, e_s + 2\sum_{s=0}^{7} J_{k,n+s+1}\, e_s$$

$$= \left(J_{k,n-1}e_0 + J_{k,n}e_1 + \cdots + J_{k,r+6}e_7\right) + 2\left(J_{k,n+1}e_0 + J_{k,n+2}e_1 + \cdots + J_{k,r+8}e_7\right)$$

$$= \left(J_{k,n-1} + 2J_{k,n+1}\right)e_0 + \left(J_{k,n} + 2J_{k,n+2}\right)e_1 + \cdots + \left(J_{k,n+6} + 2J_{k,n+8}\right)e_7$$

$$= j_{k,n}e_0 + j_{k,n+1}e_1 + \cdots + j_{k,n+7}e_7$$

$$= \sum_{s=0}^{7} j_{k,n+s}\, e_s = \hat{j}_{k,n}.$$

k-Jacobsthal genelleştirilmiş oktonyonlar ve geometrik seriler için Binet formülünü kullanarak dördüncü denklemi elde ederiz.

$n, m \in Z$ için, k -Jacobsthal üreteç oktonyonun $\hat{J}_{k,n+m}$ üreteç fonksiyonu bu denklemi elde ederiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{J}_{k,n+m}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^{n+m}\tilde{\alpha} - \beta^{n+m}\tilde{\beta}}{\alpha - \beta}\right) x^n$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\alpha^m\tilde{\alpha}}{1 - \alpha x} - \frac{\beta^m\tilde{\beta}}{1 - \beta x}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \alpha^m\tilde{\alpha}\beta x - \beta^m\tilde{\beta} + \alpha\beta^m\tilde{\beta}x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta} - (\alpha\beta)\left(\alpha^{m-1}\tilde{\alpha} - \beta^{m-1}\tilde{\beta}\right)x}{1 - \alpha x - \beta x + (\alpha\beta)x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta} + 2\left(\alpha^{m-1}\tilde{\alpha} - \beta^{m-1}\tilde{\beta}\right)x}{1 - kx - 2x^2}\right]$$

$$= \frac{\hat{J}_{k,m} + 2\hat{J}_{k,m-1}x}{1 - kx - 2x^2}$$

$n, m \in Z$ için, k-Jacobsthal Lucas genelleştirilmiş oktonyon $\hat{j}_{k,n+m}$'ın genelleştirilen fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{j}_{k,n+m}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha^{n+m}\tilde{\alpha} - \beta^{n+m}\tilde{\beta}\right)x^n$$

$$= \alpha^m\tilde{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n - \beta^m\tilde{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n$$

$$= \frac{\alpha^m\tilde{\alpha}}{1-\alpha x} - \frac{\beta^m\tilde{\beta}}{1-\beta x}$$

$$= \frac{\alpha^m\tilde{\alpha} - \alpha^m\beta\tilde{\alpha}x - \beta^m\tilde{\beta} + \alpha\beta^m\tilde{\beta}x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

$$= \frac{\left(\alpha^m\tilde{\alpha} - \beta^m\tilde{\beta}\right) - (\alpha\beta)\left(\alpha^{m-1}\tilde{\alpha} - \beta^{m-1}\tilde{\beta}\right)x}{1 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta x^2}$$

$$= \frac{\hat{J}_{k,m} + 2\hat{J}_{k,m-1}x}{1 - kx - 2x^2}.$$

KAYNAKLAR

Campos, H., Catarino, P., Aires, A.P., Vasco, P., & Borges, A. (2014). On some identities of k-Jacobsthal-Lucas Numbers. *Int. Journal of Math. Analysis*, 8(10), 489-494.

Catarino, P. (2016). On Generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 24(3), 61-78.

Çimen, C.B., & İpek, A. (2017). On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Octonions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14, 37.

Ipek, A., & Arı, K. (2015). On h(x)-Fibonacci octonion polynomials. *Alabama Journal of Mathematics*, 39, 1-6.

Jhala, D., Sisodiya, K., & Rathore, G.P.S. (2013). On some identities for k -Jacobsthal Numbers. *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, 7(9-12), 551-556.

Karataş, A., & Halici, S. (2016). Horadam octonions. arXiv preprint arXiv:1611.10143.

Keçilioğlu, O., & Akkus, I. (2015). The Fibonacci octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(1), 151-158.

Nalli, A., & Haukkanen, P. (2009). On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Chaos, Solitons Fractals*, 42(5), 3179-3186.

Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2016). A note on Jacobsthal quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 441-447.

Torunbalcı-Aydın, F., & Yüce, S. (2017). A new approach to Jacobsthal quaternions. *Filomat*, 31(18), 5567-5579.

Appropriate, S., & Eldogan, H. (2016). k -Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas matrix sequences. *In International Mathematical Forum*, 11(3), 145-154.

Uygun, Ş., & Eldogan, H. (2016) Properties of k -Jacobsthal and k -Jacobsthal Lucas sequences. *General Mathematics Notes*, 36(1), 34.

Yasarsoy, S., Acikgoz, M., & Duran, U. (2018). A study on the k -Jacobsthal and k -Jacobsthal Lucas Quaternions and Octonions. *J. Ana. Num. Theor.*, 6(2), 1-7.

Bilgici, G., Ünal, Z., Tokeşer, Ü., & Mert, T. (2018). On Fibonacci and Lucas generalized octonions. *Ars Combinatoria*, 138, 35-44.

Akkus, I., & Keçilioglu, O. (2015) Split Fibonacci and Lucas octonions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 25(3), 517-525.

Ikikardes, S., & Sarıgedik, Z. (2013). Some properties of the generalized Fibonacci and Lucas sequences related to the extended Hecke groups. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(1), 1-13.

Aydın, F. T. (2018). On generalizations of the Jacobsthal sequence. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 24(1), 120-135.

Polatli, E., & Kesim, S. (2015). On quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components. *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 1-8.

Akyigit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2014). Fibonacci generalized quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(3), 631-641.

Ramırez, J. L. (2015). Some combinatorial properties of the k -Fibonacci and the k -Lucas quaternions. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 23(2), 201-212.

Djordjevic, G. B. (2000). Derivative sequences of generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 38(4), 334-338.

Djordjevic, G. B. (2000). Generalized Jacobsthal polynomials. *Fibonacci Quarterly*, 38(3), 239-243.

Uygun, S. (2018). A New Generalization for Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Sequences. *Asian Journal of Mathematics and Physics*, 2(1), 14-21.

Bilgici, G., Tokaşer, Ü., & Ünal, Z. (2017). k -Fıbonaccı and k-Lucas Generalızed Quaternions. *Konuralp Journal Of Mathematics (Kjm)*, 5(2), 102-113.

Gupta, V. K., & Panwar, Y. K. (2012). Common factors of generalized Fibonacci, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1(4), 377-382

Cerda-Morales, G. (2017). Some Properties of Horadam Quaternions. arXiv preprint arXiv:1707.05918.

Karaatli, O. (2016). On Generalized Fibonacci and Lucas Numbers of the Form wkx2±1. *Integers*, 16, 1-12.

Öztürk, A. Ö., & Porsuk, A. (2018). Some remarks regarding the (p, q)- Fibonacci and Lucas octonion polynomials. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 1(1), 46-53

Cerda-Morales, G. (2018). Third-order Jacobsthal generalized quaternions. *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, 50, 11-27.

Kilic, E. (2011). Some Subsequences of the Generalized Fibonacci and Lucas Sequences. A. Boussairi, M. Kabil and A. Taik., 81.

Horadam, A. F. (1993). Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2(2), 23-33.

Flaut, C., & Shpakivskyi, V. (2012). On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions. arXiv preprint arXiv:1209.0584.

Savin, D. (2015). Some properties of Fibonacci numbers, Fibonacci octonions, and generalized Fibonacci-Lucas octonions. *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 1-10.

Tokeşer, Ü., Mert, T., Ünal, Z., & Bilgici, G. (2020). Some Special Identities for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Generalized Octonions. *Caspian Journal of Mathematical Sciences* (CJMS), Accepted.

Uygun, S., & Owusu, E. (2019). A new generalization of jacobsthal lucas numbers (Bi-Periodic Jacobsthal Lucas Sequence). *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 1-13.

Horadam, A. F. (1961). A generalized Fibonacci sequence. *The American Mathematical Monthly*, 68(5), 455-459.

Tasci, D. (2017). On k-Jacobsthal and k-Jacobsthal-Lucas quaternions. *Journal of Science and Arts* , 17(3), 469-476.

Sumeyra, U. C., & Özgür, N. Y. (2019). Right circulant matrices with generalized Fibonacci and Lucas polynomials and coding theory. *Balıkesir University Journal of Science Institute*, 21(1), 306-322.

Catarino, P. (2016). A note on certain matrices with $h(x)$–Fibonacci quaternion polynomials. *Journal of Difference Equations and Applications*, 22(2), 343-351.

Appropriate, S., & Owusu, E. (2016). A new generalization of Jacobsthal numbers (bi-periodic Jacobsthal sequences). *Journal of Mathematical Analysis*, 7(5), 28-39.

Horadam, A. F. (1988). Jacobsthal and Pell curves. *Fibonacci Quarterly*, 26, 79-83.

Horadam, A. F. (1996). Jacobsthal representation numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 34, 40-54.

Horadam, A. F. (1997). Jacobsthal representation polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, 35(2), 137-148.

Srividhya, G. (2021). Generalized k-Jacobsthal 2^m Ions (For Fixed m) Quarternions, Sedenions. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* (TURCOMAT), 12 (9), 963-968.

Uygun, Ş., & Tümbas, A. (2018). Generalized $k-$Jacobsthal Sequence. *Asian Journal of Mathematics and Physics*, 2, 45-50.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. A Wiley-Interscience Publication, Canada.