

**T.C.**  
**KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



**3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR**

**TUNCAY DENİZ ŞENTÜRK**

**DOKTORA TEZİ**

**DR. ÖĞR. ÜYESİ ZAFER ÜNAL**

**ARALIK - 2020**

**KASTAMONU**



## TAAHHÜTNAME

*Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu; ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını, bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini bildirir ve taahhüt ederim.*

  
Tuncay Deniz ŞENTÜRK

# ÖZET

## DOKTORA TEZİ

### 3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

TUNCAY DENİZ ŞENTÜRK

KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ ZAFER ÜNAL

Bu tezde, üç parametreye bağlı olarak kuaterniyon cebirinin genel bir formu verilmiştir. Tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş için ayrılmıştır. Bu bölümde kısa bir literatür taraması yapılmış, çalışmanın amacı ve kaynakların özeti sunulmuştur.

İkinci bölümde, tez boyunca gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde 3-parametrelî genelleştirilmiş kuaterniyon (3-PGK) lar tanımlanmış, cebiri oluşturulmuş, 3-PGK ların özellikleri ve 3-PGK lar üzerindeki temel işlemler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 3-PGK lar matrislerle temsil edilmiş ve 3-PGK lar için Hamilton operatörleri tanımlanmıştır. Ayrıca Hamilton matrislerinin determinant, özdeğer, özvektör, karakteristik polinom ve karakteristik denklem gibi özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde hem 3-PGK lar hem de 3-PGK ların matrisleri için kutupsal gösterimi, De Moivre ve Euler formülleri elde edilmiştir. Bu bölümde 3-PGK lar ile ilişkili matrislerin kuvvetleri arasındaki ilişki verilmiştir.

Son bölümde 3-PGK lar için Lie grubu ve Lie cebiri incelenmiş ve matris gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca 3-PGK lar için Lie çarpımı ve Killing-bilineer formu verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Kuaterniyon, 3-parametrelî genelleştirilmiş kuaterniyon, Lie grubu, Lie cebiri, Euler formülü, De Moivre formülü, kuaterniyonların matris gösterimi

Aralık 2020, 94 Sayfa

## ABSTRACT

### PH.D THESIS

#### 3-PARAMETER GENERALIZED QUATERNIONS

TUNCAY DENİZ ŞENTÜRK

KASTAMONU UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. ZAFER ÜNAL

In this thesis, a general form of quaternion algebra is given depending on three parameters. The thesis consists of six chapters.

The first part is reserved for introduction. In this section, a brief literature review has been made, the purpose of the study and the summary of the references are presented.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems required throughout the thesis have been given.

In the third chapter, 3- parameters generalized quaternions (3-PGQs) are defined, its algebra has been formed, the properties of 3-PGQs and the basic operations over 3-PGQs have been given.

In the fourth chapter, 3-PGQs have been represented with matrices and Hamilton operators for 3PGQs have been defined. In addition, the properties of Hamilton matrices such as determinant, eigenvalue, eigenvector, characteristic polynomial and characteristic equation have been given.

In the fifth chapter, the polar representation, De Moivre and Euler formulas for both 3-PGQs and the matrices of 3-PGQs have been obtained. In this section the relationship among the powers of the matrices associated with 3-PGQs has been given.

In the last chapter, Lie group and Lie algebra for 3-PGQs have been examined and the matrix representations have been obtained. Also Lie product and Killing-bilinear form for 3PGQs have been given.

**KEYWORDS:** Quaternion, 3-parameter generalized quaternion, Lie group, Lie algebra, Euler's formula, De Moivre's formula, matrix representation of quaternions

December 2020, 94 Pages

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve tamamlanmasında büyük katkıları olan, beni yönlendiren ve her konuda bugüne kadar teşvik eden değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zafer ÜNAL (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü) 'a, verdiği ödevler ve sorduğu sorularla beni yönlendiren, matematik bilimine olan bakış açımı geliştiren ve bana her zaman vaktini ayıran kıymetli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DAŞDEMİR (Kastamonu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü)'e ve çalışmalarımı sürekli takip eden, sorularım olduğunda beni asla geri çevirmeyip kıymetli zamanını benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Göksal BİLGİCİ (Kastamonu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi)'ye teşekkürlerimi borç bilirim. Son olarak kıymetli eşim Ebru ŞENTÜRK ve canım kızım Ece ŞENTÜRK'e gösterdikleri özveri ve manevi desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

**TUNCAY DENİZ ŞENTÜRK**

Kastamonu, 2020

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
<b>TEZ ONAYI</b> .....	<b>ii</b>
<b>TAAHHÜTNAME</b> .....	<b>iii</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>vi</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>vii</b>
<b>TABLolar DİZİNİ</b> .....	<b>viii</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> .....	<b>ix</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
1.1 Kaynak Özetleri .....	3
1.2 Çalışmanın Amacı.....	5
<b>2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER</b> .....	<b>6</b>
<b>3. 3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR</b> ....	<b>9</b>
3.1 3-Parametrelİ Genelleştirilmiş Kuarterniyonlar.....	9
3.2 3-PGK lar Üzerinde Temel İşlemler .....	12
<b>4. 3-PGK LARLA İLİşKİLİ MATRİSLER VE HAMILTON</b>	
<b>MATRİSLERİ</b> .....	<b>28</b>
4.1 Hamilton Operatörleri ve Özellikleri .....	28
4.2 Hamilton Matrislerinden 3-PGK lar için Çarpım Tablosunun Elde Edilmesi .....	34
4.3 Hamilton Matrisleri için Determinant, Karakteristik Polinom, Karakteristik Denklem, Özdeğerler ve Özvektörler .....	38
<b>5. 3-PGK LAR İÇİN KUTUPSAL GÖSTERİM, DE MOIVRE VE EULER FORMÜLLERİ</b> .....	<b>44</b>
5.1 3-PGK lar için Kutupsal Gösterim .....	44
5.2 $M$ Matrisi için Kutupsal Gösterimi.....	45
5.3 3-PGK lar için De Moivre Formülü .....	46
5.4 $M$ matrisi için De Moivre Formülü .....	47
5.5 3-PGK lar için Euler Formülü .....	52
5.6 $M$ matrisi için Euler Formülü .....	53
5.7 3-PGK lar için $n$ -yinci Dereceden Kökler .....	54
5.8 $M$ matrisi için $n$ -yinci Dereceden Kökler .....	54
5.9 Matrisin Kuvvetleri Arasındaki İlişki.....	55
<b>6. 3-PGK LARIN LİE CEBİRİ VE MATRİS TEMSİLLERİ</b> .....	<b>60</b>
6.1 Temel Tanım ve Teoremler .....	60
6.2 3-PGK lar için Lie grubu .....	70
6.3 3-PGK larda Lie Grubu ve Lie Cebiri İçin Adjoint Dönüşümler.....	74
6.3.1 $S_{\mathbb{K}}$ Lie Grubu için Matris Gösterimi.....	74
6.3.2 Lie Çarpımı .....	80
6.3.3 $S_{\mathbb{K}}$ nın Lie Cebiri için Matris Temsili.....	85
6.3.4 Killing-Bilineer Form .....	86
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>90</b>
<b>ÖZGEÇMİş</b> .....	<b>93</b>

## TABLULAR DİZİNİ

	<b><u>Sayfa</u></b>
Tablo 3.1 3-PGK lar için çarpım tablosu .....	9
Tablo 3.2 2-PGK lar için çarpım tablosu .....	10
Tablo 3.3 Split-kuaterniyonlar için çarpım tablosu.....	10
Tablo 3.4 Kuaterniyonlar için çarpım tablosu .....	10
Tablo 3.5 Yarı kuaterniyonlar için çarpım tablosu .....	11
Tablo 3.6 Split-yarı kuaterniyonlar için çarpım tablosu .....	11
Tablo 3.7 1/4 kuaterniyonlar için çarpım tablosu .....	11

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

$\mathbb{K}$	: 3-PGK ların kümesi
$\text{Im}(\mathbb{K})$	: 3-PGV lerin kümesi
$S_p$	: $p$ 3-PGK unun skaler kısmı
$V_p$	: $p$ 3-PGK unun vektörel kısmı
$N_p$	: $p$ 3-PGK unun normu
$\bar{p}$	: $p$ 3-PGK unun eşleniği
$\times$	: 3-PGK lar üzerindeki kuaterniyon çarpımı
$\wedge$	: 3-PGK lar üzerindeki vektörel çarpım
$f$	: 3-PGK lar üzerindeki skaler çarpımı
$M_4(\mathbb{R})$	: 4x4 tipindeki reel matrislerin uzayı
$\text{Çek}\phi$	: $\phi$ lineer dönüşümünün çekirdeği
$S_{\mathbb{K}}$	: 3-PGBK ların kümesi
$S^2_{\mathbb{K}}$	: 3-PGBV lerin kümesi
$T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$	: $S_{\mathbb{K}}$ nın $e = 1$ noktasındaki tanjant uzayı
$\mathcal{X}(S_{\mathbb{K}})$	: $S_{\mathbb{K}}$ Lie grubu üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}})$	: $S_{\mathbb{K}}$ Lie grubunun sol invaryant vektör alanları cümlesi
$\mathcal{K}$	: $S_{\mathbb{K}}$ Lie grubunun Killing bilineer formu
$[, ]$	: 3-PGK lar için Bracket Operatörü
$Ad_p$	: $p$ 3-PGBK için $T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$ de tanımlı adjoint dönüşümü
$l_p$	: $p$ 3-PGK için $\mathbb{K}$ nın sol ötelemesi (sol çarpımı)
$l_{p*}$	: $l_p$ sol çarpımının diferensiyeli
$+$	: 3-PGK lar için Hamilton sağ operatörü
$-$	: 3-PGK lar için Hamilton sol operatörü
$H$	: 3-PGK lar için Hamilton sağ matrisi
$\bar{H}$	: 3-PGK lar için Hamilton sol matrisi
$M$	: 3-PGK lar için Hamilton sağ matrisi
$N$	: 3-PGK lar için Hamilton sol matrisi

### Kısaltmalar

<b>2-PGK</b>	: 2-parametrelili genelleştirilmiş kuaterniyon
<b>3-PGK</b>	: 3-parametrelili genelleştirilmiş kuaterniyon
<b>3-PGPK</b>	: 3-parametrelili genelleştirilmiş pür kuaterniyon
<b>3-PGV</b>	: 3-parametrelili genelleştirilmiş vektör
<b>3-PGBK</b>	: 3-parametrelili genelleştirilmiş birim kuaterniyon
<b>3-PGBPK</b>	: 3-parametrelili genelleştirilmiş birim pür kuaterniyon
<b>3-PGBV</b>	: 3-parametrelili genelleştirilmiş birim vektör

## 1. GİRİŞ

Karmaşık sayılar

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid i^2 = -1, x, y \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), 1830 yılından itibaren karmaşık sayılar üzerinde çalışmalarına başlamıştır. Daha sonra bu sayıları genelleştirmek istedi ve önce bu sayıları iki sanal ve bir reel sayının birleşimi olacak şekilde üçlüler ile ifade etmeye çalıştı. Yani başlangıçta karmaşık sayıları 3-boyutlu uzaya genişletmeyi ümit etmiştir. Karmaşık sayılar düzlemde bir nokta gösterdiği için, karmaşık sayıların genelleştirmesinin uzayda bir vektöre karşılık geleceğini tahmin ediyordu. Ancak bu üçlülerle toplama ve çıkarma yapabilirken çarpma ve bölme işlemlerini yapamayıp üzerinde norm da tanımlayamadı. Yıllarca düşünüp araştırmalar yaptıktan sonra 16 Ekim 1843 tarihinde bugün "Hamilton Köprüsü" olarak da anılan Brougham Köprüsü'nden eşiyle birlikte geçerken aklına bir fikir geldi ve oradaki bir taşa formülü yazdı. Böylelikle reel kuaterniyonlar

$$\mathbb{H} = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, e_1e_2e_3 = -1\}$$

şeklinde tanımlanmış oldu (Hamilton, 1843). Hamilton bundan sonraki zamanlarında kuaterniyonlar üzerine olan çalışmalarını tamamladı (Hamilton, 1843, 1844, 1848, 1853, 1866).

Öklid uzayında vektörü, vektöre bölemezken kuaterniyonlar sayesinde iki vektör için bölme işleminin de mümkün olabileceği görülmüştür. Bu sebeple kuaterniyonların keşfi modern cebirdeki en önemli araştırmalardan biridir. Hamilton hayatının geri kalan kısmında kuaterniyonlar ile ilgili önemli çalışmalar yapmıştır. Kuaterniyonlara dair tüm özellikler, cebirsel ve geometrik gösterimler Ward (1997) tarafından yeniden derlenip düzenlenmiştir.

Reel kuaterniyonların tanımlanmasının ardından, Cockle (1849) literadürde bölünmüş kuaterniyon, para-kuaterniyon, ko-kuaterniyon, pseudo-kuaterniyon olarak da bilinen

split-kuaterniyonları

$$\mathbb{H}' = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, -e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, e_1e_2e_3 = 1\}$$

şeklinde tanımladı. Cockle bu sayede kuaterniyonlara yepyeni bir boyut kazandırdı. Karmaşık katsayılı kuaterniyonlara bi-kuaterniyon denir. Bi-kuaterniyonlar da Hamilton (1853) tarafından aşağıdaki gibi tanımlandı:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, e_1e_2e_3 = -1\}$$

Daha sonra Clifford (1873) bi-kuaterniyonlar üzerinde çalışmalar yaptı. Halberstam ve Ingram (1967) yazdıkları bir kitapta Hamilton'un yukarıda bahsedilen tüm çalışmalarını yayınladı. Genelleştirilmiş kuaterniyonlar Dickson (1924) tarafından iki parametre ile aşağıdaki gibi tanımlandı:

$$\mathbb{H}_{\lambda, \mu} = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, e_1^2 = -\lambda, e_2^2 = -\mu, e_3^2 = -\lambda\mu, \\ e_1e_2e_3 = -\lambda\mu\}$$

Griffiths (1928) de bundan dört yıl sonra genelleştirilmiş kuaterniyonlar üzerine bir makale yazdı. Pottman ve Wallner (2000) yazdıkları kitapta genelleştirilmiş kuaterniyonlara yer verdi. Literatürde genelleştirilmiş kuaterniyonlar olarak bilinen bu kuaterniyonlardan, tez çalışması boyunca "2-parametrelili genelleştirilmiş kuaterniyon (2-PGK) lar" şeklinde söz edeceğiz. 2-PGK lar kümesinde, eğer  $\lambda = \mu = 1$  alınırsa Hamilton'un tanımladığı reel kuaterniyonlar elde edilir. Eğer  $\lambda = -\mu = 1$  alınırsa Cockle tarafından tanımlanan split-kuaterniyonlar elde edilir. Ayrıca Rosenfeld (1997) in tanımlamış olduğu yarı-kuaterniyonlar, split-yarı kuaterniyonlar ve 1/4-kuaterniyonlar 2-PGK lardaki  $\lambda$  ve  $\mu$  değerlerine göre aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$\lambda = 1, \mu = 0$  için yarı-kuaterniyonlar

$$\mathbb{H}^0 = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, e_1^2 = -1, e_2^2 = e_3^2 = 0, \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, e_2e_3 = e_3e_2 = 0, e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2\},$$

$\lambda = -1, \mu = 0$  için split - yarı kuaterniyonlar

$$\mathbb{H}^0 = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d, \in \mathbb{R}, e_1^2 = 1, e_2^2 = e_3^2 = 0, \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, e_2e_3 = e_3e_2 = 0, e_3e_1 = -e_1e_3 = -e_2\}$$

ve  $\lambda = \mu = 0$  değerleri için 1/4-kuaterniyonlar aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathbb{H}^{00} = \{a + be_1 + ce_2 + de_3 \mid a, b, c, d, \in \mathbb{R}, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 0, \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3, e_2e_3 = e_3e_2 = e_3e_1 = e_1e_3 = 0\}.$$

Hamilton'un yaklaşık iki asır önce yaptığı keşfin etkilerini bugün fizikten bilgisayar grafiklerine kadar birçok alanda görmek mümkündür.

## 1.1 Kaynak Özetleri

Giriş kısmında genel bir literatür taramasından bahsedilmiş olup Hamilton'un "Researches respecting quaternions (1843)", "On a new species of Imaginary quantities connected with the theory of quaternions (1844)", "Researches respecting quaternions (1848)", "Lectures on Quaternions (1853)", "On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions (1853)", "Elements of Quaternions (1866)" adlı kitapları ile Cockle'in "On Systems of algebra involving more than one imaginary; and on equations of the fifth degree (1849)", Clifford'in "Preliminary sketch of biquaternions (1873)", Halberstam ve Ingram'ın "The mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton (1967)" Pottmann ve Wallner'in "Computational Line Geometry (2000)", Ward'ın, "Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications (1997)", Rosenfeld'in "Geometry of Lie Groups (1997)" isimli kitaplarından, Dickson'ın "On the Theory of Numbers and Generalized Quaternions (1924)" ve Griffiths'in "Generalized Quaternion Algebras and the Theory of Numbers (1928)" başlıklı makalelerinden faydalanılmıştır.

İkinci bölüm olan temel tanım ve teoremler kısmında Hacısalihoğlu'nun "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş (1980)" ve "Lineer Cebir I (1998)" kitaplarından, Bayraktar'ın, "Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi (1988)", O'Neill'in, "Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity (1983)" ve Rosenfeld'in "Geometry of Lie Groups (1997)" isimli kitaplarından yararlanılmıştır.

Üçüncü bölümde 3-PGK lar tanımlanıp, yeni teoremler ve sonuçlar bulunurken giriş kısmında bulunan, literatür taraması için incelenen tüm kaynaklardan esinlenilmiştir. Bu çalışmaların tümünden yola çıkarak, hepsi birleştirilip 3-PGK ların özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde Hamilton operatörleri ve Hamilton matrisleri elde edilmiştir. Burada Agrawal'ın "Hamilton operators and dual-number quaternions in spatial kinematics (1987)", Jafari ve Yaylı'nın "Hamilton operators and generalized quaternions (2010)", Jafari, Meral ve Yaylı'nın, "Matrix representation of dual quaternions (2013)" başlıklı makaleleri ile Kula'nın "Bölünmüş Kuarterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları (2003)" doktora tezinden esinlenilmiştir.

Beşinci bölümde De Moivre, Euler formülleri ile kutupsal gösterim gibi çalışmalarda Cho'nun "De Moivre Formula for Quaternions (1998)", Özdemir'in "The roots of a Split Quaternion (2009)", Kabadayı ve Yaylı'nın "De Moivre's Formula for Dual Quaternions (2011)", Mamagani ve Jafari'nin "On Properties of Generalized Quaternions Algebra (2013)" başlıklı makalelerinden ve Meral'ın "Kuarterniyonlara ait matrisler için De Moivre ve Euler Formülleri (2009)" adlı yüksek lisans tez çalışmasından esinlenilmiştir.

Son bölümde Lie grubu, Lie cebiri, Bracket operatörü vb. konular üzerinde yeni sonuçlar bulunurken de Karger ve Novak'ın "Space kinematics and Lie groups (1985)" kitabından, Jafari ve Yaylı'nın "Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties (2015)" başlıklı makaleleri ile birlikte Ölmez'in "Genelleştirilmiş Kuarterniyonlar ve Uygulamaları (2006)" yüksek lisans tezinden esinlenilerek tez çalışması tamamlanmıştır.

## **1.2 Çalışmanın Amacı**

Kuarterniyonlar teorisi her geçen yıl geliştirilmiş, dual kuarterniyonlar, split kuarterniyonlar, yarı-kuaterniyonlar gibi bir çok çeşidi türetilmiş ve bunlarla ilgili de birçok çalışma bilim insanlarınca yapılmıştır. Bugün fizik ve bilgisayar bilimleri gibi bir çok

alanda yaygın olarak kullanılan kuaterniyonlar teorisi lisans ve lisansüstü düzeyde ülkemizde bir çok üniversite tarafından ders olarak okutulmakta ve aynı zamanda üniversitelerimizde bu konu üzerinde çalışan çok sayıda matematikçi bulunmaktadır.

Bu tezde, 19. yüzyılın ortalarından itibaren merak ve ilgi konusu olan kuaterniyonların genel bir durumu çalışılmıştır. Bugüne kadar çalışılmış olan kuaterniyon cebirleri ve daha fazlası yeni tanım, teorem ve sonuçlarla sunulmuştur. Giriş kısmında sözü geçen genelleştirmenin çok daha ötesine geçerek adına “3-parametrelili genelleştirilmiş kuaterniyon (3-PGK) lar” denilecek olan, kuaterniyonlar cebirinin daha genel hali verilmiştir. 3-PGK ların önce cebiri oluşturulmuştur. Tanımlar, çarpım tablosu ve diğer özellikler verilmiş, bunlara bağlı yeni sonuçlar elde edilmiştir. 3-PGK lar için matris temsilleri ve Hamilton operatörleri elde edilmiştir. Matrisler yardımıyla 3-PGK lar için norm, karakteristik denklem karakteristik polinom özdeğer özvektör gibi çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca kutupsal gösterim, De Moivre formülleri ve Euler formüllerini incelenmiş olup bunların da matris gösterimleri ile 3-PGK larda matrislerin kutupsal form yardımıyla kuvvetleri arasındaki ilişki verilmiştir. Son olarak Lie grubu, Lie cebiri ve bracket çarpımı, Killing bilineer form da 3-PGK lar için çalışılmıştır.

Bu çalışmanın, daha yüksek boyutlu hiper-karmaşık sayılar üzerinde yeni çalışmalar yapılabilmesi için esin kaynağı oluşturacağı düşünülmektedir.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

### Tanım 2.1

$(H, \top, \perp)$  bir halka olsun.  $H$  nin  $\top$  işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfırı denir. Sıfırdan farklı  $x, y$  elemanları için  $x \perp y = 0$  oluyorsa  $x, y$  elemanlarına birer sıfır bölen denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya tamlık bölgesi adı verilir (Hacısalihoglu, 1998).

### Tanım 2.2

$(\mathcal{F}, \top, \perp)$  değişmeli bir halka ve  $\top$  işlemine göre birim eleman  $0$  olsun.  $(H - \{0\}, \perp)$  cebirsel ikili yapısı bir grup oluşturuyorsa  $\mathcal{F}$  ye bir cisimdir denir (Hacısalihoglu, 1998).

### Tanım 2.3

$(V, \oplus)$  bir abel grubu ve  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  da cisim olmak üzere

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{F} \times V &\rightarrow V \\ (c, \alpha) &\rightarrow c \odot \alpha \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise  $(V, \oplus, \odot)$  ye  $\mathcal{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

- (i) Her  $v_1, v_2 \in V$  ve her  $c \in \mathcal{F}$  için  $c \odot (v_1 \oplus v_2) = c \odot v_1 \oplus c \odot v_2$
- (ii) Her  $v \in V$  ve her  $c_1, c_2 \in \mathcal{F}$  için  $(c_1 \oplus c_2) \odot v = c_1 \odot v \oplus c_2 \odot v$
- (iii) Her  $v \in V$  ve her  $c_1, c_2 \in \mathcal{F}$  için  $(c_1 c_2) \odot v = c_1 \odot (c_2 \odot v)$
- (iv) Her  $v \in V$  için,  $1_{\mathcal{F}} \odot v = v$ .

$V$  vektör uzayını  $\{V, \oplus, \mathcal{F}, +, \cdot, \odot\}$  altılısı ile ifade edebiliriz (Hacısalihoglu, 1998).

#### Tanım 2.4

$V \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}$  cisim olmak üzere  $\{V, \oplus, \mathcal{F}, +, \cdot, \odot\}$  altılısı vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned}\otimes : V \times V &\rightarrow V \\ (x, y) &\rightarrow x \otimes y\end{aligned}$$

işlemi için aşağıdaki özellikleri sağlanıyorsa  $V$  bir cebirdir:

- (i) Her  $a, b, c \in V$  için,  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
- (ii) Her  $a, b, c \in V$  için,  $a \otimes (b + c) = a \otimes b + a \otimes c$
- (iii) Her  $k \in \mathcal{F}$  ve  $a, b \in V$  için  $k \odot (a \otimes b) = (k \odot a) \otimes b = a \otimes (k \odot b)$

Bu cebir  $\{V, \oplus, \mathcal{F}, +, \cdot, \odot, \otimes\}$  yedilisi ile gösterilebilir. Eğer  $\otimes$  işlemi birim elemana sahipse  $V$  birimli cebir, değişme özelliğine sahipse değişmeli cebir, her ikisine birden sahipse birimli ve değişmeli cebirdir denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

#### Tanım 2.5

$(G, \odot)$  ve  $(G', \otimes)$  iki grup olmak üzere

$$f : G \rightarrow G'$$

bir fonksiyon olsun. Eğer  $G$  deki her  $a, b$  elemanı için

$$f(a \odot b) = f(a) \otimes f(b)$$

ise o zaman  $f$  fonksiyonuna grup homomorfizması denir.  $f$  homomorfizması eğer birebir ise  $f$  ye monomorfizma, örten ise epimorfizma, birebir ve örten ise izomorfizma denir. Eğer  $G = G'$  şeklinde ise,  $f$  bir homomorfizma ise o zaman  $f$  ye endomorfizma,  $f$  bir izomorfizma ise o zaman  $f$  ye otomorfizma denir.

Eğer her  $a, b \in G$  için

$$f(a \odot b) = f(b) \otimes f(a)$$

oluyorsa o zaman  $f$  ye anti-homomorfizma denir (Bayraktar, 1988).

### 3. 3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLAR

Reel kuaterniyonlar Hamilton (1843) tarafından, Split-kuaterniyonlar Cockle (1849) tarafından ve 2-PGK lar ise Dickson (1924) tarafından tanımlanmıştır. Bu bölümde bu üç bilim insanının çalışmalarından esinlenerek kuaterniyonlara ayrı bir boyut kazandırıp üç parametre ile genelleştireceğiz. Daha sonra cebirini oluşturup özelliklerini vereceğiz.

#### 3.1 3-Parametrelî Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar

##### Tanım 3.1.1

$$\mathbb{K} = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, e_1^2 = -\lambda_1\lambda_2, \\ e_2^2 = -\lambda_1\lambda_3, e_3^2 = -\lambda_2\lambda_3, e_1e_2e_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}.$$

kümesinin her bir  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  elemanına 3-parametrelî genelleştirilmiş kuaterniyon (3-PGK) denir. Burada  $a_0, a_1, a_2, a_3$  reel sayılarına  $p$  nin bileşenleri denir. 3-PGK ların  $1, e_1, e_2, e_3$  baz vektörleri aşağıdaki çarpım tablosunu sağlar:

Tablo 3.1 3-PGK çarpım tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$-\lambda_1\lambda_2$	$\lambda_1e_3$	$-\lambda_2e_2$
$e_2$	$e_2$	$-\lambda_1e_3$	$-\lambda_1\lambda_3$	$\lambda_3e_1$
$e_3$	$e_3$	$\lambda_2e_2$	$-\lambda_3e_1$	$-\lambda_2\lambda_3$

Bu çarpım tablosuna göre  $1, e_1, e_2, e_3$  elemanları 3-PGK ların kümesi  $\mathbb{K}$  yı gerer. Yani  $\mathbb{K} = Sp\{1, e_1, e_2, e_3\}$  dir. Ayrıca Tablo 3.1, bilinen tüm kuaterniyonları genelleştiren bir çarpım tablosudur. Buna göre bazı özel durum incelemelerini aşağıdaki gibi yapabiliriz.

(i) Eğer  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ ,  $\lambda_3 = \mu$  ise 2-PGK ların cebiri elde edilir (Dickson, 1924):

Tablo 3.2 2-PGK arpım tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$-\lambda$	$e_3$	$-\lambda e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-\mu$	$\mu e_1$
$e_3$	$e_3$	$\lambda e_2$	$-\mu e_1$	$-\lambda \mu$

(ii) Eğer  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$  değerlerini alırsak, bu da bize split-kuaterniyonların cebirini elde ederiz (Cockle, 1853):

Tablo 3.3 Split-kuaterniyon çarpım tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$-1$	$e_3$	$-e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	1	$-e_1$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$e_1$	1

(iii)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$  olsun. Bu durumda Hamilton kuaterniyonların cebirini oluřturmuř oluruz (Hamilton, 1843):

Tablo 3.4 Kuaterniyon arpım Tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$-1$	$e_3$	$-e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-1$	$e_1$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-1$

(iv)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$  alındığında yarı-kuaterniyonların cebiri elde edilir:

Tablo 3.5 Yarı-kuaterniyon çarpım tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	-1	$e_3$	$-e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	0	0
$e_3$	$e_3$	$e_2$	0	0

(v)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$  alındığında split yarı-kuaterniyonların cebiri bulunur:

Tablo 3.6 Split yarı-kuaterniyon çarpım tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	1	$e_3$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	0	0
$e_3$	$e_3$	$-e_2$	0	0

(vi)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  alındığında 1/4-kuaterniyonların cebiri elde edilir:

Tablo 3.7 1/4 kuaterniyon çarpım tablosu

$\cdot$	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	0	$e_3$	0
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	0	0
$e_3$	$e_3$	0	0	0

(Rosenfeld, 1997). Elbette ki  $\lambda_{i \in \{1,2,3\}}$  değerlerine göre çok daha özel kuaterniyon türlerini elde etmek mümkündür.

Herhangi bir 3-PGK olan  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ , skaler ve vektörel kısım olmak üzere iki kısımdan oluşur:

$$p = S_p + V_p$$

Burada

$$S_p = a \text{ ve } V_p = be_1 + ce_2 + de_3 \text{ şeklindedir.}$$

*Tanım 3.1.2*

$p$  herhangi bir 3-PGK olsun. Eğer  $S_p = 0$  ise  $p$  ye 3-parametrelî genelleştirilmiş pürkuaterniyon (3-PGPK) veya 3-parametrelî genelleştirilmiş vektör (3-PGV) denir. Tüm 3-PGV lerin kümesini  $\text{Im}(\mathbb{K})$  ile sembolize edersek

$$\text{Im}(\mathbb{K}) = \{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde yazabiliriz.

### 3.2 3-PGK lar Üzerinde Temel İşlemler

*Eşitlik:*  $p$  ve  $q$  herhangi iki 3-PGK ve  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  olsun. O halde,

$$p = q \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

şeklindedir.

*Toplama:*  $p$  ve  $q$  herhangi iki 3-PGK ve  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  olsun.  $p$  ve  $q$  nun toplamı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} p + q &= S_p + S_q + V_p + V_q \\ &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3. \end{aligned}$$

### Sonuç 3.2.1

$(\mathbb{K}, +)$  bir abel grubudur.

*İspat*

$p, q$  ve  $r$  herhangi üç 3-PGK ve  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ,  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  ve  $r = c_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$  olsun.

(i)  $+$  :  $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  olduğundan, toplama işleminin kapalılık özelliği mevcuttur.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad p + (q + r) &= a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ &\quad + [(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)e_1 + (b_2 + c_2)e_2 + (b_3 + c_3)e_3] \\ &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))e_1 \\ &\quad + (a_2 + (b_2 + c_2))e_2 + (a_3 + (b_3 + c_3))e_3 \\ &= ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)e_1 \\ &\quad + ((a_2 + b_2) + c_2)e_2 + ((a_3 + b_3) + c_3)e_3 \\ &= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3] \\ &\quad + c_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \\ &= (p + q) + r \end{aligned}$$

olup birleşme özelliği vardır.

(iii)  $p + 0 = 0 + p = p$  olacak şekilde  $0 = 0 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$  elemanı toplama işlemine göre birim elemandır.

(iv)  $p + (-p) = (-p) + p = 0$  olacak şekilde  $-p = -a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3$  elemanı  $p$  nin toplama işlemine göre ters elemanıdır.

(v)  $p + q = q + p$  olup toplama işleminin  $\mathbb{K}$  üzerinde değişme özelliği vardır.

*Skaler ile çarpım:*  $\alpha$  bir reel sayı ve  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  3-PGK olsun.

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(\alpha, p) \rightarrow \alpha \odot p =: \alpha p = \alpha a_0 + \alpha a_1 e_1 + \alpha a_2 e_2 + \alpha a_3 e_3$$

işlemine skaler ile çarpım veya dış işlem denir.

$(\mathbb{K}, +)$  abel grubu  $\odot$  dış işlemi ile  $\mathbb{R}$  üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı olur:

(i) Her  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  ve  $\forall p \in \mathbb{K}$  için  $(\alpha_1 + \alpha_2)p = \alpha_1 p + \alpha_2 p$ ,

(ii) Her  $\alpha \in \mathbb{R}$  ve  $\forall p, q \in \mathbb{K}$  için  $\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha q$ ,

(iii) Her  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ve  $\forall p \in \mathbb{K}$  için  $(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p)$ ,

(iv) Her  $p \in \mathbb{K}$  için  $1.p = p$  dir.

*Çarpma:*  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  iki 3-PGK un çarpımı

$$\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(p, q) \rightarrow p \times q = pq$$

olmak üzere  $p$  ve  $q$ , Tablo 3.1 e göre çarpılır ise

$$\begin{aligned} pq &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)(b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (a_0b_0 - \lambda_1\lambda_2a_1b_1 - \lambda_1\lambda_3a_2b_2 - \lambda_2\lambda_3a_3b_3) \\ &\quad + e_1(a_0b_1 + b_0a_1 + \lambda_3(a_2b_3 - a_3b_2)) \\ &\quad + e_2(a_0b_2 + b_0a_2 + \lambda_2(a_3b_1 - a_1b_3)) \\ &\quad + e_3(a_0b_3 + a_3b_0 + \lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1)) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

şeklinde elde edilir. Bu çarpımı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} pq &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)(b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ &= (S_p + V_p)(S_q + V_q) \\ &= S_p S_q + S_p V_q + S_q V_p + V_p V_q \\ &= S_p S_q - f(V_p, V_q) + S_p V_p + S_q V_q + V_p \bar{\wedge} V_q, \end{aligned}$$

burada

$$f : \text{Im}(\mathbb{K}) \times \text{Im}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(V_p, V_q) \rightarrow f(V_p, V_q) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1 + \lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3$$

ve

$$\bar{\wedge} : \text{Im}(\mathbb{K}) \times \text{Im}(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Im}(\mathbb{K})$$
$$(V_p, V_q) \rightarrow V_p \bar{\wedge} V_q = \begin{vmatrix} \lambda_3 e_1 & \lambda_2 e_2 & \lambda_1 e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1$$
$$+ \lambda_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + \lambda_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3.$$

şeklindedir.

$$p = V_p = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \text{ ve } q = V_q = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$$

olmak üzere iki 3-PGV ün çarpımı

$$\times : \text{Im}(\mathbb{K}) \times \text{Im}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$
$$(V_p, V_q) \rightarrow V_p \times V_q =: V_p V_q = -f(V_p, V_q) + V_p \bar{\wedge} V_q$$

şeklinde bulunur. Burada iki özel durumdan söz edebiliriz:

- (i)  $V_p$  ile  $V_q$  birbirine dik ise,  $V_p V_q = V_p \bar{\wedge} V_q$ ,
- (ii)  $V_p$  ile  $V_q$  birbirine paralel ise,  $V_p V_q = -f(V_p, V_q)$  dir.

Genel olarak çarpma işlemi değişmeli değildir. Yani  $pq \neq qp$  dir.

*Teorem 3.2.2*

$p, q, r$  3-PGPK olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- (i)  $p \bar{\wedge} (q \bar{\wedge} r) = f(p, r) q - f(p, q) r$ ,
- (ii)  $(p \bar{\wedge} q) \bar{\wedge} r = f(p, r) q - f(q, r) p$ .

*İspat*

(i)  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ,  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ ,  $r = c_0 + c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$  olsun.

$$\begin{aligned} p\bar{\wedge}(q\bar{\wedge}r) &= p\bar{\wedge}[\lambda_3(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + \lambda_2(a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + \lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1)e_3] \\ &= e_1[a_2(b_1c_2 - b_2c_1)\lambda_1\lambda_3 + a_3(b_1c_3 - b_3c_1)\lambda_2\lambda_3] \\ &\quad + e_2[a_1(b_2c_1 - b_1c_2)\lambda_1\lambda_2 + a_3(b_2c_3 - b_3c_2)\lambda_2\lambda_3] \\ &\quad + e_3[a_1(b_3c_1 - b_1c_3)\lambda_1\lambda_2 + a_2(b_3c_2 - b_2c_3)\lambda_1\lambda_3] \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

şeklinde elde edilirken diğer yandan

$$\begin{aligned} f(p, r)q - f(p, q)r &= (\lambda_1\lambda_2a_1c_1 + \lambda_1\lambda_3a_2c_2 + \lambda_2\lambda_3a_3c_3)q \\ &\quad - (\lambda_1\lambda_2a_1b_1 + \lambda_1\lambda_3a_2b_2 + \lambda_2\lambda_3a_3b_3)r \\ &= e_1(\lambda_1\lambda_2a_1b_1c_1 + \lambda_1\lambda_3a_2b_1c_2 + \lambda_2\lambda_3a_3b_1c_3) \\ &\quad + e_2(\lambda_1\lambda_2a_1b_2c_1 + \lambda_1\lambda_3a_2b_2c_2 + \lambda_2\lambda_3a_3b_2c_3) \\ &\quad + e_3(\lambda_1\lambda_2a_1b_3c_1 + \lambda_1\lambda_3a_2b_3c_2 + \lambda_2\lambda_3a_3b_3c_3) \\ &\quad - e_1(\lambda_1\lambda_2a_1b_1c_1 + \lambda_1\lambda_3a_2b_2c_1 + \lambda_2\lambda_3a_3b_3c_1) \\ &\quad - e_2(\lambda_1\lambda_2a_1b_1c_2 + \lambda_1\lambda_3a_2b_2c_2 + \lambda_2\lambda_3a_3b_3c_2) \\ &\quad - e_3(\lambda_1\lambda_2a_1b_1c_3 + \lambda_1\lambda_3a_2b_2c_3 + \lambda_2\lambda_3a_3b_3c_3) \\ &= e_1[a_2(b_1c_2 - b_2c_1)\lambda_1\lambda_3 + a_3(b_1c_3 - b_3c_1)\lambda_2\lambda_3] \\ &\quad + e_2[a_1(b_2c_1 - b_1c_2)\lambda_1\lambda_2 + a_3(b_2c_3 - b_3c_2)\lambda_2\lambda_3] \\ &\quad + e_3[a_1(b_3c_1 - b_1c_3)\lambda_1\lambda_2 + a_2(b_3c_2 - b_2c_3)\lambda_1\lambda_3] \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde edilir. (3.2.2) ve (3.2.3) eşitliklerinden istenilen elde edilir.

(ii) nin ispatı (i) ye benzer şekilde yapılabilir.  $\square$

*Sonuç 3.2.3*

$p, q$  iki 3-PGV olsun.

$$S(pq) = -f(p, q)$$

dur.

*İspat*

$p = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $q = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  ise

$$\begin{aligned} S(pq) &= -\lambda_1\lambda_2a_1b_1 - \lambda_1\lambda_3a_2b_2 - \lambda_2\lambda_3a_3b_3 \\ &= -f(p, q). \square \end{aligned}$$

**Sonuç 3.2.4**

$\{\mathbb{K}, +, \times\}$  birimli halkadır.

*İspat*

$\{\mathbb{K}, +\}$  nın abel grubu olduğunu biliyoruz. Birimli halka olması için sağlaması gereken diğer özellikleri gösterelim.

(i) Her  $p, q, r \in \mathbb{K}$  için  $(pq)r = p(qr)$  dir:

$$\begin{aligned} p(qr) &= (S_p + V_p)(S_{qr} + V_{qr}) \\ &= S_pS_qS_r - \{S_p f(V_q, V_r) + S_q f(V_r, V_p) + S_r f(V_p, V_q)\} \\ &\quad + \{S_pS_rV_q + S_rS_qV_p + S_qS_pV_r\} \\ &\quad + \{S_pV_q\bar{\wedge}V_r - S_qV_r\bar{\wedge}V_p + S_rV_p\bar{\wedge}V_q\} \\ &\quad - f(V_q, V_r)V_p + V_p\bar{\wedge}(V_q\bar{\wedge}V_r) - f(V_p, V_q\bar{\wedge}V_r) \\ (pq)r &= (S_{pq} + V_{pq})(S_r + V_r) \\ &= S_pS_qS_r - \{S_r f(V_p, V_q) + S_q f(V_r, V_p) + S_p f(V_q, V_r)\} \\ &\quad + \{S_pS_qV_r + S_rS_pV_q + S_qS_rV_p\} \\ &\quad + \{S_pV_q\bar{\wedge}V_r + S_qV_p\bar{\wedge}V_r + S_rV_p\bar{\wedge}V_q\} \\ &\quad - f(V_p, V_q)V_r + (V_p\bar{\wedge}V_q)\bar{\wedge}V_r - f(V_p\bar{\wedge}V_q, V_r) \end{aligned}$$

bulunur.  $(pq)r = p(qr)$  olduğunu göstermek için;

$$-f(V_q, V_r)V_p + V_p\bar{\wedge}(V_q\bar{\wedge}V_r) = -f(V_p, V_q)V_r + (V_p\bar{\wedge}V_q)\bar{\wedge}V_r \quad (3.2.4)$$

eşitliğini göstermeliyiz. Teorem 3.2.2 (i) den,

$$V_p\bar{\wedge}(V_q\bar{\wedge}V_r) = f(V_p, V_r)V_q - f(V_p, V_q)V_r$$

yazılabilir. Bu eşitliği (3.2.4) eşitliğinin sol tarafında yerine yazarsak,

$$-f(V_q, V_r)V_p + f(V_p, V_r)V_q - f(V_p, V_q)V_r \quad (3.2.5)$$

bulunur. Teorem 3.2.2 (i) yeniden kullanılarak

$$(V_p\bar{\wedge}V_q)\bar{\wedge}V_r = f(V_p, V_r)V_q - f(V_q, V_r)V_p$$

bulunur ve bunu da (3.2.4) denkleminin sağ tarafında yerine yazarsak,

$$-f(V_p, V_q)V_r + f(V_p, V_r)V_q - f(V_q, V_r)V_p \quad (3.2.6)$$

olarak elde edilir. (3.2.5) ve (3.2.6) dan istenen elde edilir. Birleşme özelliği vardır.

(ii) Her  $p, q, r \in \mathbb{K}$  için

$$\begin{aligned} p(q+r) &= (S_p + V_p)(S_q + S_r + V_q + V_r) \\ &= S_pS_q + S_pS_r + S_p(V_q + V_r) + S_qV_p + S_rV_p + V_pV_q + V_pV_r \\ &= S_pS_q + S_pV_q + S_qV_p - f(V_p, V_q) + V_p\bar{\wedge}V_q \\ &\quad + S_pS_r + S_pV_r + S_rV_p - f(V_p, V_r) + V_p\bar{\wedge}V_r \\ &= pq + pr \end{aligned}$$

olup, toplamaya göre çarpmanın soldan dağılma özelliği vardır. Benzer şekilde  $(p + q)r = pr + qr$  olduğu da gösterilebilir. Buna göre  $\times$  işlemi  $+$  üzerine sağdan ve soldan dağılmalıdır.

(iii) Her  $p \in \mathbb{K}$  için  $p.1 = 1.p = p$  olacak şekilde  $1 = 1 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$ ,  $\times$  işlemine göre  $\mathbb{K}$  nin birim elemanıdır.

### Sonuç 3.2.5

Her  $p, q \in \mathbb{K}$  için  $pq = qp$  olmadığından  $\{\mathbb{K}, +, \times\}$  bir değişmeli halka değildir.

$\{\mathbb{K}, +, \times\}$ , bir tamlık bölgesi değildir.

$\{\mathbb{K}, +, \times\}$ , bir cisim değildir.

$\{\mathbb{K}, +, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$  yedilisi değişmeli olmayan bir cebirdir. Bu cebire 3-PGK cebiri denir.

### Tanım 3.2.6

$p$  herhangi bir 3-PGK olsun.  $p$  nin eşleniği

$$C : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$p \rightarrow C(p) =: \bar{p} = S_p - V_p$$

şeklinde tanımlanır.  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ise,  $\bar{p} = a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3$  dir.

### Teorem 3.2.7

(i) Her  $p, q$  3-PGK ları ve her  $c_1, c_2$  reel sayıları için  $\overline{c_1p + c_2q} = \overline{c_1p} + \overline{c_2q}$ ,

(ii) Her  $p, q$  3-PGK ları için  $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$ ,

(iii) Her  $p$  3-PGK u için  $\overline{\bar{p}} = p$  dir.

### İspat

$p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ ,  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  ve  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  olsun.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \overline{c_1 p + c_2 q} &= \overline{c_1(a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) + c_2(b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)} \\
&= (c_1 a_0 + c_2 b_0) - (c_1 a_1 + c_2 b_1) e_1 - (c_1 a_2 + c_2 b_2) e_2 \\
&\quad - (c_1 a_3 + c_2 b_3) e_3 \\
&= c_1(a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3) + c_2(b_0 - b_1 e_1 - b_2 e_2 - b_3 e_3) \\
&= \overline{c_1 p} + \overline{c_2 q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \overline{p q} &= (a_0 b_0 - \lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1 - \lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3) \\
&\quad - e_1(a_0 b_1 + b_0 a_1 + \lambda_3(a_2 b_3 - a_3 b_2)) \\
&\quad - e_2(a_0 b_2 + b_0 a_2 + \lambda_2(a_3 b_1 - a_1 b_3)) \\
&\quad - e_3(a_0 b_3 + a_3 b_0 + \lambda_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)) \\
&= (b_0 - b_1 e_1 - b_2 e_2 - b_3 e_3)(a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3) \\
&= \overline{q p}
\end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \quad \overline{\overline{p}} = \overline{a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3} = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = p. \quad \square$$

*Teorem 3.2.8*

Herhangi iki  $p, q$  3-PGV ü için

$$p \overline{\wedge} q = \frac{q \overline{p} - p \overline{q}}{2}$$

kuralı geçerlidir.

*İspat*

$p = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  ve  $q = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$  olsun.

$$\begin{aligned}
p \overline{\wedge} q &= \begin{vmatrix} \lambda_3 e_1 & \lambda_2 e_2 & \lambda_1 e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \lambda_3(a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + \lambda_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + \lambda_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \\
&= \frac{1}{2}(q \overline{p} - p \overline{q}). \quad \square
\end{aligned}$$

*Tanım 3.2.9*

$$N : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$p \rightarrow N(p) =: N_p = p\bar{p} = \bar{p}p$$

şeklinde tanımlanan  $N$  fonksiyonuna  $\mathbb{K}$  üzerinde norm işlemi denir.  $p$  3-PGK unun normu

$$N_p = p\bar{p} = a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2 = S_pS_p + f(V_p, V_p)$$

ile hesaplanır.

*Tanım 3.2.10*

$p \in \mathbb{K}$  olsun. Eğer  $N_p = 1$  ise  $p$  ye 3-parametrelili genelleştirilmiş birim kuarterniyon (3-PGBK) denir. 3-PGBK ların kümesini  $S_{\mathbb{K}}$  ile temsil edip,

$$S_{\mathbb{K}} = \{p \in \mathbb{K} : N_p = 1\}$$

şeklinde ifade ederiz. Ayrıca normu bire eşit olan 3-parametrelili genelleştirilmiş vektöre 3-parametrelili genelleştirilmiş birim vektör (3-PGBV) denir ve bunların kümesi de

$$S_{\mathbb{K}}^2 = \{h \in \text{Im}(\mathbb{K}) : N_h = 1\}$$

şeklinde ifade edilir.

*Teorem 3.2.11*

$\mathbb{K}$  daki her  $p, q$  ve  $\mathbb{R}$  deki her  $c$  için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

- (i)  $N_pN_q = N_{pq}$
- (ii)  $N_{cp} = c^2N_p$ .

*İspat*

(i)  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  olsun. Norm tanımından,

$$\begin{aligned}
N_p N_q &= (a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2) (b_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 b_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 b_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 b_3^2) \\
&= (a_0 b_0)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1)^2 + (\lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3)^2 \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2 [(a_0 b_1)^2 + (a_1 b_0)^2] + \lambda_1 \lambda_3 [(a_0 b_2)^2 + (a_2 b_0)^2] \\
&\quad + \lambda_2 \lambda_3 [(a_0 b_3)^2 + (a_3 b_0)^2] + \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 [(a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2] \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 [(a_1 b_3)^2 + (a_3 b_1)^2] + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 [(a_2 b_3)^2 + (a_3 b_2)^2] \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan  $pq$  çarpımının sonucunu (3.2.1) den biliyoruz. Buna göre  $pq$  nun normu,

$$\begin{aligned}
N_{pq} &= (a_0 b_0)^2 + (\lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1)^2 + (\lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3)^2 \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2 [(a_0 b_1)^2 + (a_1 b_0)^2] + \lambda_1 \lambda_3 [(a_0 b_2)^2 + (a_2 b_0)^2] \\
&\quad + \lambda_2 \lambda_3 [(a_0 b_3)^2 + (a_3 b_0)^2] + \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 [(a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2] \\
&\quad + \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 [(a_1 b_3)^2 + (a_3 b_1)^2] + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 [(a_2 b_3)^2 + (a_3 b_2)^2] \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.2.7) ve (3.2.8) in eşit olduğu görülür.

(ii) Herhangi bir  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \mathbb{K}$  ve herhangi bir  $c \in \mathbb{R}$  alalım.

$$\begin{aligned}
N_{cp} &= N(ca_0 + ca_1e_1 + ca_2e_2 + ca_3e_3) \\
&= (ca_0)^2 + \lambda_1 \lambda_2 (ca_1)^2 + \lambda_1 \lambda_3 (ca_2)^2 + \lambda_2 \lambda_3 (ca_3)^2 \\
&= c^2 (a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2) \\
&= c^2 N(p). \quad \square
\end{aligned}$$

**Tanım 3.2.12**

$$\begin{aligned}
I : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R} \\
p &\rightarrow I(p) =: p^{-1} = \frac{\bar{p}}{N_p}, \quad N_p \neq 0.
\end{aligned}$$

fonksiyonuna  $\mathbb{K}$  da çarpımsal ters işlemi denir.  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ , normu sıfırdan farklı bir 3-PGK olsun.  $p$  nin çarpımsal tersi

$$p^{-1} = \frac{\bar{p}}{N_p} = \frac{a_0 - a_1e_1 - a_2e_2 - a_3e_3}{a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2}.$$

*Teorem 3.2.13*

Sıfırdan farklı herhangi  $p$  ve  $q$  3-PGK ları ve sıfırdan farklı herhangi bir  $c$  reel sayısı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$(i) \quad (pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1},$$

$$(ii) \quad (cp)^{-1} = \frac{1}{c}p^{-1}.$$

*İspat*

$$(i) \quad (pq)^{-1} = \frac{\overline{pq}}{N_{pq}} = \frac{\overline{qp}}{N_p N_q} = \frac{\bar{q}}{N_q} \frac{\bar{p}}{N_p} = q^{-1}p^{-1}$$

$$(ii) \quad (cp)^{-1} = \frac{\overline{cp}}{N_{cp}} = \frac{c\bar{p}}{c^2 N_p} = \frac{1}{c}p^{-1}. \square$$

*Bölme:*  $q \neq 0$  olmak üzere  $q$  bir 3-PGK olsun. Bir  $p$  3-PGK unu  $q$  ile bölmek için  $p$  yi  $q^{-1}$  ile çarpmak gerekir. Fakat 3-PGK çarpımı değişmeli olmadığından bu çarpma işlemi hem sağdan hem de soldan yapılmalıdır.

$$r_1 = pq^{-1} \text{ ve } r_2 = q^{-1}p$$

burada  $r_1$  3-PGK una  $p$  nin  $q$  ile sağdan bölümü,  $r_2$  3-PGK una  $p$  nin  $q$  ile soldan bölümü denir. Genellikle  $r_1 \neq r_2$  dir.  $\frac{p}{q}$  notasyonu kullanılamaz.

*Tanım 3.2.14*

$p = S_p + V_p$  ve  $q = S_q + V_q$  3-PGK lar olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\rightarrow \langle p, q \rangle = S_p S_q + f(V_p, V_q) \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

şeklinde tanımlanan çarpıma, iki 3-PGK un iç çarpımı denir. Ayrıca

$p = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  ve  $q = b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$  olmak üzere,

$$\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + \lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1 + \lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3 = S(p\bar{q})$$

şeklindedir.

*Lemma 3.2.15*

$\mathbb{K}$  daki metrikte, her  $p, q$  için  $S(p\bar{q}) = S(\bar{q}p)$  dir.

*İspat*

$p = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  ve  $q = b_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \in \mathbb{K}$  için

$$\begin{aligned} p\bar{q} &= (a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3)(b_0 - b_1 e_1 - b_2 e_2 - b_3 e_3) \\ &= (a_0 b_0 + \lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1 + \lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3) \\ &\quad + e_1 (-a_0 b_1 + b_0 a_1 + \lambda_3 (-a_2 b_3 + a_3 b_2)) \\ &\quad + e_2 (-a_0 b_2 + b_0 a_2 + \lambda_2 (-a_3 b_1 + a_1 b_3)) \\ &\quad + e_3 (-a_0 b_3 + a_3 b_0 + \lambda_1 (-a_1 b_2 + a_2 b_1)) \end{aligned}$$

olduğundan  $S(p\bar{q}) = \langle p, q \rangle$  olduğu görülmektedir. Ayrıca

$$\langle q, p \rangle = b_0 a_0 + \lambda_1 \lambda_2 b_1 a_1 + \lambda_1 \lambda_3 b_2 a_2 + \lambda_2 \lambda_3 b_3 a_3 = S(\bar{q}p) \tag{3.2.10}$$

olacağından ispatın varlığı (3.2.9) ve (3.2.10) dan aşikardır.  $\square$

### *Teorem 3.2.16*

$\mathbb{K}$  daki metrikte herhangi  $p, q, r, s$  3-PGK ları için aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i)  $\langle rp, rq \rangle = N_r \langle p, q \rangle$ ,
- (ii)  $\langle pr, qr \rangle = N_r \langle p, q \rangle$ ,
- (iii)  $\langle pq, r \rangle = N_r \langle q, \bar{p}r \rangle$ ,
- (iv)  $\langle pq, r \rangle = N_r \langle p, r\bar{q} \rangle$ .

### *İspat*

Lemma 3.2.15 ve (3.2.9) u kullanarak ispatı yapalım.

- (i)  $\langle rp, rq \rangle = S(rp\bar{r}\bar{q}) = S(rp\bar{q}\bar{r}) = S(\bar{q}\bar{r}rp) = N_r S(\bar{q}p) = N_r S(p\bar{q}) = N_r \langle p, q \rangle$ ,
- (ii)  $\langle pr, qr \rangle = S(pr\bar{q}\bar{r}) = S(pr\bar{r}\bar{q}) = N_r S(p\bar{q}) = N_r \langle p, q \rangle$ ,
- (iii)  $\langle pq, r \rangle = S(pq\bar{r}) = S(q\bar{r}p) = S(\bar{q}\bar{p}\bar{r}) = N_r f(q, \bar{p}r)$ ,
- (iv)  $\langle pq, r \rangle = S(pq\bar{r}) = S(\bar{p}\bar{r}\bar{q}) = N_r \langle p, r\bar{q} \rangle$ .  $\square$

### *Örnek 3.2.17*

$p = 5 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$  ve  $q = -2 - 5e_1 + 12e_2 + e_3$  olmak üzere aşağıdakileri bulunuz.

- (i)  $p + q$                       (ii)  $p - q$                       (iii)  $4p$                       (iv)  $\bar{q}$                       (v)  $pq$
- (vi)  $qp$                       (vii)  $pq - qp$                       (viii)  $N_p$                       (ix)  $q^{-1}$                       (x)  $pq^{-1}$
- (xi)  $q^{-1}p$                       (xii)  $pq^{-1} - q^{-1}p$

### *Çözüm*

- (i)  $p + q = 3 - 3e_1 + 15e_2 + 5e_3$

$$(ii) \quad p - q = 7 + 7e_1 - 9e_2 + 3e_3$$

$$(iii) \quad 4p = 20 + 8e_1 + 12e_2 + 16e_3$$

$$(iv) \quad \bar{q} = -2 + 5e_1 - 12e_2 - e_3$$

$$(v) \quad pq = (5 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3)(-2 - 5e_1 + 12e_2 + e_3)$$

$$= -10 + 10\lambda_1\lambda_2 - 36\lambda_1\lambda_3 - 4\lambda_2\lambda_3 + e_1(-29 - 45\lambda_3)$$

$$+ e_2(54 - 22\lambda_2) + e_3(-3 + 39\lambda_1)$$

$$(vi) \quad qp = (-2 - 5e_1 + 12e_2 + e_3)(5 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3)$$

$$= -10 + 10\lambda_1\lambda_2 - 36\lambda_1\lambda_3 - 4\lambda_2\lambda_3 + e_1(-29 + 45\lambda_3)$$

$$+ e_2(54 + 22\lambda_2) + e_3(-3 - 39\lambda_1)$$

$$(vii) \quad pq - qp = -90\lambda_3e_1 - 44\lambda_2e_2 + 78\lambda_1e_3$$

$$(viii) \quad N_p = (5 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3)(5 - 2e_1 - 3e_2 - 4e_3)$$

$$= 25 + 4\lambda_1\lambda_2 + 9\lambda_1\lambda_3 + 16\lambda_2\lambda_3$$

$$(ix) \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q} = \frac{-2 + 5e_1 - 12e_2 - e_3}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}$$

$$(x) \quad pq^{-1} = (5 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3) \frac{-2 + 5e_1 - 12e_2 - e_3}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}$$

$$= \frac{-10 - 10\lambda_1\lambda_2 + 36\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}$$

$$+ \frac{e_1(21 + 45\lambda_3) + e_2(66 + 22\lambda_2) + e_3(-13 - 39\lambda_1)}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}$$

$$\begin{aligned}
\text{(xi)} \quad q^{-1}p &= \frac{-2 + 5e_1 - 12e_2 - e_3}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3} (5 + 2e_1 + 3e_2 + 4e_3) \\
&= \frac{-10 - 10\lambda_1\lambda_2 + 36\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3} \\
&\quad + \frac{e_1(21 - 45\lambda_3) + e_2(66 - 22\lambda_2) + e_3(-13 + 39\lambda_1)}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}
\end{aligned}$$

$$\text{(xii)} \quad pq^{-1} - q^{-1}p = \frac{-78\lambda_1 + 44\lambda_2 + 90\lambda_3}{4 + 25\lambda_1\lambda_2 + 144\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}$$

## 4. 3-PGK LARLA İLİŞKİLİ MATRİSLER VE HAMILTON OPERATÖRLERİ

Kuaterniyonları, matrislerden bağımsız olarak düşünemeyiz. Reel, split ve 2-PGK lar, matrislerle de ifade edilmiş olup, üzerinde çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Agrawal (1987) ve Jafari vd. (2013) dual kuaterniyonlar için, Jafari ve Yaylı (2010, 2015) genelleştirilmiş kuaterniyonlar için Hamilton operatörleri ve bazı cebirsel özelliklerini vermiştir. Kula (2003) verdiği doktora tezinde split kuaterniyonlar için matris temsilleri ve Hamilton operatörleri üzerinde çalışmıştır. Ölmez (2006) ise 2-PGK lar için Hamilton matrisleri ve özelliklerini derlemiştir. Biz de bu bölümde 3-PGK ları matrislerle ilişkilendireceğiz.

### 4.1 Hamilton Operatörleri ve Özellikleri

Hamilton matrislerinin elde edilebilmesi adına bir 3-PGK  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_p : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ q &\rightarrow \overset{+}{h}_p(q) = pq \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüme karşılık gelen matrisi bulmak için  $q$  yerine  $1, e_1, e_2, e_3$  baz elemanları yazılıp sol taraftan  $p$  ile ayrı ayrı çarpılırsa

$$\begin{aligned} \overset{+}{h}_p(1) &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) 1 = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ \overset{+}{h}_p(e_1) &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) e_1 = a_0e_1 + a_1e_1^2 + a_2e_2e_1 + a_3e_3e_1 \\ &= -\lambda_1\lambda_2a_1 + a_0e_1 + \lambda_2a_3e_2 - \lambda_1a_2e_3 \\ \overset{+}{h}_p(e_2) &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) e_2 = a_0e_2 + a_1e_1e_2 + a_2e_2^2 + a_3e_3e_2 \\ &= -\lambda_1\lambda_3a_2 - \lambda_3a_3e_1 + a_0e_2 + \lambda_1a_1e_3 \\ \overset{+}{h}_p(e_3) &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) e_3 = a_0e_3 + a_1e_1e_3 + a_2e_2e_3 + a_3e_3^2 \\ &= -\lambda_2\lambda_3a_3 + \lambda_3a_2e_1 - \lambda_2a_1e_2 + a_0e_3 \end{aligned}$$

bulunur. Burada her bir satırdaki denklemlerin sağ taraflarındaki terimlerin baz eleman-

larına göre katsayıları oluşturacağımız Hamilton matrisinin sütunlarını oluşturmaktadır. Buna göre Hamilton matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bar{H}^+(p) = \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3a_3 & \lambda_3a_2 \\ a_2 & \lambda_2a_3 & a_0 & -\lambda_2a_1 \\ a_3 & -\lambda_1a_2 & \lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

Şimdi de diğer bir Hamilton matrisini oluşturabilmek adına  $p$  3-PGK u için

$$\begin{aligned} \bar{h}_p : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ q &\rightarrow \bar{h}_p(q) = qp \end{aligned}$$

lineer dönüşümünü göz önüne alalım. Bu dönüşüme karşılık gelen matrisi bulmak için  $q$  yerine  $1, e_1, e_2, e_3$  baz elemanları yazılıp  $p$  ile sağ taraftan ayrı ayrı çarpılırsa

$$\begin{aligned} \bar{h}_p(1) &= 1(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ \bar{h}_p(e_1) &= e_1(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_0e_1 + a_1e_1^2 + a_2e_1e_2 + a_3e_1e_3 \\ &= -\lambda_1\lambda_2a_1 + a_0e_1 - \lambda_2a_3e_2 + \lambda_1a_2e_3 \\ \bar{h}_p(e_2) &= e_2(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_0e_2 + a_1e_2e_1 + a_2e_2^2 + a_3e_2e_3 \\ &= -\lambda_1\lambda_3a_2 + \lambda_3a_3e_1 + a_0e_2 - \lambda_1a_1e_3 \\ \bar{h}_p(e_3) &= e_3(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) = a_0e_3 + a_1e_3e_1 + a_2e_3e_2 + a_3e_3^2 \\ &= -\lambda_2\lambda_3a_3 - \lambda_3a_2e_1 + \lambda_2a_1e_2 + a_0e_3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da yukarıdakine benzer yolla elde edilecek matris

$$\bar{H}^-(p) = \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & \lambda_3a_3 & -\lambda_3a_2 \\ a_2 & -\lambda_2a_3 & a_0 & \lambda_2a_1 \\ a_3 & \lambda_1a_2 & -\lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

olur.

Buna göre  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  3-PGK unu,  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  3-PGK u ile çarpmak demek,  $p$  ye karşılık gelen Hamilton matrisi ile  $q$  vektörünü çarpmak demektir. Yani,

$$\begin{aligned}
{}^+H(p)q &= \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3a_3 & \lambda_3a_2 \\ a_2 & \lambda_2a_3 & a_0 & -\lambda_2a_1 \\ a_3 & -\lambda_1a_2 & \lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1e_1 \\ b_2e_2 \\ b_3e_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_0b_0 - \lambda_1\lambda_2a_1b_1 - \lambda_1\lambda_3a_2b_2 - \lambda_2\lambda_3a_3b_3 \\ a_0b_1 + a_1b_0 + \lambda_3(a_2b_3 - a_3b_2) \\ a_0b_2 + a_2b_0 + \lambda_2(a_3b_1 - a_1b_3) \\ a_0b_3 + b_0a_3 + \lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1) \end{bmatrix} \tag{4.1.3}
\end{aligned}$$

şeklinde veya

$$\begin{aligned}
{}^-H(q)p &= \begin{bmatrix} b_0 & -\lambda_1\lambda_2b_1 & -\lambda_1\lambda_3b_2 & -\lambda_2\lambda_3b_3 \\ b_1 & b_0 & \lambda_3b_3 & -\lambda_3b_2 \\ b_2 & -\lambda_2b_3 & b_0 & \lambda_2b_1 \\ b_3 & \lambda_1b_2 & -\lambda_1b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_0b_0 - \lambda_1\lambda_2a_1b_1 - \lambda_1\lambda_3a_2b_2 - \lambda_2\lambda_3a_3b_3 \\ a_0b_1 + a_1b_0 + \lambda_3(a_2b_3 - a_3b_2) \\ a_0b_2 + a_2b_0 + \lambda_2(a_3b_1 - a_1b_3) \\ a_0b_3 + b_0a_3 + \lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1) \end{bmatrix} \tag{4.1.4}
\end{aligned}$$

olarak elde edilebilir ki bu ise (4.1.3) ve (4.1.4) sonuçlarının aynı olduğunu gösterir. (4.1.3) ve (4.1.4) teki sütunlar sırasıyla  $\{1, e_1, e_2, e_3\}$  baz elemanlarının reel kat-sayılarıdır ki (3.2.1) deki çarpım kuralı matrisler yoluyla elde edilmiş oldu.

*Teorem 4.1.1*

$\mathbb{K}$  halkası  $M_4(\mathbb{R})$  halkasının bir alt halkasına izomorftur.

*İspat*

$\phi : (\mathbb{K}, +, \times) \rightarrow (M_4(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$  dönüşümünü,

$$\phi(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3a_3 & \lambda_3a_2 \\ a_2 & \lambda_2a_3 & a_0 & -\lambda_2a_1 \\ a_3 & -\lambda_1a_2 & \lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. (Burada  $\oplus$  matris toplamasını,  $\otimes$  matris çarpımını ifade etmektedir.) Bu dönüşümün bir halka izomorfizması olduğunu göstereceğiz. Herhangi  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $q = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$  3-PGK ları için

$$\begin{aligned} \phi(p+q) &= \phi(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3) \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + b_0 & -\lambda_1\lambda_2(a_1 + b_1) & -\lambda_1\lambda_3(a_2 + b_2) & -\lambda_2\lambda_3(a_3 + b_3) \\ a_1 + b_1 & a_0 + b_0 & -\lambda_3(a_3 + b_3) & \lambda_3(a_2 + b_2) \\ a_2 + b_2 & \lambda_2(a_3 + b_3) & a_0 + b_0 & -\lambda_2(a_1 + b_1) \\ a_3 + b_3 & -\lambda_1(a_2 + b_2) & \lambda_1(a_1 + b_1) & a_0 + b_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3a_3 & \lambda_3a_2 \\ a_2 & \lambda_2a_3 & a_0 & -\lambda_2a_1 \\ a_3 & -\lambda_1a_2 & \lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_0 & -\lambda_1\lambda_2b_1 & -\lambda_1\lambda_3b_2 & -\lambda_2\lambda_3b_3 \\ b_1 & b_0 & -\lambda_3b_3 & \lambda_3b_2 \\ b_2 & \lambda_2b_3 & b_0 & -\lambda_2b_1 \\ b_3 & -\lambda_1b_2 & \lambda_1b_1 & b_0 \end{bmatrix} \\ &= \phi(p) \oplus \phi(q) \end{aligned}$$

bulunur. Denklem (3.2.1) de  $pq$  nun eşiti  $\phi(pq)$  da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \phi(pq) &= \phi\{(a_0b_0 - \lambda_1\lambda_2a_1b_1 - \lambda_1\lambda_3a_2b_2 - \lambda_2\lambda_3a_3b_3) \\ &\quad + (a_0b_1 + b_0a_1 + \lambda_3(a_2b_3 - a_3b_2))e_1 \\ &\quad + (a_0b_2 + b_0a_2 + \lambda_2(a_3b_1 - a_1b_3))e_2 \\ &\quad + (a_0b_3 + a_3b_0 + \lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1))e_3\} \end{aligned}$$

dir. Ancak sadelik için

$$A = a_0b_0 - \lambda_1\lambda_2a_1b_1 - \lambda_1\lambda_3a_2b_2 - \lambda_2\lambda_3a_3b_3$$

$$B = a_0b_1 + b_0a_1 + \lambda_3(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$C = a_0b_2 + b_0a_2 + \lambda_2(a_3b_1 - a_1b_3)$$

$$D = a_0b_3 + a_3b_0 + \lambda_1(a_1b_2 - a_2b_1)$$

yazarsak

$$\begin{aligned} \phi(pq) &= \phi\{A + Be_1 + Ce_2 + De_3\} \\ &= \begin{bmatrix} A & -\lambda_1\lambda_2B & -\lambda_1\lambda_3C & -\lambda_2\lambda_3D \\ B & A & -\lambda_3D & \lambda_3C \\ C & \lambda_2D & A & -\lambda_2B \\ D & -\lambda_1C & \lambda_1B & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3a_3 & \lambda_3a_2 \\ a_2 & \lambda_2a_3 & a_0 & -\lambda_2a_1 \\ a_3 & -\lambda_1a_2 & \lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_0 & -\lambda_1\lambda_2b_1 & -\lambda_1\lambda_3b_2 & -\lambda_2\lambda_3b_3 \\ b_1 & b_0 & -\lambda_3b_3 & \lambda_3b_2 \\ b_2 & \lambda_2b_3 & b_0 & -\lambda_2b_1 \\ b_3 & -\lambda_1b_2 & \lambda_1b_1 & b_0 \end{bmatrix} \\ &= \phi(p) \otimes \phi(q) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi  $\phi$  nin 1-1 ve örten olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \text{Çek}\phi &= \{p : \phi(p) = 0\} \\ &= \left\{ p : \phi(p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

elde edilir,  $\phi$  1-1 dir.  $\phi$  nin örtenliği

$$\phi(\mathbb{K}) = \{\phi(p) : p \in \mathbb{K}\}$$

olduğundan

$$\phi(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3a_3 & \lambda_3a_2 \\ a_2 & \lambda_2a_3 & a_0 & -\lambda_2a_1 \\ a_3 & -\lambda_1a_2 & \lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde olup

$$\phi : \mathbb{K} \rightarrow \phi(\mathbb{K}) \subset M_4(\mathbb{R})$$

kısıtlamasını alırsak değer kümesini seçimimiz sebebiyle  $\phi$  dönüşümü örtendir. Böylece  $\phi$  bir halka izomorfizmasıdır.  $\square$

Teorem 4.1.1 in ispatını  $\psi : (\mathbb{K}, +, \times) \rightarrow (M_4(\mathbb{R}), \oplus, \otimes)$  dönüşümü yardımıyla da yapabiliriz:

$$\psi(a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 & \lambda_3a_3 & -\lambda_3a_2 \\ a_2 & -\lambda_2a_3 & a_0 & \lambda_2a_1 \\ a_3 & \lambda_1a_2 & -\lambda_1a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde  $\psi$  dönüşümünü tanımladıktan sonra  $\psi$  nin bir halka izomorfizması olduğunu göstermek kolaydır.

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = \mu$  alınırsa 2-PGK lar için,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$  alınırsa split kuaterniyonlar için,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$  alınırsa reel kuaterniyonlar için,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$  alındığında yarı-kuaterniyonlar için,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$  alındığında split yarı-kuaterniyonlar için,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  alındığında 1/4-kuaterniyonlar için Hamilton matrisleri elde edilir.

## 4.2 Hamilton Matrislerinden 3-PGK lar için Çarpım Tablosunun Elde Edilmesi

Bir önceki kısımda 3-PGK ları matrislerle ifade edebileceğimiz Hamilton matrislerini hesapladık.  $\overset{+}{H}(p)$  matrisinden  $e_0, e_1, e_2, e_3$  baz elemanlarını

$$e_0 = 1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_0 = I_4, \quad e_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} = E_1,$$

$$e_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_2, \quad e_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda_2\lambda_3 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_3$$

şeklinde elde ederiz. Burada  $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$  cümlesi  $1, e_1, e_2, e_3$  baz elemanlarına karşılık gelen baz matrislerinin cümlesidir. Buna göre matris çarpma işlemleri ile aşağıdakileri elde ederiz:

$$e_1^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} = -\lambda_1\lambda_2 I_4,$$

$$e_2^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_1\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1\lambda_3 \end{bmatrix} = -\lambda_1\lambda_3 I_4,$$

$$e_3^2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix} = -\lambda_2\lambda_3 I_4$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 e_1 e_2 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 E_3, \\
 e_3 e_1 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\lambda_1 E_3, \\
 e_2 e_3 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_3 E_1, \\
 e_3 e_2 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} = -\lambda_3 E_1, \\
 e_1 e_3 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \lambda_3 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\lambda_2 E_2, \\
 e_3 e_1 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_2 E_2
 \end{aligned}$$

olarak bulunurken,

$$\begin{aligned}
e_1 e_2 e_3 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 I_4, \\
e_2 e_3 e_1 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 I_4, \\
e_3 e_1 e_2 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 I_4, \\
e_1 e_3 e_2 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 I_4, \\
e_2 e_1 e_3 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 I_4, \\
e_3 e_2 e_1 &\leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 I_4
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Öte yandan  $\bar{H}(p)$  matrisinden de  $e_0, e_1, e_2, e_3$  baz elemanlarını

$$e_0 = 1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F_0 = I_4, \quad e_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix} = F_1$$

$$e_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_2, \quad e_3 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda_2\lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_3$$

şeklinde elde ederiz. Burada  $\{F_0, F_1, F_2, F_3\}$ ,  $e_0, e_1, e_2, e_3$  baz elemanlarına karşılık gelen baz matrislerinin kümesidir. Buna göre de matris çarpma işlemleri benzer şekilde,

$$\begin{aligned} e_1^2 &\leftrightarrow -\lambda_1\lambda_2 I_4, & e_2^2 &\leftrightarrow -\lambda_1\lambda_3 I_4, & e_3^2 &\leftrightarrow -\lambda_2\lambda_3 I_4, \\ e_1 e_2 &\leftrightarrow \lambda_1 F_3, & e_2 e_1 &\leftrightarrow -\lambda_1 F_3, & e_2 e_3 &\leftrightarrow \lambda_3 F_1, \\ e_3 e_2 &\leftrightarrow -\lambda_3 F_1, & e_1 e_3 &\leftrightarrow -\lambda_2 F_2, & e_3 e_1 &\leftrightarrow \lambda_2 F_2, \\ e_1 e_2 e_3 &\leftrightarrow -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_4, & e_2 e_3 e_1 &\leftrightarrow -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_4, & e_3 e_1 e_2 &\leftrightarrow -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_4, \\ e_1 e_3 e_2 &\leftrightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_4, & e_2 e_1 e_3 &\leftrightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_4, & e_3 e_2 e_1 &\leftrightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 I_4 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yukarıdaki bilgiler ışığında 3. bölümde ifade ettiğimiz 3-PGK lar için çarpım tablosunu yani Tablo 3.1 i elde ederiz. Şimdi, Hamilton matrisleri ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

*Teorem 4.3.1*

$$(i) \quad \overset{+}{H}(p)\bar{H}(p) = \bar{H}(p)\overset{+}{H}(p) = \left[ \bar{H}(p) \right]^2 = \left[ \overset{+}{H}(p) \right]^2$$

$$(ii) \quad \dot{I}z \left[ \overset{+}{H}(p) \right] = \dot{I}z \left[ \bar{H}(p) \right] = 4a_0$$

$$(iii) \quad p = q \Leftrightarrow \overset{+}{H}(p) = \overset{+}{H}(q) \Leftrightarrow \bar{H}(p) = \bar{H}(q)$$

$$(iv) \quad \overset{+}{H}(p^{-1}) = \left[ \overset{+}{H}(p) \right]^{-1} \quad \text{ve} \quad \bar{H}(p^{-1}) = \left[ \bar{H}(p) \right]^{-1}$$

*İspat*

(i), (ii), ve (iii) ispatı matrisler için elementer işlemler yardımıyla kolaylıkla yapılabilir.

$$(iv) \quad p^{-1} = \frac{\bar{p}}{N_p} = \frac{a_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3}{a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} \text{ olduğundan}$$

$$\overset{+}{H}(p^{-1}) = \frac{1}{a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} \begin{bmatrix} a_0 & \lambda_1 \lambda_2 a_1 & \lambda_1 \lambda_3 a_2 & \lambda_2 \lambda_3 a_3 \\ -a_1 & a_0 & \lambda_3 a_3 & -\lambda_3 a_2 \\ -a_2 & -\lambda_2 a_3 & a_0 & \lambda_2 a_1 \\ -a_3 & \lambda_1 a_2 & -\lambda_1 a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

bulunur ki bu da  $\left[ \overset{+}{H}(p) \right]^{-1}$  matrisine eşittir. Benzer şekilde  $\bar{H}(p^{-1}) = \left[ \bar{H}(p) \right]^{-1}$  eşitliğinin varlığı görülebilir.  $\square$

### 4.3 Hamilton Matrisleri için Determinant, Karakteristik Polinom, Karakteristik Denklemler, Özdeğerler ve Özvektörler

Bu bölümden itibaren daha kısa ifadeler kullanmak için  $\mathcal{M} = \overset{+}{H}(p)$  ve  $\mathcal{N} = \bar{H}(p)$  gösterimlerini kullanacağız.  $\mathcal{M}$  matrisinin determinanı,

$$|\mathcal{M}| = \begin{vmatrix} a_0 & -\lambda_1 \lambda_2 a_1 & -\lambda_1 \lambda_3 a_2 & -\lambda_2 \lambda_3 a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3 a_3 & \lambda_3 a_2 \\ a_2 & \lambda_2 a_3 & a_0 & -\lambda_2 a_1 \\ a_3 & -\lambda_1 a_2 & \lambda_1 a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_1^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 a_1^2 a_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_2^4 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 a_1^2 a_3^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 a_2^2 a_3^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a_0^2 a_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 a_0^2 a_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_3^4 + 2\lambda_2 \lambda_3 a_0^2 a_3^2 + a_0^4 \\
&= (a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2)^2 \\
&= (N_p)^2
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

$\mathcal{M}$  matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{M}}(t) &= \det(\mathcal{M} - tI_4) \\
&= \begin{vmatrix} a_0 - t & -\lambda_1 \lambda_2 a_1 & -\lambda_1 \lambda_3 a_2 & -\lambda_2 \lambda_3 a_3 \\ a_1 & a_0 - t & -\lambda_3 a_3 & \lambda_3 a_2 \\ a_2 & \lambda_2 a_3 & a_0 - t & -\lambda_2 a_1 \\ a_3 & -\lambda_1 a_2 & \lambda_1 a_1 & a_0 - t \end{vmatrix} \\
&= (t^2 - 2ta_0 + a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2)^2
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilirken karakteristik denklemi

$$(t^2 - 2ta_0 + a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2)^2 = 0 \quad (4.2.1)$$

olarak bulunur. Karakteristik denklem çözüldüğünde elde edilen dört adet özdeğer bulunur. Bu özdeğerler ikişer ikişer çakışmıştır:

$$t_{1,2} = a_0 + \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}, \quad t_{3,4} = a_0 - \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}.$$

$t_{1,2}$  ve  $t_{3,4}$  değerleri birbirinin eşleniğidir.

Bu iki farklı özdeğerin çarpımı

$$t_{1,2} t_{3,4} = a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2 = N_p$$

şeklinde  $p$  nin normu olarak bulunur.

Ayrıca  $a_0 + \sqrt{-\lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2}$  özdeğerine karşılık iki tane özvektör vardır:

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 a_2 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} - \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_3}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ \frac{a_3 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} + \lambda_1 a_1 a_2}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 a_3 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} + \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ -\frac{a_2 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} - \lambda_2 a_1 a_3}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$a_0 - \sqrt{-\lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2}$  özdeğerine karşılık olarak da gelen özvektörler ise

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1 a_2 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} + \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_3}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ -\frac{a_3 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} - \lambda_1 a_1 a_2}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_2 a_3 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} - \lambda_1 \lambda_2 a_1 a_2}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ \frac{a_2 \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 a_3^2} + \lambda_2 a_1 a_3}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Benzer işlemler  $\mathcal{N}$  matrisi için de gösterilecek olursa

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}| &= \begin{vmatrix} a_0 & -\lambda_1 \lambda_2 a_1 & -\lambda_1 \lambda_3 a_2 & -\lambda_2 \lambda_3 a_3 \\ a_1 & a_0 & \lambda_3 a_3 & -\lambda_3 a_2 \\ a_2 & -\lambda_2 a_3 & a_0 & \lambda_2 a_1 \\ a_3 & \lambda_1 a_2 & -\lambda_1 a_1 & a_0 \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_1^4 + 2\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 a_1^2 a_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_2^4 + 2\lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 a_1^2 a_3^2 \\ &\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 a_2^2 a_3^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 a_0^2 a_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 a_0^2 a_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_3^4 + 2\lambda_2 \lambda_3 a_0^2 a_3^2 + a_0^4 \\ &= (a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2)^2 \\ &= (N_p)^2 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

$\mathcal{N}$  matrisinin karakteristik polinomu

$$P_{\mathcal{N}}(t) = \det(\mathcal{N} - tI_4)$$

$$P_{\mathcal{N}}(t) = \begin{vmatrix} a_0 - t & -\lambda_1\lambda_2a_1 & -\lambda_1\lambda_3a_2 & -\lambda_2\lambda_3a_3 \\ a_1 & a_0 - t & \lambda_3a_3 & -\lambda_3a_2 \\ a_2 & -\lambda_2a_3 & a_0 - t & \lambda_2a_1 \\ a_3 & \lambda_1a_2 & -\lambda_1a_1 & a_0 - t \end{vmatrix}$$

$$P_{\mathcal{N}}(t) = (t^2 - 2ta_0 + a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2)^2$$

şeklinde elde edilirken karakteristik denklemi

$$(t^2 - 2ta_0 + a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2)^2 = 0 \quad (4.2.2)$$

dır. (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri birbirine eşit olduğundan, özdeğerleri özvektörleri de  $\mathcal{M}$  matrisinininki ile aynı bulunacaktır. Yukarıdaki bilgiler ışığında özel olarak

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = \mu$  için 2-PGK ların,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$  için split kuaterniyonların,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$  için reel kuaterniyonların,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$  alındığında yarı-kuaterniyonların,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$  alındığında split yarı-kuaterniyonlar için,

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  alındığında 1/4-kuaterniyonlar için determinant, özdeğerler, özvektörler, karakteristik denklem ve karakteristik polinom elde edilir.

#### Örnek 4.3.2

$p = 3 - 2e_1 + e_2 - 5e_3$  3-PGK unun,

(i)  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$  Hamilton matrislerini,

(ii)  $\mathcal{M}$  matrisinin determinantını, karakteristik polinomunu, karakteristik denklemini, özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

#### Çözüm

(i) (4.1.1) eşitliğinde  $a_0 = 3, a_1 = -2, a_2 = 1, a_3 = -5$  yazılırsa

$$\mathcal{M}_p = \begin{bmatrix} 3 & 2\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_3 & 5\lambda_2\lambda_3 \\ -2 & 3 & 5\lambda_3 & \lambda_3 \\ 1 & -5\lambda_2 & 3 & 2\lambda_2 \\ -5 & -\lambda_1 & -2\lambda_1 & 3 \end{bmatrix}$$

ve benzer şekilde (4.1.2) eşitliğinde  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -5$  yazıldığında

$$\mathcal{N}_p = \begin{bmatrix} 3 & 2\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_3 & 5\lambda_2\lambda_3 \\ -2 & 3 & -5\lambda_3 & -\lambda_3 \\ 1 & 5\lambda_2 & 3 & -2\lambda_2 \\ -5 & \lambda_1 & 2\lambda_1 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde  $p$  için Hamilton matrisleri elde edilir.

(ii) Şimdi de  $\mathcal{M}_p$  matrisinin determinantını bulalım:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_p| &= \begin{vmatrix} 3 & 2\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_3 & 5\lambda_2\lambda_3 \\ -2 & 3 & 5\lambda_3 & \lambda_3 \\ 1 & -5\lambda_2 & 3 & 2\lambda_2 \\ -5 & -\lambda_1 & -2\lambda_1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 16\lambda_1^2\lambda_2^2 + 8\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + 200\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + 50\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 \\ &\quad + 72\lambda_1\lambda_2 + 18\lambda_1\lambda_3 + 625\lambda_2^2\lambda_3^2 + 450\lambda_2\lambda_3 + 81 \\ &= (4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + 25\lambda_2\lambda_3 + 9)^2 \\ &= N_p^2 \end{aligned}$$

şeklinde yani  $p$  3-PGK unun normunun karesidir.  $\mathcal{M}_p$  nin karakteristik polinomu

$$P_{\mathcal{M}_p}(t) = \det(\mathcal{M}_p - tI_4)$$

$$P_{\mathcal{M}_p}(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2\lambda_1\lambda_2 & -\lambda_1\lambda_3 & 5\lambda_2\lambda_3 \\ -2 & 3-t & 5\lambda_3 & \lambda_3 \\ 1 & -5\lambda_2 & 3-t & 2\lambda_2 \\ -5 & -\lambda_1 & -2\lambda_1 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$= (t^2 - 6t + 9 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + 25\lambda_2\lambda_3)^2$$

olarak bulunurken  $p$  nin karakteristik denklemi

$$(t^2 - 6t + 9 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + 25\lambda_2\lambda_3)^2 = 0$$

olur. Bu karakteristik denkleme göre özdeğerler;

$$t_{1,2} = 3 + \sqrt{-4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - 25\lambda_2\lambda_3}, \quad t_{3,4} = 3 - \sqrt{-4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - 25\lambda_2\lambda_3}.$$

olup ikişer ikişer çakışık kök şeklinde bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise;

$$\begin{bmatrix} \frac{-\lambda_1\sqrt{-4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - 25\lambda_2\lambda_3} - 10\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + 25\lambda_2} \\ \frac{5\sqrt{-4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - 25\lambda_2\lambda_3} - 2\lambda_1}{\lambda_1 + 25\lambda_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{5\lambda_2\sqrt{-4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - 25\lambda_2\lambda_3} - 2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 a_2^2 + \lambda_2 a_3^2} \\ \frac{\sqrt{-4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 - 25\lambda_2\lambda_3} + 10\lambda_2}{4\lambda_1 + 25\lambda_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{N}$  Hamilton matrisleri ile yapılacak tüm işlemler birbirine benzer şekilde ilerleyeceğinden tez çalışması boyunca yalnızca  $\mathcal{M}$  matrisi için tanım, teorem, açıklama ve uygulamaları verip  $\mathcal{N}$  için de benzer şekilde uygulanabileceğini düşüneceğiz. Ayrıca  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  değerleri için yukarıdakine benzer özel durumları göz önünde bulunduracağız.

## 5. 3-PGK İÇİN KUTUPSAL GÖSTERİM, DE MOIVRE VE EULER FORMÜLLERİ

Karmaşık sayılardaki Euler ve De Moivre formülleri Cho (1998) tarafından kuaterniyonlar için genelleştirilmiştir. Ayrıca split ve dual kuaterniyonlar için de Özdemir (2009), Kabadayı ve Yaylı (2011) incelemiştir. Son zamanlarda reel, dual kuaterniyonlarla ilişkili matrisler için De Moivre ve Euler formülleri türetildi (Jafari vd., 2011, 2013). Genelleştirilmiş kuaterniyon cebirinde de De Moivre ve Euler formülleri Marmagani ve Jafari (2013) tarafından incelenmiştir. Meral (2009) kuaterniyonlara ait matrisler için De Moivre ve Euler formüllerini yüksek lisans tezinde derledi. Bu bölümde 3-PGK ların kutupsal gösterimi üzerinde durulup, temel matris  $\mathcal{M}$  nin kutupsal gösterimi yapılarak De Moivre formülü ve Euler formüllerine çalışılmıştır. Ayrıca 3-PGK lar ve matrisleri için n-yinci dereceden kökler ile matrisin kuvvetleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

### 5.1 3-PGK un Kutupsal Gösterimi

Bir  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  3-PGK u ile bir  $\theta$  açısını bir karmaşık sayının kutupsal gösterimine benzer mantıkla eşleştirebiliriz.  $i = 1, 2, 3$  için  $\lambda_i$  lerin tümü aynı işaretli olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{a_0}{\sqrt{N_p}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2}}{\sqrt{N_p}}$$

şeklinde yazarsak,

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1, \quad -1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki tanımı verelim.

#### Tanım 5.1.1

Herhangi bir  $p$  3-PGK unu kutupsal formda

$$p = \sqrt{N_p} (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta) \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada  $\hat{p}$

$$\hat{p} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}}$$

şeklinde 3-PGBV dür ( $\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2 \neq 0$ ). Gösterimlerde daha sade ve kısa olması adına  $\hat{p} = (p_1, p_2, p_3)$  gösterimini kullanacağız. Burada

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}}, \\ p_2 &= \frac{a_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}}, \\ p_3 &= \frac{a_3}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

dir. Gerçekten de (5.1.1) deki formu

$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\ &= \sqrt{N_p} \left( \frac{a_0}{\sqrt{N_p}} + \frac{1}{\sqrt{N_p}} (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \right) \\ &= \sqrt{N_p} \left( \frac{a_0}{\sqrt{N_p}} + \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}}{\sqrt{N_p}} \right. \\ &\quad \cdot \left( \frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}} e_1 + \frac{a_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}} e_2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_3}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2}} e_3 \right) \right) \\ &= \sqrt{N_p} (\cos \theta + (p_1, p_2, p_3) \sin \theta) \\ &= \sqrt{N_p} (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta) \end{aligned}$$

şeklinde gösterebiliriz.

## 5.2 $\mathcal{M}$ Matrisinin Kutupsal Gösterimi

$p \in S_{\mathbb{K}}$  olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
p &= a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \\
&= \cos \theta + \hat{p} \sin \theta \\
&= \cos \theta + (p_1, p_2, p_3) \sin \theta \\
&= \cos \theta + (p_1 \sin \theta, p_2 \sin \theta, p_3 \sin \theta) \\
&= (\cos \theta, p_1 \sin \theta, p_2 \sin \theta, p_3 \sin \theta)
\end{aligned}$$

olup buradan,  $\mathcal{M}$  matrisinin kutupsal formu:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \begin{bmatrix} a_0 & -\lambda_1 \lambda_2 a_1 & -\lambda_1 \lambda_3 a_2 & -\lambda_2 \lambda_3 a_3 \\ a_1 & a_0 & -\lambda_3 a_3 & \lambda_3 a_2 \\ a_2 & \lambda_2 a_3 & a_0 & -\lambda_2 a_1 \\ a_3 & -\lambda_1 a_2 & \lambda_1 a_1 & a_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \theta & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \theta & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \theta \\ p_1 \sin \theta & \cos \theta & -\lambda_3 p_3 \sin \theta & \lambda_3 p_2 \sin \theta \\ p_2 \sin \theta & \lambda_2 p_3 \sin \theta & \cos \theta & -\lambda_2 p_1 \sin \theta \\ p_3 \sin \theta & -\lambda_1 p_2 \sin \theta & \lambda_1 p_1 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

### 5.3 3-PGK için De Moivre Formülü

*Lemma 5.3.1*

$v \in S_{\mathbb{K}}^2$  olmak üzere

$$(\cos \alpha + v \sin \alpha) (\cos \beta + v \sin \beta) = \cos (\alpha + \beta) + v \sin (\alpha + \beta).$$

*İspat*

Kuaterniyonlar için Meral (2009) tarafından verilen ispata benzer bir yolla ispat yapılır.  $\square$

### Teorem 5.3.2

$p \in S_{\mathbb{K}}$  için  $p = \cos \theta + \hat{p} \sin \theta$  olmak üzere

$$p^n = (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + \hat{p} \sin(n\theta).$$

*İspat*

Tümevarım metodu ile kuaterniyonlar için Meral (2009) tarafından verilen ispata benzer bir yolla ispat yapılır.  $\square$

### 5.4 $\mathcal{M}$ Matrisi İçin De Moivre Formülü

$p$ , 3-PGBK ve  $p$  nin kutupsal formu  $p = \cos \alpha + \hat{p} \sin \alpha$  olmak üzere  $p$  kuaterniyonuna karşılık gelen matrisler için De Moivre formüllerini elde edelim.

#### Lemma 5.4.1

$$P = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \alpha & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \alpha & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \alpha \\ p_1 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_3 p_3 \sin \alpha & \lambda_3 p_2 \sin \alpha \\ p_2 \sin \alpha & \lambda_2 p_3 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_2 p_1 \sin \alpha \\ p_3 \sin \alpha & -\lambda_1 p_2 \sin \alpha & \lambda_1 p_1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$
$$Q = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \beta & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \beta & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \beta \\ p_1 \sin \beta & \cos \beta & -\lambda_3 p_3 \sin \beta & \lambda_3 p_2 \sin \beta \\ p_2 \sin \beta & \lambda_2 p_3 \sin \beta & \cos \beta & -\lambda_2 p_1 \sin \beta \\ p_3 \sin \beta & -\lambda_1 p_2 \sin \beta & \lambda_1 p_1 \sin \alpha & \cos \beta \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$PQ = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin(\alpha + \beta) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin(\alpha + \beta) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin(\alpha + \beta) \\ p_1 \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & -\lambda_3 p_3 \sin(\alpha + \beta) & \lambda_3 p_2 \sin(\alpha + \beta) \\ p_2 \sin(\alpha + \beta) & \lambda_2 p_3 \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & -\lambda_2 p_1 \sin(\alpha + \beta) \\ p_3 \sin(\alpha + \beta) & -\lambda_1 p_2 \sin(\alpha + \beta) & \lambda_1 p_1 \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

*İspat*

$PQ = [a_{ij}]$  ise

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} &= \cos \alpha \cos \beta - \lambda_1 \lambda_2 p_1^2 \sin \alpha \sin \beta - \lambda_1 \lambda_3 p_2^2 \sin \alpha \sin \beta \\ &\quad - \lambda_2 \lambda_3 p_3^2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - (\lambda_1 \lambda_2 p_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 p_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 p_3^2) \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \cos \alpha \sin \beta - \lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \alpha \cos \beta \\ &\quad - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p_2 p_3 \sin \alpha \sin \beta + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p_2 p_3 \sin \alpha \sin \beta \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 p_1 (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p_2 p_3 (\sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Benzer şekilde hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned} a_{13} &= -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin(\alpha + \beta), & a_{14} &= -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin(\alpha + \beta), & a_{21} &= p_1 \sin(\alpha + \beta), \\ a_{23} &= -\lambda_3 p_3 \sin(\alpha + \beta), & a_{24} &= \lambda_3 p_2 \sin(\alpha + \beta), & a_{31} &= p_2 \sin(\alpha + \beta), \\ a_{32} &= \lambda_2 p_3 \sin(\alpha + \beta), & a_{34} &= -\lambda_2 p_1 \sin(\alpha + \beta), & a_{41} &= p_3 \sin(\alpha + \beta), \\ a_{42} &= -\lambda_1 p_2 \sin(\alpha + \beta), & a_{43} &= \lambda_1 p_1 \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

bulunur.  $\square$

*Teorem 5.4.2*

Herhangi bir  $n$  tamsayısı için

$$P = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \alpha & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \alpha & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \alpha \\ p_1 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_3 p_3 \sin \alpha & \lambda_3 p_2 \sin \alpha \\ p_2 \sin \alpha & \lambda_2 p_3 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_2 p_1 \sin \alpha \\ p_3 \sin \alpha & -\lambda_1 p_2 \sin \alpha & \lambda_1 p_1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

matrisinin  $n$ -yinci kuvveti olan  $P^n$  matrisi

$$P^n = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin(n\alpha) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin(n\alpha) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin(n\alpha) \\ p_1 \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & -\lambda_3 p_3 \sin(n\alpha) & \lambda_3 p_2 \sin(n\alpha) \\ p_2 \sin(n\alpha) & \lambda_2 p_3 \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) & -\lambda_2 p_1 \sin(n\alpha) \\ p_3 \sin(n\alpha) & -\lambda_1 p_2 \sin(n\alpha) & \lambda_1 p_1 \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

*İspat*

Tümevarım yöntemi ile ispatı yapabiliriz. Önce  $n \geq 2$  durumu için teoremin doğruluğunu gösterelim.  $n = 2$  için Lemma 5.4.1 kullanılarak  $Q$  matrisi yerine  $P$  matrisi alınarak veya daha farklı bir deyişle  $\beta$  açıları yerine  $\alpha$  açıları yazılırsa,

$$P^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin(2\alpha) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin(2\alpha) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin(2\alpha) \\ p_1 \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) & -\lambda_3 p_3 \sin(2\alpha) & \lambda_3 p_2 \sin(2\alpha) \\ p_2 \sin(2\alpha) & \lambda_2 p_3 \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) & -\lambda_2 p_1 \sin(2\alpha) \\ p_3 \sin(2\alpha) & -\lambda_1 p_2 \sin(2\alpha) & \lambda_1 p_1 \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

olup doğrudur.  $n = k$  için doğru olsun.  $n = k + 1$  için  $P^{k+1} = P^k P$  olduğu kullanılırsa,

$$P^k P = \begin{bmatrix} \cos(k\alpha) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin(k\alpha) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin(k\alpha) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin(k\alpha) \\ p_1 \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) & -\lambda_3 p_3 \sin(k\alpha) & \lambda_3 p_2 \sin(k\alpha) \\ p_2 \sin(k\alpha) & \lambda_2 p_3 \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) & -\lambda_2 p_1 \sin(k\alpha) \\ p_3 \sin(k\alpha) & -\lambda_1 p_2 \sin(k\alpha) & \lambda_1 p_1 \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \alpha & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \alpha & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \alpha \\ p_1 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_3 p_3 \sin \alpha & \lambda_3 p_2 \sin \alpha \\ p_2 \sin \alpha & \lambda_2 p_3 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_2 p_1 \sin \alpha \\ p_3 \sin \alpha & -\lambda_1 p_2 \sin \alpha & \lambda_1 p_1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

buradan da Lemma 5.4.1 gereğince

$$P^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos((k+1)\alpha) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin((k+1)\alpha) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin((k+1)\alpha) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin((k+1)\alpha) \\ p_1 \sin((k+1)\alpha) & \cos((k+1)\alpha) & -\lambda_3 p_3 \sin((k+1)\alpha) & \lambda_3 p_2 \sin((k+1)\alpha) \\ p_2 \sin((k+1)\alpha) & \lambda_2 p_3 \sin((k+1)\alpha) & \cos((k+1)\alpha) & -\lambda_2 p_1 \sin((k+1)\alpha) \\ p_3 \sin((k+1)\alpha) & -\lambda_1 p_2 \sin((k+1)\alpha) & \lambda_1 p_1 \sin((k+1)\alpha) & \cos((k+1)\alpha) \end{bmatrix}$$

elde edilir.  $P^{-1}$  matrisini çarpımsal ters matris hesabıyla

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \alpha & \lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \alpha & \lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \alpha \\ -p_1 \sin \alpha & \cos \alpha & \lambda_3 p_3 \sin \alpha & -\lambda_3 p_2 \sin \alpha \\ -p_2 \sin \alpha & -\lambda_2 p_3 \sin \alpha & \cos \alpha & \lambda_2 p_1 \sin \alpha \\ -p_3 \sin \alpha & \lambda_1 p_2 \sin \alpha & -\lambda_1 p_1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Kosinüs çift fonksiyon, sinüs tek fonksiyon olduğundan,  $P^{-1}$  matrisini

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin(-\alpha) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin(-\alpha) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin(-\alpha) \\ p_1 \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & -\lambda_3 p_3 \sin(-\alpha) & \lambda_3 p_2 \sin(-\alpha) \\ p_2 \sin(-\alpha) & \lambda_2 p_3 \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & -\lambda_2 p_1 \sin(-\alpha) \\ p_3 \sin(-\alpha) & -\lambda_1 p_2 \sin(-\alpha) & \lambda_1 p_1 \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$P^{-n} = \begin{bmatrix} \cos(-n\alpha) & -\lambda_1\lambda_2p_1 \sin(-n\alpha) & -\lambda_1\lambda_3p_2 \sin(-n\alpha) & -\lambda_2\lambda_3p_3 \sin(-n\alpha) \\ p_1 \sin(-n\alpha) & \cos(-n\alpha) & -\lambda_3p_3 \sin(-n\alpha) & \lambda_3p_2 \sin(-n\alpha) \\ p_2 \sin(-n\alpha) & \lambda_2p_3 \sin(-n\alpha) & \cos(-n\alpha) & -\lambda_2p_1 \sin(-n\alpha) \\ p_3 \sin(-n\alpha) & -\lambda_1p_2 \sin(-n\alpha) & \lambda_1p_1 \sin(-n\alpha) & \cos(-n\alpha) \end{bmatrix}$$

elde edilir.□

*Örnek 5.4.3*

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}} \right)$$

3-PGBK unu alalım.  $p$  nin kutupsal gösterimi

$$p = \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}} \right) \sin \frac{2\pi}{3}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}} \right)$$

şeklinde yazarsak

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_1\lambda_2}}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_1\lambda_3}}, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_2\lambda_3}}$$

olur.  $p$  nin matris gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{2} & \frac{-\sqrt{\lambda_1\lambda_3}}{2} & \frac{-\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{\lambda_3}}{2\sqrt{\lambda_2}} & \frac{\sqrt{\lambda_3}}{2\sqrt{\lambda_1}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_3}} & \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{\lambda_3}} & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{\lambda_3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_2\lambda_3}} & \frac{-\sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{\lambda_3}} & \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{\lambda_2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ve  $p$  nin kutupsal matris gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \frac{2\pi}{3} & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \frac{2\pi}{3} & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \frac{2\pi}{3} \\ p_1 \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & -\lambda_3 p_3 \sin \frac{2\pi}{3} & \lambda_3 p_2 \sin \frac{2\pi}{3} \\ p_2 \sin \frac{2\pi}{3} & \lambda_2 p_3 \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & -\lambda_2 p_1 \sin \frac{2\pi}{3} \\ p_3 \sin \frac{2\pi}{3} & -\lambda_1 p_2 \sin \frac{2\pi}{3} & \lambda_1 p_1 \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.  $p$  nin 5. ve 21. kuvvetlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} p^5 &= \cos \left( 5 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} \right) \sin \left( 5 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} \right) \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{21} &= \cos \left( 21 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} \right) \sin \left( 21 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \cos 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} \right) \sin 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve bunu da matris formunda,

$$A^5 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{2} & \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}{2} & \frac{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\lambda_3}}{2\sqrt{\lambda_2}} & \frac{-\sqrt{\lambda_3}}{2\sqrt{\lambda_1}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}} & \frac{-\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{\lambda_3}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{\lambda_3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} & \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{\lambda_3}} & \frac{-\sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{\lambda_2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

### 5.5 3-PGK için Euler Formülü

Herhangi bir  $v \in S_{\mathbb{K}}^2$  için  $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  ise

$$v^2 = -a_1^2 \lambda_1 \lambda_2 - a_2^2 \lambda_1 \lambda_3 - a_3^2 \lambda_2 \lambda_3 = -1$$

olduğundan,

$$v^3 = -v, \quad v^4 = 1, \quad v^5 = v, \quad v^6 = -1, \quad \dots$$

şeklinde devam eder. Herhangi bir  $\theta$  açısına sahip olan  $p \in S_{\mathbb{K}}$  için Euler formülü;

$$\begin{aligned} e^{v\theta} &= 1 + v\theta + v^2 \frac{\theta^2}{2} + v^3 \frac{\theta^3}{3!} + v^4 \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + v\theta - \frac{\theta^2}{2} - v \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots + v \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos \theta + v \sin \theta \\ &= p \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

## 5.6 $\mathcal{M}$ Matrisi İçin Euler Formülü

Bir  $\mathcal{P}$  matrisini

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \\ p_1 & 0 & -\lambda_3 p_3 & \lambda_3 p_2 \\ p_2 & \lambda_2 p_3 & 0 & -\lambda_2 p_1 \\ p_3 & -\lambda_1 p_2 & \lambda_1 p_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçersek  $\lambda_1 \lambda_2 p_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 p_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 p_3^2 = 1$  olduğundan  $\mathcal{P}^2 = -I_4$  olduğunu görmek kolaydır. Burada  $p_1, p_2, p_3, (5.1.2)$  deki  $\hat{p} \in S_{\mathbb{K}}^2$  nin bileşenleridir.

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{P}\alpha} &= I_4 + \mathcal{P}\alpha + \frac{(\mathcal{P}\alpha)^2}{2!} + \frac{(\mathcal{P}\alpha)^3}{3!} + \frac{(\mathcal{P}\alpha)^4}{4!} + \dots \\ &= I_4 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots \right) + \mathcal{P} \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \cos \alpha + \mathcal{P} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\mathcal{P}\alpha} &= \cos \alpha + \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \\ p_1 & 0 & -\lambda_3 p_3 & \lambda_3 p_2 \\ p_2 & \lambda_2 p_3 & 0 & -\lambda_2 p_1 \\ p_3 & -\lambda_1 p_2 & \lambda_1 p_1 & 0 \end{bmatrix} \sin \alpha \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \alpha & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \alpha & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \alpha \\ p_1 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_3 p_3 \sin \alpha & \lambda_3 p_2 \sin \alpha \\ p_2 \sin \alpha & \lambda_2 p_3 \sin \alpha & \cos \alpha & -\lambda_2 p_1 \sin \alpha \\ p_3 \sin \alpha & -\lambda_1 p_2 \sin \alpha & \lambda_1 p_1 \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\
&= P
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

### 5.7 3-PGK için n-yinci Dereceden Kökler

Bir  $p$  3-PGK unu kutupsal formda

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{N_p} (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta) \\
&= \sqrt{N_p} (\cos (\theta + 2k\pi) + \hat{p} \sin (\theta + 2k\pi))
\end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa  $p$  3-PGK unun  $n$  tane kökü vardır, burada  $k$  tamsayıdır. Bu  $n$  tane kök  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  olmak üzere

$$w_k^{1/n} = \left( \sqrt{N_p} \right)^{1/n} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + \hat{p} \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

şeklinde bulunabilir.

### 5.8 $\mathcal{M}$ için n-yinci Dereceden Kökler

$$A = \begin{bmatrix} \cos (\alpha+2k\pi) & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin (\alpha+2k\pi) & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin (\alpha+2k\pi) & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin (\alpha+2k\pi) \\ p_1 \sin (\alpha+2k\pi) & \cos (\alpha+2k\pi) & -\lambda_3 p_3 \sin (\alpha+2k\pi) & \lambda_3 p_2 \sin (\alpha+2k\pi) \\ p_2 \sin (\alpha+2k\pi) & \lambda_2 p_3 \sin (\alpha+2k\pi) & \cos (\alpha+2k\pi) & -\lambda_2 p_1 \sin (\alpha+2k\pi) \\ p_3 \sin (\alpha+2k\pi) & -\lambda_1 p_2 \sin (\alpha+2k\pi) & \lambda_1 p_1 \sin (\alpha+2k\pi) & \cos (\alpha+2k\pi) \end{bmatrix}$$

burada  $k \in \mathbb{Z}$ .  $X^n = A$  denklemini  $n$  tane köke sahiptir. Böylece

$$A_k^{\frac{1}{n}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & -\lambda_1\lambda_2p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & -\lambda_1\lambda_3p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & -\lambda_2\lambda_3p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\ p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & -\lambda_3p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & \lambda_3p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\ p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & \lambda_2p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & -\lambda_2p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\ p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & -\lambda_1p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & \lambda_1p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.  $k = 0$  için birinci kök:

$$A_0^{\frac{1}{n}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) & -\lambda_1\lambda_2p_1 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & -\lambda_1\lambda_3p_2 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & -\lambda_2\lambda_3p_3 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \\ p_1 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) & -\lambda_3p_3 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & \lambda_3p_2 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \\ p_2 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & \lambda_2p_3 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) & -\lambda_2p_1 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \\ p_3 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & -\lambda_1p_2 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & \lambda_1p_1 \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) \end{bmatrix}$$

dir.  $k = 1$  iken ikinci kök:

$$A_1^{\frac{1}{n}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & -\lambda_1\lambda_2p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & -\lambda_1\lambda_3p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & -\lambda_2\lambda_3p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) \\ p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & -\lambda_3p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & \lambda_3p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) \\ p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & \lambda_2p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & -\lambda_2p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) \\ p_3 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & -\lambda_1p_2 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & \lambda_1p_1 \sin\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{n}\right) \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde  $k = n - 1$  iken  $n$ . kökü elde ederiz.

## 5.9 Matrisin Kuvvetleri Arasındaki İlişki

3-PGK ile ilişkilendirilmiş matrislerin kuvvetleri arasındaki bağıntılar aşağıdaki teorem yardımıyla anlaşılabilir:

### *Teorem 5.9.1*

Bir  $p$  3-PGBK unun kutupsal formda ifadesi  $p = \cos \theta + v \sin \theta$  ve  $m = \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  olsun.  $n \equiv s \pmod{m}$  olması için gerek ve yeter koşul  $p^n = p^s$  olmasıdır.

*İspat*

$n \equiv s \pmod{m}$  ve  $k \in \mathbb{Z}$  olsun.

$$\begin{aligned} p^n &= (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta)^n \\ &= \cos(n\theta) + \hat{p} \sin(n\theta) \\ &= \cos((mk + s)\theta) + \hat{p} \sin((mk + s)\theta) \\ &= \cos\left(\left(\frac{2\pi}{\theta}k + s\right)\theta\right) + \hat{p} \sin\left(\left(\frac{2\pi}{\theta}k + s\right)\theta\right) \\ &= \cos(2\pi k + s\theta) + \hat{p} \sin(2\pi k + s\theta) \\ &= \cos(s\theta) + \hat{p} \sin(s\theta) \\ &= (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta)^s \\ &= p^s. \end{aligned}$$

Öte yandan  $p^n = \cos(n\theta) + \hat{p} \sin(n\theta)$  ve  $p^s = \cos(s\theta) + \hat{p} \sin(s\theta)$  olsun.  $p^n = p^s$  olduğundan  $\cos(n\theta) = \cos(s\theta)$  ve  $\sin(n\theta) = \sin(s\theta)$  olur. Bu da

$$n\theta = s\theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$n = \frac{2\pi}{\theta}k + s, \quad n \equiv s \pmod{m}$$

bulunur.  $\square$

*Örnek 5.9.2*

$$p = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}} \right)$$

3-PGBK olsun.  $p$  nin kutupsal formdaki ifadesini daha önceki örnekte ifade etmiştik.

$\theta = \frac{2\pi}{3}$  olduğundan Teorem 5.9.1 den  $m = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3$  bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
p &= p^4 = p^7 = \dots \\
p^2 &= p^5 = p^8 = \dots \\
p^3 &= p^6 = p^9 = \dots = 1
\end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

### *Teorem 5.9.3*

$p$  3-PGBK unun kutupsal formdaki ifadesi  $p = \cos \theta + v \sin \theta$ ,  $m = \frac{2\pi}{\theta} \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  ve  $p$  yi temsil eden matris  $A$  olsun. Buna göre  $n \equiv s \pmod{m}$  olması için gerek ve yeter koşul  $A^n = A^s$  olmasıdır.

### *İspat*

Teorem 5.9.1 in ispatına benzer şekilde kolaylıkla yapılır.

### *Örnek 5.9.4*

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \frac{-1}{\sqrt{2\lambda_1 \lambda_3}}, \frac{1}{\sqrt{2\lambda_2 \lambda_3}} \right)$$

3-PGBK u için matris temsili

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{2} & \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_3}}{2\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{\lambda_3}}{2\sqrt{2\lambda_2}} & \frac{-\sqrt{\lambda_3}}{2\sqrt{2\lambda_1}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2\lambda_1 \lambda_3}} & \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{2\lambda_3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{\lambda_1}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2\lambda_2 \lambda_3}} & \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{2\lambda_3}} & \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{\lambda_2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

bulunur. Teorem 5.9.3 ten  $m = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$  olur ki bu da

$$\begin{aligned}
A &= A^9 = A^{17} = \dots \\
A^2 &= A^{10} = A^{18} = \dots
\end{aligned}$$

...

$$A^8 = A^{16} = A^{24} = \dots = I_4$$

olması demektir.

$A$  matrisinin kareköklerini de elde etmek mümkündür:

$$A_k^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} \\ p_1 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & \cos \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & -\lambda_3 p_3 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & \lambda_3 p_2 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} \\ p_2 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & \lambda_2 p_3 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & \cos \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & -\lambda_2 p_1 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} \\ p_3 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & -\lambda_1 p_2 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & \lambda_1 p_1 \sin \frac{\pi/4+2k\pi}{2} & \cos \frac{\pi/4+2k\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$k = 0$  için birinci kök

$$A_0^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{8} & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \frac{\pi}{8} & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \frac{\pi}{8} & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \frac{\pi}{8} \\ p_1 \sin \frac{\pi}{8} & \cos \frac{\pi}{8} & -\lambda_3 p_3 \sin \frac{\pi}{8} & \lambda_3 p_2 \sin \frac{\pi}{8} \\ p_2 \sin \frac{\pi}{8} & \lambda_2 p_3 \sin \frac{\pi}{8} & \cos \frac{\pi}{8} & -\lambda_2 p_1 \sin \frac{\pi}{8} \\ p_3 \sin \frac{\pi}{8} & -\lambda_1 p_2 \sin \frac{\pi}{8} & \lambda_1 p_1 \sin \frac{\pi}{8} & \cos \frac{\pi}{8} \end{bmatrix}$$

$k = 1$  için diğer kök

$$A_1^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \cos \frac{9\pi}{8} & -\lambda_1 \lambda_2 p_1 \sin \frac{9\pi}{8} & -\lambda_1 \lambda_3 p_2 \sin \frac{9\pi}{8} & -\lambda_2 \lambda_3 p_3 \sin \frac{9\pi}{8} \\ p_1 \sin \frac{9\pi}{8} & \cos \frac{9\pi}{8} & -\lambda_3 p_3 \sin \frac{9\pi}{8} & \lambda_3 p_2 \sin \frac{9\pi}{8} \\ p_2 \sin \frac{9\pi}{8} & \lambda_2 p_3 \sin \frac{9\pi}{8} & \cos \frac{9\pi}{8} & -\lambda_2 p_1 \sin \frac{9\pi}{8} \\ p_3 \sin \frac{9\pi}{8} & -\lambda_1 p_2 \sin \frac{9\pi}{8} & \lambda_1 p_1 \sin \frac{9\pi}{8} & \cos \frac{9\pi}{8} \end{bmatrix}$$

Ayrıca  $A_0^{\frac{1}{2}} = -A_1^{\frac{1}{2}}$  olduğundan

$$A_0^{\frac{1}{2}} + A_1^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

*Teorem 5.9.5*

$p$  3-PGK unun kutupsal formdaki ifadesi  $p = \sqrt{N_p} (\cos \theta + \hat{p} \sin \theta)$  ve  $\frac{2\pi}{\theta} = m \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$  olsun.  $n \equiv s \pmod{m}$  olması için gerek ve yeter koşul  $p^n = (\sqrt{N_p})^{n-s} p^s$  olmasıdır.

*İspat*

Meral (2009) in Hamilton kuarterniyonlar için yaptığı ispata benzer şekilde ispatı yapılır.

## 6. 3-PGK LARIN LIE CEBİRİ VE MATRİS TEMSİLLERİ

Karger ve Novak (1985) tüm birim kuaterniyonların kümesinin 3-boyutlu bir Lie grubu olduğunu gösterip Lie cebirine de çalıştı. Jafari ve Yaylı (2015) aynı çalışmayı Dickson (1924) ın tanımladığı 2-PGK lar üzerinde yapmıştır. Bekar (2009) reel kuaterniyonların Lie grubu ve cebir yapıları üzerine tez yazdı. Biz de bu bölümde 3-PGK lar için Lie grubu, Lie cebiri, bunların matris temsilleri ile bunlar için Adjoint dönüşümler tanımlayacağız. Ayrıca Lie (Bracket) çarpımı, Killing bilineer form ve bunların özelliklerini vereceğiz.

### 6.1 Temel Tanım ve Teoremler

Adını Norveçli matematikçi Sophus Lie den alan Lie grupları ve Lie cebirlerinin anlaşılabilmesi için önce bazı tanım ve teoremler verelim.

#### *Tanım 6.1.1*

$X$  boştan farklı bir cümle ve bu  $X$  cümlesinin alt cümlelerinin bir koleksiyonu  $\tau$  olmak üzere  $\tau$  koleksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlarsa  $\tau$  ya  $X$  üzerinde bir topolojidir denir:

- (i)  $X$  ve  $\emptyset$ ,  $\tau$  koleksiyonunun bir elemanıdır.
- (ii)  $\tau$  koleksiyonuna ait herhangi iki kümenin kesişimi de koleksiyona aittir.
- (iii)  $\tau$  koleksiyonuna ait herhangi en az iki cümlenin birleşimi de koleksiyona aittir. (Hacısalıhoğlu, 1998).

#### *Tanım 6.1.2*

Bir  $X$  cümlesi ile bu cümle üzerinde bir  $\tau$  topolojisi var olsun. Bu durumda  $(X, \tau)$  ikilisi bir topolojik uzay adını alır (Hacısalıhoğlu, 1998).

### Tanım 6.1.3

$X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  in  $P$  ve  $Q$  gibi farklı noktaları için  $X$  de,  $A_P \cap A_Q = \emptyset$  olacak şekilde sırası ile  $P$  ve  $Q$  noktalarını içine alan  $A_P$  ve  $A_Q$  açık alt kümeleri bulunabiliyorsa  $X$  topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

### Tanım 6.1.4

$(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun. Eğer  $A$  kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa,  $A$  ya bir kompakt küme denir. Özel olarak, eğer  $X$  in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa  $(X, \tau)$  uzayına bir kompakt uzay denir (Mucuk, 2010).

### Tanım 6.1.5

$X, Y$  iki topolojik uzay ve  $f$  de bu uzaylar arasında bir fonksiyon olsun. Eğer  $f : X \rightarrow Y$  sürekli,  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  ters fonksiyonu mevcut ve sürekli ise o zaman  $f$  fonksiyonuna  $X$  uzayından  $Y$  uzayına bir homeomorfizm veya topolojik dönüşümdür denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

### Tanım 6.1.6

Bir  $M$  topolojik uzayı, aşağıdaki özelliklere sahip ise o zaman  $M$  topolojik uzayına  $n$ -boyutlu topolojik manifolddur denir:

- (i)  $M$  Hausdorff uzayı,
- (ii)  $M$  deki her açık alt küme,  $E^n$  veya  $E^n$  in herhangi bir açık alt kümesine homeomorf,
- (iii) Sayılabilir çokluktaki açık kümeler  $M$  yi örtebilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

### Tanım 6.1.7

$E^n$  de açık bir alt cümle  $U$  olsun. Bir  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $k$ -yinci mertebeden bütün kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler de sürekli ise o zaman  $f$ ,  $C^k$  sınıfından ( $k$ -yinci sınıftan) diferensiyellenebilirdir (Hacısalıhoğlu, 1998).

### Tanım 6.1.8

$U$  ve  $V$ ,  $E^n$  de birer açık alt cümle olmak üzere bir  $\varphi : U \rightarrow V$  fonksiyonu için aşağıdaki önermeler doğru ise  $\varphi$  ye  $C^k$  sınıfından bir diffeomorfizm denir:

- (i)  $\varphi \in C^k(U, V)$ ,
- (ii)  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$  var ve  $\varphi^{-1} \in C^k(U, V)$ .

Bu durumda  $U$  ve  $V$ ,  $k$ -yinci dereceden diffeomorftir denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

### Tanım 6.1.9

$M$ ,  $n$ -boyutlu bir topolojik manifold ve  $E^n$  de bir açık alt cümle  $U$  olmak üzere Tanım 6.1.6 gereğince  $U$  açık alt cümlesi bir  $\psi$  homeomorfizmi ile  $M$  nin bir açık  $W$  alt cümlesine eşlenebilir:

$$\psi : U \rightarrow W.$$

Buna göre  $(\psi, W)$  ikilisine  $M$  de bir harita (koordinat komşuluğu) denir.  $u \in U$  için  $\psi(u) \in M$  dir ve

$$\psi(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u)) , \quad x_i(u) \in \mathbb{R} , \quad 1 \leq i \leq n$$

şeklinindedir. Burada  $x_i(u)$  reel sayısına  $\psi(u) \in M$  noktasının  $i$ -yinci koordinatı ve  $u_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna da  $u$  nun  $i$ -yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

$$x_i = u_i \circ \psi^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna  $W$  nun  $i$ -yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir (Hacısalihoglu, 1998).

*Tanım 6.1.10*

$M$ , topolojik bir  $n$ -manifold,  $\{U_\alpha\}$  da  $M$  de bir açık örtü olsun.  $\{U_\alpha\}$  açık cümlelerinin  $\alpha$  indislerinin cümlesi  $A$  olmak üzere  $\{U_\alpha\}$  örtüsü için  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  yazılır.  $V_\alpha, E^n$  de  $U_\alpha$  ya  $\varphi_\alpha$  homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle olsun. Bu durumda ortaya çıkan  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  haritalarının  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  koleksiyonuna atlas denir (Hacısalihoglu, 1998).

*Tanım 6.1.11*

$M$ ,  $n$ -boyutlu bir topolojik manifold ve  $S = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  de  $M$  nin bir atlası olsun.  $S$  atlası için  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  olmak üzere  $f$  ve  $g$  fonksiyonları  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir iseler  $S$  ye  $C^k$ -sınıfından diferensiyellenebilir denir.  $S$  atlası  $M$  üzerinde  $C^k$ -sınıfından olduğundan,  $S$  ye  $M$  üzerinde  $C^k$ -sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir (Hacısalihoglu, 1998).

*Tanım 6.1.12*

$M$ ,  $n$ -boyutlu topolojik bir manifold olsun.  $M$  nin üzerinde  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyorsa,  $M$  ye  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir manifold adı verilir (Hacısalihoglu, 1998).

*Tanım 6.1.13*

$M$  bir diferensiyellenebilir  $n$ -manifold ve  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  bir fonksiyon olsun. Eğer her  $p \in M$  için  $M$  de tanım kümesi  $p$  yi içeren bir  $(U, \varphi)$  diferensiyellenebilir haritası var öyle ki  $f \circ \varphi^{-1}$  bileşke fonksiyonu  $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  açık cümlesi üzerinde diferensiyellenebilir ise,  $f$  ye diferensiyellenebilir denir (Lee, 2002).

*Tanım 6.1.14*

$M, N$  diferensiyellenebilir manifoldlar ve  $F : M \rightarrow N$  herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her  $p \in M$  için  $p$  yi kapsayan bir  $(U, \varphi)$  ve  $F(p)$  yi kapsayan  $(V, \psi)$  diferensiyellenebilir haritaları var öyle ki  $F(U) \subset V$  ve  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  bileşke dönüşümü  $\varphi(U)$  dan  $\psi(V)$  ye diferensiyellenebilir ise,  $F$  ye bir diferensiyellenebilir dönüşüm denir (Lee, 2002).

Diferensiyellenebilirlik kavramı lokaldir. Yani  $M$  ile  $N$  diferensiyellenebilir manifoldlar ve  $F : M \rightarrow N$  bir dönüşüm olmak üzere herhangi bir  $p \in M$  noktası için  $F|_p$  kısıtlaması diferensiyellenebilir olacak şekilde bir  $U$  komşuluğuna sahip ise, o zaman  $F$  diferensiyellenebilirdir. Tersine, eğer  $F$  diferensiyellenebilir ise, onun herhangi bir açık alt cümleye kısıtlaması diferensiyellenebilirdir.

*Tanım 6.1.15*

$G$  cümlesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $G$  ye bir Lie gruptur denir:

- (i)  $G$  diferensiyellenebilir manifolddur,
- (ii)  $G$  bir gruptur
- (iii)  $\gamma : G \times G \rightarrow G$  ve  $\mu : G \rightarrow G$   
 $(x, y) \rightarrow xy$  ve  $x \rightarrow x^{-1}$

diferensiyellenebilir dönüşümlerdir (O'Neill, 1983; Hacısalihoğlu, 1980).

*Tanım 6.1.16*

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$
$$(a, b) \rightarrow [a, b] = ab - ba$$

biçimindeki bir dönüşüm her  $a, b, c \in V$  için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa, bu dönüşüme Bracket operatörü denir. Ayrıca  $(V, [,])$  ikilisine de Lie cebiri adı verilir.

- (i)  $[\cdot, \cdot]$  bilineerdir,
- (ii)  $[a, b] = -[b, a]$  (antisimetriktir),
- (iii)  $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$  dır (Jakobi özdeşliği) (Hacısalihoglu, 1980).

*Tanım 6.1.17*

$G$  Lie grubunun herhangi bir elemanı  $a$  olsun. Her  $g \in G$  için  $l_a(g) = ag$  olarak tanımlanan  $l_a : G \rightarrow G$  dönüşümüne  $G$  nin sol ötelemesi (sol çarpımı) denir. Her  $g \in G$  için  $r_a(g) = ga$  olarak tanımlanan  $r_a : G \rightarrow G$  dönüşümüne  $G$  nin sağ ötelemesi (sağ çarpımı) denir.  $l_a$  ve  $r_a$  dönüşümleri birer diffeomorfizmdir (Kula, 2003).

*Tanım 6.1.18*

$A, V$  vektör uzayı ile birleşmiş bir afin uzay olsun.  $A$  daki bir  $P$  noktası ile  $V$  deki bir  $v$  vektörü için  $(P, v)$  sıralı ikilisine  $A$  afin uzayının  $P$  noktasındaki bir tanjant vektörü denir.  $A$  afin uzayının,  $P$  noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi  $T_A(P)$  şeklinde gösterilir. O halde

$$T_A(P) = \{(P, v) \mid v \in V\} \text{ veya } T_A(P) = \{P\} \times V$$

şeklindedir.  $(p, v) \in T_A(P)$  tanjant vektörünü kısaca  $v_p$  ile göstereceğiz. (Hacısalihoglu, 1998).

*Tanım 6.1.19*

$\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$  vektör uzayına,  $A$  afin uzayının  $P \in A$  noktasındaki tanjant uzayı adı verilir. Bu tanjant uzay kısaca  $T_A(P)$  şeklinde gösterilir. Özel olarak  $A$  afin uzayının yerine  $E^n$  seçilirse  $T_{E^n}(P)$  tanjant uzayından bahsedilebilir.  $E^n$  nin 0 başlangıç noktasındaki  $T_{E^n}(0)$  tanjant uzayının standart bazı olan

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

sisteminin elemanları,  $x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  ler Öklid koordinat fonksiyonları olmak üzere, sırası ile

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_O, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_O, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_O$$

veya aynı şey demek olan,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_O = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}) \Big|_O, 1 \leq i \leq n$$

ile ve

$$\left( P, \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_O \right)$$

tanjant vektörü de

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_P$$

ile gösterilecektir. Böylece  $T_{E^n}(P)$  uzayının standart bazı

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_P, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_P \right\}$$

olur (Hacısalıhoğlu, 1998).

#### *Tanım 6.1.20*

$F : E^n \rightarrow E^m$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $v_P \in T_{E^n}(P)$  ise  $(F_*)_P(v_P) \in T_{E^m}(F(P))$  de  $E^m$  nin  $t \rightarrow F(P + tv)$  eğrisinin  $t = 0$  noktasındaki hız vektörü olsun. Böylece tanımlı

$$(F_*)_P : T_{E^n}(P) \rightarrow T_{E^m}(F(P))$$

fonksiyonuna  $F$  nin  $P \in E^n$  noktasındaki türev dönüşümü denir.  $(F_*)_P$  dönüşümü  $(dF)_P = F'_P$  biçiminde de gösterilir (Hacısalıhoğlu,1998).

*Tanım 6.1.21*

$G$  bir Lie grubu ve  $G$  üzerindeki vektör alanlarının uzayı  $\mathcal{X}(G)$  olsun. Her  $a, b \in G$  için  $dl_a(X_b) = X_{ab}$  ise  $G$  Lie grubu üzerindeki  $X$  vektör alanına sol invaryanttır denir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} l_a : G &\rightarrow G \\ b &\rightarrow l_a(b) = ab \end{aligned}$$

sol çarpımının

$$\begin{aligned} dl_a = (l_a)_* : T_G(b) &\rightarrow T_G(ab) \\ X_b &\rightarrow (l_a)_*(X_b) = X_{ab} \end{aligned}$$

türev dönüşümü  $X$  in oluşturduğu teğet vektörleri yer değiştirir. Ayrıca sol invaryant vektör alanı diferensiyellenebilir.

Her  $a, b \in G$  için  $dr_a(X_b) = X_{ba}$  ise  $G$  Lie grubu üzerindeki  $X$  vektör alanına sağ invaryanttır denir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} r_a : G &\rightarrow G \\ b &\rightarrow r_a(b) = ba \end{aligned}$$

sağ çarpımının

$$\begin{aligned} dl_a = (r_a)_* : T_G(b) &\rightarrow T_G(ab) \\ X_b &\rightarrow (r_a)_*(X_b) = X_{ab} \end{aligned}$$

türev dönüşümü  $X$  in oluşturduğu teğet vektörleri yer değiştirir. Ayrıca sağ invaryant vektör alanı diferensiyellenebilir.

$G$  deki sol (sağ) invaryant vektör alanlarının cümlesi  $\mathcal{X}_l(G)$  ( $\mathcal{X}_r(G)$ ) olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemleri  $\mathcal{X}_l(G)$  ( $\mathcal{X}_r(G)$ ) yi bir vektör uzayı yapar.  $\mathcal{X}_l(G)$  ( $\mathcal{X}_r(G)$ ) de  $[\cdot, \cdot]$  parantez operatörü de tanımlanarak  $\mathcal{X}_l(G)$

$(\mathcal{X}_r(G))$  bir Lie cebiri olur.  $\text{boy}G = \text{boy}\mathcal{X}_l(G)$  ( $\text{boy}G = \text{boy}\mathcal{X}_r(G)$ ) dir (O'Neill, 1983).

*Tanım 6.1.22*

$e$ ,  $G$  Lie grubunun birim elemanı ve  $\varsigma, \eta \in T_G(e)$  olsun.  $X$  ve  $Y$  ise  $\varsigma$  ve  $\eta$  ile belirlenen sol invaryant vektör alanlarını belirtsin. Öyleyse  $[\varsigma, \eta] = [X, Y]_e$  şeklinde tanımlanabilir. Sonuç olarak, grubun birim elemanındaki  $T_G(e)$  teğet uzayı bir Lie cebiri olur (Ata, 2004).

*Tanım 6.1.23*

$a \in G$  olmak üzere, bir  $g$  elemanını  $aga^{-1}$  elemanına dönüştüren

$$\begin{aligned} C_a : G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow C_a(g) = aga^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda  $C_a$  bir diffeomorfizm olup, onun diferensiyeli  $Ad_a$  ile gösterilir. O halde  $dC_a = Ad_a$  dır.  $a, b \in G$  için

$$C_{ab}(g) = abg(ab)^{-1} = a(bgb^{-1})a^{-1}$$

dir. Böylece  $C_{ab} = C_a \circ C_b$  olur. Diferensiyel alındığında ise

$$Ad_{ab} = Ad_a \circ Ad_b$$

elde edilir.  $a \rightarrow Ad_a$  grup homomorfizmine  $G$  nin adjoint gösterimi denir (O'Neill 1983).

*Tanım 6.1.24*

$G$  bir Lie grubu ve  $g, G$  den seçilmiş belirli bir eleman olsun. Herhangi bir  $h \in G$  için

$$\begin{aligned} \text{int}g : G &\rightarrow G \\ h &\rightarrow ghg^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü  $G$  grubunun diferensiyellenebilir izomorfizimidir ve  $e \in G$  birim eleman olmak üzere  $\text{int}g(e) = geg^{-1} = e$  dir. Bu ise,  $e$  noktasındaki  $\text{int}g$  dönüşümünün diferensiyelidir. Diğer bir ifadeyle

$$(\text{int}g)'_e : T_G(e) \rightarrow T_G(e); (\text{int}g)'_e = (\text{int}g)_*e = \text{Ad}g$$

anlamına gelir. Buradan  $\text{Ad}g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  olur. Böylece  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Hom}(G, G)$  dönüşümüne  $G$  grubunun adjoint gösterimi adı verilir (Karger ve Novak, 1985).

*Teorem 6.1.25*

$G$  bir Lie grubu ve  $G$  nin Lie cebiri  $\mathcal{G}$  olsun. Her  $g \in G$  ve her  $\varsigma, \eta \in \mathcal{G}$  için  $\text{Ad}g[\varsigma, \eta] = [\text{Ad}g\varsigma, \text{Ad}g\eta]$  dir (Karger ve Novak, 1985).

*Tanım 6.1.26*

$\mathcal{G}$  bir Lie cebiri olsun.  $X, \mathcal{G}$  cebirinden seçilmiş belirli bir eleman olmak üzere  $\mathcal{G}$  deki her  $Y$  elemanı için

$$\begin{aligned} \text{Ad}X : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ Y &\rightarrow \text{Ad}X(Y) = [X, Y] \end{aligned}$$

olarak gösterilebilir. Her  $X, Y \in \mathcal{G}$  için

$$\begin{aligned} K : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\rightarrow K(X, Y) = \dot{I}_z(\text{Ad}X.\text{Ad}Y) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.  $K(X, Y)$  formu  $\mathcal{G}$  deki Killing bilineer form olarak adlandırılır. Burada  $\dot{I}z(AdX.AdY)$  ifadesi

$$\begin{aligned} AdX.AdY : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ Z &\rightarrow [X, [Y, Z]] \end{aligned}$$

dönüşümün izine karşılık gelir.  $K(X, Y)$  bir simetrik bilineer formdur (Karger ve Novak, 1985).

*Teorem 6.1.27*

Killing bilineer form invarianttır. Diğer bir ifadeyle her  $g \in G$  ve her  $\varsigma, \eta \in \mathcal{G}$  için  $K(Adg\varsigma, Adg\eta) = K(\varsigma, \eta)$  dir (Karger ve Novak, 1985).

*Tanım 6.1.28*

$h : X \rightarrow Y$  diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Herhangi bir  $q \in h^{-1}(p)$  için  $dh_q$  örten ise  $p \in Y$  ye  $h$  nin bir regüler değeri denir (Hacısalihoglu, 1980).

*Teorem 6.1.29*

$h : X \rightarrow Y$  diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve  $p \in h(X)$ ,  $h$  fonksiyonunun bir regüler değeri olsun. Buna göre  $h^{-1}(p)$ ,  $X$  in bir alt manifoldudur (Hacısalihoglu, 1980).

## 6.2 3-PGK lar için Lie Grubu

$$\begin{aligned} \zeta : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\rightarrow \zeta(p) = (a_0, a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

ile verilen  $\zeta$  dönüşümü 1-1 ve örtendir, burada  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ .  $\mathbb{K}$  ve  $\mathbb{R}^4$  ün elemanları birebir eşlenebilir.  $(\zeta, \mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}$  nın bir haritasıdır.  $\zeta \circ \zeta^{-1} = I$  özdeşlik

dönüşümü diferensiyellenebilir. Ayrıca  $(\zeta, \mathbb{K})$  tek haritalı bir atlasdır. Bu tek haritalı atlas diferensiyellenebilir.  $\mathbb{K}$  bu atlas ile diferensiyellebilir bir manifold olur.

$\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{(0, 0, 0, 0)\}$  cümlesi 3-PGK çarpımı olan  $\times$  ile birlikte bir gruptur. Ayrıca  $\mathbb{K}^*, \mathbb{R}^4$  ün açık bir alt manifoldu yapısı ile verilebilir.

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^* &\rightarrow \mathbb{K}^* \\ (p, q) &\rightarrow p \times q := pq = S_p S_q - f(V_p, V_q) + S_p V_p + S_q V_q + V_p \bar{\wedge} V_q \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir işlemlerin bir lineer birleşimi olduğu için diferensiyellenebilir, burada

$$\begin{aligned} f : \text{Im}(\mathbb{K}^*) \times \text{Im}(\mathbb{K}^*) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (V_p, V_q) &\rightarrow f(V_p, V_q) = \lambda_1 \lambda_2 a_1 b_1 + \lambda_1 \lambda_3 a_2 b_2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3 b_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\wedge} : \text{Im}(\mathbb{K}^*) \times \text{Im}(\mathbb{K}^*) &\rightarrow \text{Im}(\mathbb{K}^*) \\ (V_p, V_q) &\rightarrow V_p \bar{\wedge} V_q = \begin{vmatrix} \lambda_3 e_1 & \lambda_2 e_2 & \lambda_1 e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda_3 (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 \\ &+ \lambda_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + \lambda_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3. \end{aligned}$$

dir. Böylece  $\mathbb{K}^*$  bir Lie grubu olur.

### *Teorem 6.2.1*

$S_{\mathbb{K}} = \{p \in \mathbb{K} : N_p = 1\}$  3-boyutlu bir Lie grubudur.

### *İspat*

$S_{\mathbb{K}}$  cümlesinin, Tanım 6.1.15 teki Lie grubu özelliklerini taşıdığını göstermeliyiz.

(i)  $S_{\mathbb{K}}$  cümlesi 3-PGK in çarpma işlemine göre bir gruptur ve grubun birim elemanı  $e_0 = (1, 0, 0, 0)$  dir.

(ii)  $S_{\mathbb{K}}$ , diferensiyellenebilir manifolddur: Önce bir  $h$  fonksiyonunu

$$h : S_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow h(p) = a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2$$

şeklinde tanımlayalım.  $h$  fonksiyonunu, koordinat fonksiyonları türünden

$$h = x_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 x_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 x_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 x_3^2$$

şeklinde ifade edersek,  $h$  fonksiyonunun Jakobi matrisini de

$$J(h) = \begin{bmatrix} 2x_0 & 2\lambda_1 \lambda_2 x_1 & 2\lambda_1 \lambda_3 x_2 & 2\lambda_2 \lambda_3 x_3 \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda  $J(h)$  nin rankı 1 dir. Ayrıca  $h\{S_{\mathbb{K}}\} = 1$  olduğundan  $h^{-1}(1) = S_{\mathbb{K}}$  dir. Buradan Tanım 6.1.28 ve Teorem 6.1.29 gereğince  $S_{\mathbb{K}}$  3-boyutlu bir manifold olur.

(iii)

$$\gamma : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(p, q) \rightarrow \gamma(p, q) = pq$$

dönüşümü diferensiyellenebilir olduğundan  $S_{\mathbb{K}}$  ye indirgenmiş de diferensiyellenebilir. Buna ek olarak

$$\eta : S_{\mathbb{K}} \rightarrow S_{\mathbb{K}}$$

$$p \rightarrow \eta(p) = p^{-1} = \bar{p}$$

fonsiyonu da diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak  $S_{\mathbb{K}}$ , 3-boyutlu bir Lie grubudur.  $\square$

$S_{\mathbb{K}}$  nın Lie cebirini bulmak için  $T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  yi bulmak bizim için yeterli olacaktır.

### Teorem 6.2.2

$\text{Im}(\mathbb{K})$  ,  $S_{\mathbb{K}}$  Lie grubunun Lie cebiridir.

### İspat

$T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  ,  $e$  noktasından geçen eğrinin hız vektörlerinin kümesi ve  $v_e \in T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  olsun.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S_{\mathbb{K}}$$

$$\alpha(s) \rightarrow \alpha(s) = a_0(s) + a_1(s)e_1 + a_2(s)e_2 + a_3(s)e_3$$

$S_{\mathbb{K}}$  de,  $v_e$  yi hız vektörü kabul eden bir eğri olsun. Bu durumda

$$\alpha(0) = 1 \text{ ve } \alpha'(0) = v_e$$

dir.  $\alpha(s) \in S_{\mathbb{K}}$  olduğundan

$$a_0^2(s) + \lambda_1\lambda_2a_1^2(s) + \lambda_1\lambda_3a_2^2(s) + \lambda_2\lambda_3a_3^2(s) = 1 \quad (6.2.1)$$

dir. (6.2.1) denkleminin  $s = 0$  noktasındaki türevi

$$2a_0'(s)a_0(s) + 2\lambda_1\lambda_2a_1'(s)a_1(s) + 2\lambda_1\lambda_3a_2'(s)a_2(s) + 2\lambda_2\lambda_3a_3'(s)a_3(s) = 0$$

dir. Buna göre

$$a_0(0) = 1, a_1(0) = 0, a_2(0) = 0, a_3(0) = 0$$

olduğundan  $a_0'(0) = 0$  bulunur.  $T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  deki tüm vektörleri,  $\text{Im}(\mathbb{K})$  kümesinin  $e$  noktasındaki teğet uzayının

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_e, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_e, \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \right|_e \right\}$$

bazındaki vektörlerin lineer birleşimi şeklinde yazabileceğimizden  $\alpha'(0)$  hız vektörünü

$$\alpha'(0) = a'_0(0) \frac{\partial}{\partial x_0} + a'_1(0) \frac{\partial}{\partial x_1} + a'_2(0) \frac{\partial}{\partial x_2} + a'_3(0) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

olarak yazabiliriz.  $a'_0(0) = 0$  olduğuna göre

$$T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \subset Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

bulunur.  $boy S_{\mathbb{K}} = boy T_{S_{\mathbb{K}}}(e) = 3$  olduğundan

$$T_{S_{\mathbb{K}}}(e) = Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

olur. Buna göre  $S_{\mathbb{K}}$  Lie grubunun Lie cebiri  $\text{Im}(\mathbb{K})$  dir.  $\square$

### Sonuç 6.2.3

$T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \cong \text{Im}(\mathbb{K}) = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$  şeklindedir.

## 6.3 3-PGK larda Lie Grubu ve Lie Cebiri için Adjoint Dönüşümler

### 6.3.1 $S_{\mathbb{K}}$ Lie grubu için matris gösterimi

$S_{\mathbb{K}} = \{q \in \mathbb{K} : N_q = 1\}$  ve  $k \in S_{\mathbb{K}}$  için, birebir, örten ve diferensiyellenebilir olan  $intg$  fonksiyonunu

$$\begin{aligned} intg : S_{\mathbb{K}} &\rightarrow S_{\mathbb{K}} \\ x &\rightarrow intg(x) = gxg^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonun türev dönüşümünü ve grubun birimi  $e = 1$  noktasına kısıtlanmasını düşündüğümüzde, bir  $p \in S_{\mathbb{K}}$  için

$$\begin{aligned} Adp : T_{S_{\mathbb{K}}}(e) &\rightarrow T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \\ q &\rightarrow pqp^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümüne adjoint dönüşümü denir.  $T_{S_{\mathbb{K}}}(e) = Sp\{e_1, e_2, e_3\}$  olduğundan  $\{e_1, e_2, e_3\}$  bazına göre

$$\begin{aligned} Adp(e_1) &= (a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2) e_1 + (2\lambda_1\lambda_2a_1a_2 + 2\lambda_2a_0a_3) e_2 \\ &\quad + (2\lambda_1\lambda_2a_1a_2 - 2\lambda_1a_0a_2) e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Adp(e_2) &= (2\lambda_1\lambda_3a_1a_2 - 2\lambda_3a_0a_3) e_1 + (a_0^2 - \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2) e_2 \\ &\quad + (2\lambda_1\lambda_3a_2a_3 - 2\lambda_1a_0a_1) e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Adp(e_3) &= (2\lambda_2\lambda_3a_1a_3 + 2\lambda_3a_0a_2) e_1 + (2\lambda_2\lambda_3a_2a_3 - 2\lambda_2a_0a_1) e_2 \\ &\quad + (a_0^2 - \lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2) e_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Gösterimlerin sade ve kısa olması açısından  $Adp$  matrisi

$$\begin{bmatrix} a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2 & 2\lambda_1\lambda_3a_1a_2 - 2\lambda_3a_0a_3 & 2\lambda_2\lambda_3a_1a_3 + 2\lambda_3a_0a_2 \\ 2\lambda_1\lambda_2a_1a_2 + 2\lambda_2a_0a_3 & a_0^2 - \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2 & 2\lambda_2\lambda_3a_2a_3 - 2\lambda_2a_0a_1 \\ 2\lambda_1\lambda_2a_1a_3 - 2\lambda_1a_0a_2 & 2\lambda_1\lambda_3a_2a_3 + 2\lambda_1a_0a_1 & a_0^2 - \lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

*Teorem 6.3.1.1*

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $Adp^T\varepsilon Adp = \varepsilon$  dir.

*İspat*

$$\begin{aligned} Adp^T\varepsilon &= \begin{bmatrix} a_0^2 + \lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2 & 2\lambda_2a_0a_3 + 2\lambda_1\lambda_2a_1a_2 \\ 2\lambda_1\lambda_3a_1a_2 - 2\lambda_3a_0a_3 & a_0^2 - \lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 - \lambda_2\lambda_3a_3^2 \\ 2\lambda_3a_0a_2 + 2\lambda_2\lambda_3a_1a_3 & 2\lambda_2\lambda_3a_2a_3 - 2\lambda_2a_0a_1 \\ 2\lambda_1\lambda_2a_1a_3 - 2\lambda_1a_0a_2 & \\ 2\lambda_1a_0a_1 + 2\lambda_1\lambda_3a_2a_3 & \\ a_0^2 - \lambda_1\lambda_2a_1^2 - \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Adp^T \varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 a_0^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_1^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 a_2^2 - \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 a_3^2 & 2\lambda_1 \lambda_2^2 a_0 a_3 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 a_1 a_2 \\ 2\lambda_1^2 \lambda_3^2 a_1 a_2 - 2\lambda_1 \lambda_3^2 a_0 a_3 & \lambda_1 \lambda_3 a_0^2 - \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 a_1^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_2^2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 a_3^2 \\ 2\lambda_2 \lambda_3^2 a_0 a_2 + 2\lambda_2^2 \lambda_3^2 a_1 a_3 & 2\lambda_2^2 \lambda_3^2 a_2 a_3 - 2\lambda_2^2 \lambda_3 a_0 a_1 \\ 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 a_1 a_3 - 2\lambda_1^2 \lambda_2 a_0 a_2 & \\ 2\lambda_1^2 \lambda_3 a_0 a_1 + 2\lambda_1^2 \lambda_3^2 a_2 a_3 & \\ \lambda_2 \lambda_3 a_0^2 - \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 a_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 a_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_3^2 & \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} Adp^T \varepsilon Adp &= (N_p)^2 \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.  $Adp$  matrisi ortogondur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \det Adp &= (a_0^2 + \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2)^3 \\ &= (N_p)^3 = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sebeptendir ki  $Adp$  lineer dönüşümü  $T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \cong \text{Im}(\mathbb{K})$  de bir izometridir.  $\square$

### *Teorem 6.3.1.2*

$p$  bir 3-PGBK olsun.  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  lerin hepsi birden pozitif ya da hepsi birden negatif olmak üzere

$$Adp = I_3 + \sin \theta S + (1 - \cos \theta) S^2$$

şeklindedir.

*İspat*

$i = 1, 2, 3$ , her  $\lambda_i > 0$  ya da her  $\lambda_i < 0$  ve sıfırdan farklı herhangi bir  $V_p \in \text{Im}(\mathbb{K})$  için

$$f(V_p, V_p) = \lambda_1 \lambda_2 a_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 a_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 a_3^2 > 0$$

bulunur ve bu durumda  $f$  fonksiyonu pozitif tanımlı olur.

$p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ve  $N_p = 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} p &= a_0 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2} \frac{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2}} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + \hat{p} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\cos \frac{\theta}{2} = a_0, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2}$$

$$\text{ve } \hat{p} = \frac{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2a_1^2 + \lambda_1\lambda_3a_2^2 + \lambda_2\lambda_3a_3^2}}.$$

şeklinde dir.  $\hat{p}$  vektörünün anti-simetrik matrisini bulmalıyız:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\varepsilon S = S^T (-\varepsilon)$  önermesi sağlanacak şekilde bir  $S$  matrisi bulunmalıdır ki;

$$\begin{aligned} \varepsilon S &= \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3s_3 & \lambda_3s_2 \\ \lambda_2s_3 & 0 & -\lambda_2s_1 \\ -\lambda_1s_2 & \lambda_1s_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1\lambda_2\lambda_3s_3 & \lambda_1\lambda_2\lambda_3s_2 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3s_3 & 0 & -\lambda_1\lambda_2\lambda_3s_1 \\ -\lambda_1\lambda_2\lambda_3s_2 & \lambda_1\lambda_2\lambda_3s_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^T(-\varepsilon) &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 s_3 & -\lambda_1 s_2 \\ -\lambda_3 s_3 & 0 & \lambda_1 s_1 \\ \lambda_3 s_2 & -\lambda_2 s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s_3 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s_3 & 0 & -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s_1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s_2 & \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 s_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olacak şekilde  $S$  matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 s_3 & \lambda_3 s_2 \\ \lambda_2 s_3 & 0 & -\lambda_2 s_1 \\ -\lambda_1 s_2 & \lambda_1 s_1 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \hat{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

şeklinde bulunur.  $S$  ve  $T$  iki anti-simetrik matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 s_3 & \lambda_3 s_2 \\ \lambda_2 s_3 & 0 & -\lambda_2 s_1 \\ -\lambda_1 s_2 & \lambda_1 s_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } T = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 t_3 & \lambda_3 t_2 \\ \lambda_2 t_3 & 0 & -\lambda_2 t_1 \\ -\lambda_1 t_2 & \lambda_1 t_1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere ( $T \leftrightarrow \hat{q} = (q_1, q_2, q_3)$ )

$$\begin{aligned}
ST &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 s_3 & \lambda_3 s_2 \\ \lambda_2 s_3 & 0 & -\lambda_2 s_1 \\ -\lambda_1 s_2 & \lambda_1 s_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 t_3 & \lambda_3 t_2 \\ \lambda_2 t_3 & 0 & -\lambda_2 t_1 \\ -\lambda_1 t_2 & \lambda_1 t_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_3 s_2 t_2 - \lambda_2 \lambda_3 s_3 t_3 & \lambda_1 \lambda_3 s_2 t_1 & \lambda_2 \lambda_3 s_3 t_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 s_1 t_2 & -\lambda_1 \lambda_2 s_1 t_1 - \lambda_2 \lambda_3 s_3 t_3 & \lambda_2 \lambda_3 s_3 t_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 s_1 t_3 & \lambda_1 \lambda_3 s_2 t_3 & -\lambda_1 \lambda_2 s_1 t_1 - \lambda_1 \lambda_3 s_2 t_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TS &= \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 t_3 & \lambda_3 t_2 \\ \lambda_2 t_3 & 0 & -\lambda_2 t_1 \\ -\lambda_1 t_2 & \lambda_1 t_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 s_3 & \lambda_3 s_2 \\ \lambda_2 s_3 & 0 & -\lambda_2 s_1 \\ -\lambda_1 s_2 & \lambda_1 s_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda_3 s_2 t_2 - \lambda_2 \lambda_3 s_3 t_3 & \lambda_1 \lambda_3 s_1 t_2 & \lambda_2 \lambda_3 s_1 t_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 s_2 t_1 & -\lambda_1 \lambda_2 s_1 t_1 - \lambda_2 \lambda_3 s_3 t_3 & \lambda_2 \lambda_3 s_2 t_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 s_3 t_1 & \lambda_1 \lambda_3 s_3 t_2 & -\lambda_1 \lambda_2 s_1 t_1 - \lambda_1 \lambda_3 s_2 t_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olup

$$ST - TS = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \lambda_3 (s_2 t_1 - s_1 t_2) & \lambda_2 \lambda_3 (s_3 t_1 - s_1 t_3) \\ \lambda_1 \lambda_2 (s_1 t_2 - s_2 t_1) & 0 & \lambda_2 \lambda_3 (s_3 t_2 - s_2 t_3) \\ \lambda_1 \lambda_2 (s_1 t_3 - s_3 t_1) & \lambda_1 \lambda_3 (s_2 t_3 - s_3 t_2) & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
ST - TS &\leftrightarrow (\lambda_3 (s_2 t_3 - s_3 t_2), \lambda_2 (s_3 t_1 - s_1 t_3), \lambda_1 (s_1 t_2 - s_2 t_1)) \\
&= \hat{p} \wedge \hat{q}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\cos \frac{\theta}{2} = a_0, \quad s_1 \sin \frac{\theta}{2} = a_1, \quad s_2 \sin \frac{\theta}{2} = a_2 \quad \text{ve} \quad s_3 \sin \frac{\theta}{2} = a_3$$

olmak üzere

$$Adp = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\lambda_1 \lambda_2 s_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 s_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 s_3^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} & 2\lambda_1 \lambda_3 s_1 s_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2\lambda_3 s_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ 2\lambda_1 \lambda_2 s_1 s_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\lambda_2 s_3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \cos^2 \frac{\theta}{2} + (-\lambda_1 \lambda_2 s_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 s_2^2 - \lambda_2 \lambda_3 s_3^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ 2\lambda_1 \lambda_2 s_1 s_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2\lambda_1 s_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & 2\lambda_1 \lambda_3 s_2 s_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\lambda_1 s_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ & 2\lambda_2 \lambda_3 s_1 s_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\lambda_3 s_2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ & 2\lambda_2 \lambda_3 s_2 s_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2\lambda_2 s_1 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ & \cos^2 \frac{\theta}{2} + (-\lambda_1 \lambda_2 s_1^2 - \lambda_1 \lambda_3 s_2^2 + \lambda_2 \lambda_3 s_3^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

bu ifadeyi düzenlersek,



şeklinde gösterilirse,  $\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}})$ ,  $e$  noktasındaki tanjant uzay ile izomorf olur. O halde  $\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}}) \cong T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  dir.

$$[\cdot, \cdot] : T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \times T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \rightarrow T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

olarak tanımladığımız çarpım Lie çarpımıdır.  $(T_{S_{\mathbb{K}}}(e), [\cdot, \cdot])$  ikilisi  $S_{\mathbb{K}}$  Lie grubunun Lie cebiri olur. Şimdi bu Lie çarpımının kuralını gösterelim:

$s = 0$  noktasında,  $e$  noktasından geçen,  $\gamma_1'(0) = e_1$  olan bir

$$\gamma_1 : I \rightarrow G$$

$$s \rightarrow \gamma_1(s)$$

eğrisi alalım.  $p \in S_{\mathbb{K}}$  olmak üzere  $(l_p)(\gamma_1(s)) = \vartheta_1(s)$  olacak şekilde

$$\vartheta_1 : I \rightarrow G$$

$$s \rightarrow \vartheta_1(s)$$

eğrisi vardır. Öyle ki  $(l_p)_*(\gamma_1'(0)) = \vartheta_1'(0)$  dir.

$$(l_p)_*(\gamma_1'(0)) = \vartheta_1'(0)$$

eşitliğinde  $p = a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$  alındığında

$$\begin{aligned} \vartheta_1'(0) &= p e_1 = -\lambda_1 \lambda_2 a_1 + a_0 e_1 + \lambda_2 a_3 e_2 - \lambda_1 a_2 e_3 \\ &= X_1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde  $s = 0$  noktasında  $e$  noktasından geçen ve  $\gamma_2'(0) = e_2$  olan bir

$$\gamma_2 : I \rightarrow G$$

$$s \rightarrow \gamma_2(s)$$

eğrisi alalım.  $p \in S_{\mathbb{K}}$  olmak üzere  $(l_p)(\gamma_2(s)) = \vartheta_2(s)$  olacak şekilde

$$\begin{aligned}\vartheta_2 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \vartheta_2(s)\end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki  $(l_p)_* (\gamma_2'(0)) = \vartheta_2'(0)$  dır.

$$(l_p)_* (\gamma_2'(0)) = \vartheta_2'(0)$$

eşitliğinde  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  alındığında

$$\begin{aligned}\vartheta_2'(0) &= pe_2 = -\lambda_1\lambda_3a_2 - \lambda_3a_3e_1 + a_0e_2 + \lambda_1a_1e_3 \\ &= X_2\end{aligned}$$

ve  $s = 0$  noktasında  $e$  noktasından geçen ve  $\gamma_3'(0) = e_3$  olan bir

$$\begin{aligned}\gamma_3 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \gamma_3(s)\end{aligned}$$

eğrisi alalım.  $p \in S_{\mathbb{K}}$  olmak üzere  $(l_p)_* (\gamma_3'(s)) = \vartheta_3'(s)$  olacak şekilde

$$\begin{aligned}\vartheta_3 : I &\rightarrow G \\ s &\rightarrow \vartheta_3(s)\end{aligned}$$

eğrisi vardır. Öyle ki  $(l_p)_* (\gamma_3'(0)) = \vartheta_3'(0)$  dır.

$$(l_p)_* (\gamma_3'(0)) = \vartheta_3'(0)$$

eşitliğinde  $p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  alındığında

$$\begin{aligned}\vartheta_3'(0) &= pe_3 = -\lambda_2\lambda_3a_2 + \lambda_3a_2e_1 - \lambda_2a_1e_2 + a_0e_3 \\ &= X_3\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. O halde  $\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}})$  nın bir bazı  $\{X_1, X_2, X_3\}$  dir. Baz vektörlerini  $\mathcal{X}_l(\mathbb{E}^4)$  ün baz vektörlerinin bir lineer birleşimi şeklinde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\lambda_1 \lambda_2 a_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + a_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 a_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_1 a_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\
X_2 &= -\lambda_1 \lambda_3 a_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - \lambda_3 a_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_1 a_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\
X_3 &= -\lambda_2 \lambda_3 a_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + \lambda_3 a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_2 a_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_0 \frac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

Şimdi  $\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}})$  üzerinde bracket operatörünü tanımlayalım.  $\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}})$  kümesinin bazlarının çarpım kuralını vermemiz yeterli olacaktır:

$$\begin{aligned}
D_{X_1} X_2 &= (-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_3, \lambda_1 \lambda_3 a_2, -\lambda_1 \lambda_2 a_1, \lambda_1 a_0) \\
D_{X_2} X_1 &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_3, -\lambda_1 \lambda_3 a_2, \lambda_1 \lambda_2 a_1, -\lambda_1 a_0)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$[X_1, X_2] = D_{X_1} X_2 - D_{X_2} X_1$$

eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= (-2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_3, 2\lambda_1 \lambda_3 a_2, -2\lambda_1 \lambda_2 a_1, 2\lambda_1 a_0) \\
&= 2\lambda_1 X_3
\end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
D_{X_2} X_3 &= (-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_1, \lambda_3 a_0, \lambda_2 \lambda_3 a_3, -\lambda_1 \lambda_3 a_2) \\
D_{X_3} X_2 &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_1, -\lambda_3 a_0, -\lambda_2 \lambda_3 a_3, \lambda_1 \lambda_3 a_2)
\end{aligned}$$

elde edilir bu eşitliklerden de

$$[X_2, X_3] = 2\lambda_3 X_1$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned}
D_{X_3} X_1 &= (-\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_2, -\lambda_2 \lambda_3 a_0, \lambda_2 a_0, \lambda_1 \lambda_2 a_1) \\
D_{X_1} X_3 &= (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_2, \lambda_2 \lambda_3 a_0, -\lambda_2 a_0, -\lambda_1 \lambda_2 a_1)
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$[X_3, X_1] = 2\lambda_2 X_2$$

bulunur.

$\mathcal{X}_l(S_{\mathbb{K}}) \cong T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  olduğundan  $T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  üzerindeki Bracket çarpım kuralını verebiliriz.

Burada

$$e_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_e \quad (i = 1, 2, 3)$$

olmak üzere

$$[X_1, X_2]|_e = 2\lambda_1 (X_3)|_e$$

olur buradan da

$$[(X_1)|_e, (X_2)|_e] = 2\lambda_1 e_3$$

bulunur. O halde

$$[e_1, e_2] = 2\lambda_1 e_3$$

olup

$$[X_2, X_3]|_e = 2\lambda_3 (X_1)|_e$$

olur buradan da

$$[(X_2)|_e, (X_3)|_e] = 2\lambda_3 e_1$$

bulunur. O halde

$$[e_2, e_3] = 2\lambda_3 e_1$$

elde edilir. Son olarak benzer şekilde

$$[X_3, X_1]|_e = 2\lambda_2 (X_2)|_e$$

olur buradan da

$$[(X_3)|_e, (X_1)|_e] = 2\lambda_2 e_2$$

bulunur. O halde

$$[e_3, e_1] = 2\lambda_2 e_2$$

eşitliği elde edilir.

### 6.3.3 $S_{\mathbb{K}}$ nın Lie Cebiri için Matris Temsili

$X \in T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$  olsun.

$$Ad_X : T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \rightarrow T_{S_{\mathbb{K}}}(e)$$

$$Y \rightarrow Ad_X(Y) = [X, Y]$$

dönüşümü tanımlansın. Buna göre  $Ad_X$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matris,  $S_{\mathbb{K}}$  Lie cebirinin matris gösterimidir.

#### Teorem 6.3.3.1

$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$  olmak üzere

$$Ad_X = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda_3 x_3 & 2\lambda_3 x_2 \\ 2\lambda_2 x_3 & 0 & -2\lambda_2 x_1 \\ -2\lambda_1 x_2 & 2\lambda_1 x_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*İspat*  $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$  olsun. Lineer dönüşüme karşılık gelen matrisi bulalım:

$$Ad_X(e_1) = [X, e_1] = [x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, e_1]$$

şeklinde yazarsak

$$[e_1, e_2] = 2\lambda_1 e_3, [e_2, e_3] = 2\lambda_3 e_1, [e_3, e_1] = 2\lambda_2 e_2, [e_1, e_1] = [e_2, e_2] = [e_3, e_3] = 0$$

olduğundan ayrıca Lie çarpımı lineer olduğundan,

$$[X, e_1] = 2\lambda_2 x_3 e_2 - 2\lambda_1 x_2 e_3$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
Ad_X(e_2) &= [X, e_2] \\
&= [x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, e_2] \\
&= -2\lambda_3x_3e_1 + 2\lambda_1x_1e_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ad_X(e_3) &= [X, e_3] \\
&= [x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, e_3] \\
&= -2\lambda_3x_2e_1 - 2\lambda_2x_1e_2
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece  $Ad_X$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matris  $S_{\mathbb{K}}$  Lie cebirinin matrisi olup

$$Ad_X = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda_3x_3 & 2\lambda_3x_2 \\ 2\lambda_2x_3 & 0 & -2\lambda_2x_1 \\ -2\lambda_1x_2 & 2\lambda_1x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.  $\square$

### 6.3.4 Killing Bilineer Form

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} : T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \times T_{S_{\mathbb{K}}}(e) &\rightarrow T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \\
(X, Y) &\rightarrow \mathcal{K}(X, Y) = iz(Ad_X Ad_Y)
\end{aligned}$$

şeklindeki  $\mathcal{K}$  dönüşümüne, aşağıdaki özellikleri sağladığı takdirde  $S_{\mathbb{K}}$  Lie grubunun Killing bilineer form denir:

- i  $\mathcal{K}$  bilineer,
- ii  $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{K}(Y, X)$ ,
- iii  $\mathcal{K}(X, Y) = iz(Ad_X Ad_Y)$  dir.

#### Teorem 6.3.4.1

$$\begin{aligned}
f : \text{Im}(\mathbb{K}) \times \text{Im}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(X, Y) &\rightarrow f(X, Y) = \lambda_1\lambda_2x_1y_1 + \lambda_1\lambda_3x_2y_2 + \lambda_2\lambda_3x_3y_3
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathcal{K}(X, Y) = -8f(X, Y)$$

şeklindedir.

*İspat*

$X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  ve  $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$  olsun.

$$Ad_X = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda_3x_3 & 2\lambda_3x_2 \\ 2\lambda_2x_3 & 0 & -2\lambda_2x_1 \\ -2\lambda_1x_2 & 2\lambda_1x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Ad_Y = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda_3y_3 & 2\lambda_3y_2 \\ 2\lambda_2y_3 & 0 & -2\lambda_2y_1 \\ -2\lambda_1y_2 & 2\lambda_1y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$Ad_X Ad_Y = \begin{bmatrix} -4\lambda_1\lambda_3x_2y_2 - 4\lambda_2\lambda_3x_3y_3 & 4\lambda_1\lambda_3x_2y_1 & 4\lambda_2\lambda_3x_3y_1 \\ 4\lambda_1\lambda_2x_1y_2 & -4\lambda_1\lambda_2x_1y_1 - 4\lambda_2\lambda_3x_3y_3 & 4\lambda_2\lambda_3x_3y_2 \\ 4\lambda_1\lambda_2x_1y_3 & 4\lambda_1\lambda_3x_2y_3 & -4\lambda_1\lambda_2x_1y_1 - 4\lambda_1\lambda_3x_2y_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.  $Ad_X Ad_Y$  matrisinin köşegen elemanlarının toplamı

$$iz(Ad_X Ad_Y) = -8(\lambda_1\lambda_2x_1y_1 + \lambda_1\lambda_3x_2y_2 + \lambda_2\lambda_3x_3y_3)$$

dir. Böylece

$$iz(Ad_X Ad_Y) = -8f(X, Y)$$

elde edilir.  $\square$

*Teorem 6.3.4.2*

$i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_i$  lerin tümü aynı işaretli olsun. Bu durumda  $S_{\mathbb{K}} = \{p \in \mathbb{K} : N_p = 1\}$  kompakttır.

*İspat*

$\mathcal{K}(X, X) < 0$  ise Lie grubu kompaktır. Burada  $i \in \{1, 2, 3, \}$ ,  $\lambda_i$  lerin tümü aynı işaretli olduğundan  $f(X, X) > 0$ , dolayısıyla  $\mathcal{K}(X, X) < 0$  elde edilir ki bu bize isteneni verir.  $\square$

*Teorem 6.3.4.3*

$\mathcal{K}$  matrisi  $S_{\mathbb{K}}$  Lie grubunun Killing bilineer formuna karşılık gelir ve

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \lambda_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $\mathcal{K} = -8\varepsilon$  olur.

*İspat*

$S_{\mathbb{K}}$  Lie grubunun Killing bi-lineer formunun

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \times T_{S_{\mathbb{K}}}(e) &\rightarrow T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \\ (X, Y) &\rightarrow \mathcal{K}(X, Y) = -8f(X, Y) \end{aligned}$$

şeklinde bir lineer dönüşümü karşılık gelir ve  $T_{S_{\mathbb{K}}}(e) \cong Sp\{e_1, e_2, e_3\}$  olduğundan

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}(e_1, e_1) & \mathcal{K}(e_1, e_2) & \mathcal{K}(e_1, e_3) \\ \mathcal{K}(e_2, e_1) & \mathcal{K}(e_2, e_2) & \mathcal{K}(e_2, e_3) \\ \mathcal{K}(e_3, e_1) & \mathcal{K}(e_3, e_2) & \mathcal{K}(e_3, e_3) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} -8\lambda_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -8\lambda_1\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -8\lambda_2\lambda_3 \end{bmatrix}$$
$$= -8\varepsilon$$

elde edilir.  $\square$

## KAYNAKLAR

- Agrawal, O. P. (1987). Hamilton operators and dual-number quaternions in spatial kinematics. *Mechanism and Machine Theory* 22(6) , 569-575.
- Bayraktar, M. (1988). *Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi*. Atatürk Üniviresitesi Basımevi, Erzurum.
- Bekar, M. (2009). Kuaterniyonların Lie Grup Yapıları Üzerine. *Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri enstitüsü, Kütahya*.
- Cho, E. (1998). De Moivre Formula for Quaternions. *Applied Mathmematics Letters*, 11(6), 33-35.
- Clifford, W. (1873). Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 10.
- Cockle, J. (1849). On Systems of algebra involving more than one imaginary; and on equations of the fifth degree. *Philosophical Magazine* 35:238, 434-437.
- Dickson, L. E. (1924). On the Theory of Numbers and Generalized Quaternions. *American Journal of Mathematics*, 46(1), 1-16.
- Griffiths, L. W. (1928). Generalized Quaternion Algebras and the Theory of Numbers. *American Journal of Mathematics*, 50(2), 303-314.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. İstanbul.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1998). *Lineer Cebir I*. Fen Fakütesi Yayınları, Ankara.
- Halberstam, H., & Ingram R.E. (Eds.) (1967). The mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton. Vol. III Algebra, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hamilton, W. R. (1843). Researches respecting quaternions: First series.
- Hamilton, W. R. (1844). On a new species of Imaginary quantities connected with the theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy* 2, 424-434.

- Hamilton, W. R. (1848). Researches respecting quaternions. *Transactions of the Royal Irish Academy* 21. 199-296.
- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Hodges and Smith, Dublin.
- Hamilton, W. R. (1853). On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with biquaternions. First Published in preceedings of the Royal Irish Academy.
- Hamilton, W. R. (1866). *Elements of Quaternions*. London, U.K.:Longmans Green.
- Hazewinkel, M. (Ed.). (1988). Encyclopaedia of Mathematics: An Updated and Annotated Translation of the Soviet 'Mathematical Encyclopaedia', Kluwer, Dordrecht.
- Jafari, M., & Yaylı, Y. (2010). Hamilton operators and generalized quaternions. 8. *Geometri Sempozyumu*. Antalya.
- Jafari, M., Mortazaasl, H., & Yaylı, Y. (2011). De Moivre's Formula for Matrices of Quaternions. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 21(1), 57-67.
- Jafari, M., Meral, M., & Yaylı, Y. (2013). Matrix representation of dual quaternions. *Gazi University journal of science*, 6(4), 535-542.
- Jafari, M., & Yaylı, Y. (2015). Generalized Quaternions and Their Algebraic Properties. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1*, 64(1), 15-27.
- Kabadayı, H., & Yaylı, Y. (2011). De Moivre's Formula for Dual Quaternions. *Kuwait Journal of Science & Technology*, 38(1), 15-23.
- Karger A., & Novak J. (1985). *Space kinematics and Lie groups*. Gordon and science publishers.
- Kula, L. (2003). Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi. *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*. Ankara.
- Lee, J.,M. (2002). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer.

- Mamagani, A.B., & Jafari, M. (2013). On Properties of Generalized Quaternions Algebra. *Journal of Novel Applied Sciences*, 2(12), 683-689.
- Meral, M. (2009). Kuaterniyonlara ait matrisler için De'Moivre ve Euler Formülleri. Yüksek Lisans Tezi. *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*. Ankara.
- Mucuk, O. (2010). *Topoloji ve Kategori*. Ankara.
- Pottmann, H., & Wallner, J. (2000). *Computational Line Geometry*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York.
- Rosenfeld, B. (1997). *Geometry of Lie Groups*. Kluwer Academic Publisher, Netherlands.
- O'Neill, B. (1983). *Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York: Academic Press.
- Ölmez, O. (2006). Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*. Ankara.
- Özdemir, M. (2009). The roots of a Split Quaternion. *Applied Mathematics Letters*, 22, 258-263.
- Ward, J. P. (1997). *Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications*. Kluwer Academic Publishers. London, 54-102.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuncay Deniz ŞENTÜRK  
Doğum Yeri ve Yılı : Karabük, 1986  
Medeni Hali : Evli  
Yabancı Dili : İngilizce  
E-posta : tuncaydenizsenturk@gmail.com



### Eğitim Durumu

Lise : Kastamonu Göl Anadolu Öğretmen Lisesi, 2004  
Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim  
Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ortaöğretim Matematik  
Öğretmenliği, 2009  
Yüksek Lisans : Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik,  
2017

### Mesleki Deneyim

İş Yeri : Devrekani Şehit Teğmen Cemal Tepeli Ç.P.L. (2009 – 2010)  
İş Yeri : Çamaş Lisesi (2010 – 2012)  
İş Yeri : Kastamonu Göl Anadolu Lisesi (2017 – Devam Ediyor)

### Yayın Listesi :

Şentürk, T.D., Daşdemir, A., Bilgici, G., & Ünal, Z. (2019). On unrestricted  
Horadam generalized quaternions. *Utilitas Mathematica*, 110, 89-98.

Bilgici, G., & Şentürk, T.D. (2019). Some addition formulas for Fibonacci, Pell and  
Jacobsthal numbers. *Annales Mathematicae Silesianae* 33 (1), 55-65. Doi:  
10.2478/amsil-2019-0005.

Şentürk, T.D., Bilgici, G., Daşdemir, A., Ünal, & Z. (2020). A study on Horadam hybrid numbers. *Turkish Journal of Mathematics* 44, 1212 – 1221. Doi: 10.3906/mat-1908-77.

Daşdemir, A., Şentürk, T.D., & Ünal, Z. (2020). On recursive hyperbolic functions in Fibonacci-Lucas sequence. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 49(6), 2046-2062. Doi: 10.15672/hujms.536435.

Katıldığı Projeler :

Serbest Horadam Genelleştirilmiş Hiper Karmaşık Sayıları ve Cebirsel Özellikleri, 2018-2020. KÜ-BAP01/2018-77 (Proje Araştırmacısı).